Analyse et géométrie

M. Alain Connes, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

Homologie cyclique et facteurs locaux des fonctions L

1. Introduction

Mon cours cette année portait sur les résultats récents (obtenus en collaboration avec C. Consani [6]). Le résultat principal est que l'homologie cyclique que j'avais introduite en 1981 (*cf.* [2]) pour les besoins de la géométrie noncommutative (*cf.* [4], [5]) est aussi la bonne théorie pour obtenir les facteurs locaux archimédiens des fonctions L des variétés arithmétiques. Le résultat principal est le suivant.

Théorème 1.1 *Soit X une variété projective lisse de dimension d sur un corps de nombres K et $v|\infty$ une place archimédienne de K. L'opérateur Θ agissant sur la cohomologie archimédienne de X_v satisfait*

$$\prod_{0\leq w\leq 2d} L_\nu(H^w(X),s)^{(-1)^{w+1}} = \frac{det_\infty(\frac{1}{2\pi}(s-\Theta))\big|_{HC^{\mathrm{ar}}_{\mathrm{even}}(X_\nu)}}{det_\infty(\frac{1}{2\pi}(s-\Theta))\big|_{HC^{\mathrm{ar}}_{\mathrm{odd}}(X_\nu)}}, \qquad s\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Le terme de gauche de (1) *est le produit des facteurs archimédiens de Serre pour la fonction L de X (cf.* [10]*). Dans le terme de droite, det_∞ est le déterminant régularisé (cf. e.g.* [8]*) et on pose $HC^{\mathrm{ar}}_{\mathrm{even}}(X_\nu) = \bigoplus_{n=2k\geq 0} HC^{\mathrm{ar}}_n(X_\nu)$, $HC^{\mathrm{ar}}_{\mathrm{odd}}(X_\nu) = \bigoplus_{n=2k+1\geq 1} HC^{\mathrm{ar}}_n(X_\nu)$.*

L'endomorphisme Θ est défini par

$$k^\Theta|_{HC_n(X_\nu)} = \Lambda(k)k^{-n}, \quad \forall n\geq 0,\ k\in\mathbb{N}^\times\subset\mathbb{R}^\times_+. \tag{2}$$

et implique les λ-opérations $\Lambda(k)$, $k\in\mathbb{N}^\times$ qui ont un sens en général pour l'homologie cyclique des algèbres commutatives et des schémas. La nuance entre HC^{ar}_n et l'homologie cyclique HC_n est la même que la nuance entre cohomologie de Deligne et cohomologie de Deligne réduite.

2. Cohomologie de Deligne et pôles des facteurs archimédiens

Soit X une variété projective lisse sur un corps de nombres K. Soit $\nu|\infty$ une place archimédienne de K et $X_\nu(\mathbb{C})$ la variété complexe correspondante. Pour $0 \le w \le 2d$ où d est la dimension de X on considère le facteur local $L_\nu(H^w(X), s)$ défini par Serre (*cf.* [10]) comme produit de fonctions Γ. Ces fonctions sont complètement spécifiées par les multiplicités de leurs pôles. Ces pôles n'existent que pour $s = m \le \frac{w}{2}$ et un résultat de Beilinson ([1]), donne leurs multiplicités en terme du rang des groupes de cohomologie de Deligne de X_ν,

$$\mathrm{ord}_{s=m} L_\nu(H^w(X), s)^{-1} = \dim_{\mathbb{R}} H^{w+1}_{\mathcal{D}}(X_\nu, \mathbb{R}(w+1-m)) \tag{3}$$

où pour une place complexe ν la cohomologie de Deligne de X_ν est définie comme l'hyper-cohomologie du complexe de faisceaux

$$\mathbb{R}(r)_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}(r) \xrightarrow{\varepsilon} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{r-1} \to 0.$$

où $\Omega^\cdot = \Omega^\cdot_{X(\mathbb{C})}$ est le complexe de faisceaux des formes différentielles holomorphes, $\mathbb{R}(r)$ le sous-groupe $(2\pi i)^r\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$ $(i = \sqrt{-1})$ et ε est l'inclusion : $\mathbb{R}(r) \subset \mathbb{C} \subset \mathcal{O}_{X(\mathbb{C})} = \Omega^0_{X(\mathbb{C})}$. On a une suite exacte de complexes

$$0 \to (\Omega^{<r}_{X(\mathbb{C})})[1] \to \mathbb{R}(r)_{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}(r) \to 0. \tag{4}$$

Suivant [9] (§ 3.6.4), on appelle *complexe de Deligne réduit* le noyau de l'application surjective $\mathbb{R}(r)_{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}(r)$ dans (4), *i.e.* le complexe de de Rham tronqué. La *cohomologie de Deligne réduite* est l'hyper-cohomologie :

$$\widetilde{H}^n_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}(r)) := \mathbb{H}^n(X(\mathbb{C}), (\Omega^{<r}_{X(\mathbb{C})})[1]) = \mathbb{H}^n(\mathrm{Cone}(F^r\Omega^\cdot_{X(\mathbb{C})} \xrightarrow{\iota} \Omega^\cdot_{X(\mathbb{C})})[1]). \tag{5}$$

3. λ-décomposition

Le semigroupe multiplicatif $\mathbb{N}^\times$ agit de manière canonique sur l'homologie cyclique d'une algèbre *commutative* ([9], [12]) :

Proposition 3.1 *Soit A une algèbre commutative et $(C_k(A) = A^{\otimes(k+1)}, b, B)$ le complexe mixte associé. Les λ-opérations définissent des endomorphismes Λ_* of $C_*(A)$ préservant la graduation tels que*
- $\Lambda_{nm} = \Lambda_n \Lambda_m, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^\times$
- $b\Lambda_m = \Lambda_m b, \quad \forall m \in \mathbb{N}^\times$
- $\Lambda_m B = mB\Lambda_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}^\times$.

Cette construction détermine, pour une algèbre commutative A sur un corps de caractéristique 0, une décomposition *canonique* de l'homologie cyclique de A comme somme directe

$$HC_n(A) = \bigoplus_{j \ge 0} HC_n^{(j)}(A)$$

qui diagonalise les endomorphismes Λ_m *i.e.*

$$\Lambda_m(\alpha) = m^j \alpha, \quad \forall \alpha \in HC_n^{(j)}(A), m \in \mathbb{N}^\times.$$

4. Homologie cyclique des variétés projectives lisses sur $\mathbb{C}$

L'homologie cyclique des schémas est obtenue à partir des bicomplexes (b, B) associés aux ouverts affines. D'après [12] (Lemme 3.0) la λ-décomposition s'étend au cas des schémas. Soit $X_{\mathbb{C}}$ une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$. On obtient une décomposition finie

$$HC_n(X_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{j\geq 0} HC_n^{(j)}(X_{\mathbb{C}}).$$

Le résultat clef est le suivant ([12], théorème 3.3).

Proposition 4.1 *Soit $X_{\mathbb{C}}$ une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$. On a un isomorphisme canonique*

$$HC_n^{(j)}(X_{\mathbb{C}}) \cong \widetilde{H}_{\mathcal{D}}^{2j+1-n}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}(j+1)) \cong H_B^{2j-n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) / F^{j+1}, \forall j \geq 0, \forall n \geq 0. \quad (6)$$

5. Cohomologie archimédienne et homologie cyclique

Considérons les couples (m, w) d'entiers qui apparaissent dans (3), où $\dim X = d$ (de sorte que w est un entier entre 0 et $2d$).

$$A_d = \{(m, q) \mid 0 \leq q \leq 2d,\ m \leq q/2\} \quad (7)$$

La cohomologie archimédienne de dimension infinie de X_ν est dictée par (3) comme la somme directe

$$\bigoplus_{(m,q)\in A_d} H_{\mathcal{D}}^{q+1}(X_\nu, \mathbb{R}(q+1-m)). \quad (8)$$

Lemme 5.1 *Soit $d \geq 0$ un entier. L'application qui au couple (n, j) associe (m, q)*

$$q = 2j - n, \quad m = j - n$$

est une bijection de $E_d = \{(n, j) \mid n \geq 0, 0 \leq 2j - n \leq 2d\}$ avec A_d.

Démonstration. L'application inverse $(m, q) \in A_d$ vers (n, j) où $n = -2m + q, j = -m + q$. On a

$$n \geq 0, 0 \leq 2j - n \leq 2d \implies j - n \leq (2j - n)/2$$

et

$$0 \leq q \leq 2d, m \leq q/2 \implies -2m + q \geq 0, 0 \leq 2(-m+q) - (-2m+q) \leq 2d. \qquad \square$$

La somme (8) vaut donc

$$\bigoplus_{(q,m)\in A_d} H_{\mathcal{D}}^{q+1}(X_\nu, \mathbb{R}(q+1-m)) = \bigoplus_{(n,j)\in E_d} H_{\mathcal{D}}^{2j+1-n}(X_\nu, \mathbb{R}(j+1)). \quad (9)$$

La proposition 4.1, donne l'isomorphisme

$$\bigoplus_{n\geq 0} HC_n(X_{\mathbb{C}}) \cong \bigoplus_{(n,j)\in E_d} \widetilde{H}_{\mathcal{D}}^{2j+1-n}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{R}(j+1)). \quad (10)$$

Ainsi la différence entre la cohomologie archimédienne $HC^{\rm ar}_*(X_\nu)$ de X_ν (8) et l'homologie cyclique $HC_*(X_\nu)$ de (10) est simplement due à la nuance entre cohomologie de Deligne et cohomologie de Deligne réduite. L'homologie cyclique $HC_*(X_\nu)$ est à coefficients dans K_ν *i.e.* dans $\mathbb{C}$ pour une place complexe ν et $\mathbb{R}$ pour une place réelle, et joue le rôle de la cohomologie de de Rham relative. L'homologie cyclique réelle périodique

$$HP^{\rm real}_*(X_\nu) = HP_*(C^\infty(X_\nu,\mathbb{R})) \subset HP_*(C^\infty(X_\nu,\mathbb{C})) \sim HP_*(X_\nu)$$

est définie en termes topologiques comme dans [4], et joue le rôle de la cohomologie de de Rham. Si ν est une place complexe on a une suite exacte

$$0 \to HP^{\rm real}_*(X_\nu) \xrightarrow{\tau} HC_*(X_\nu) \to HC^{\rm ar}_*(X_\nu) \to 0 \tag{11}$$

où τ est l'application naturelle de l'homologie cyclique périodique vers l'homologie cyclique avec un twist de Tate $(2\pi i)^{1+\Theta_0}$. Ici Θ_0 est le générateur des λ-opérations, *i.e.* diffère de Θ par la graduation de l'homologie cyclique.

Quand la place $\nu \mid \infty$ est réelle, on restreint la construction ci-dessus à $HC_n(X_\nu / \mathbb{R})$ ce qui revient à appliquer la construction à $X_\nu / \mathbb{C}$ et à prendre les points fixes du Frobenius anti-linéaire $\bar{F}_\infty$ dans $HC_n(X_\nu / \mathbb{C})$.

Alors que la suite exacte (11) suffit à définir $HC^{\rm ar}_*(X_\nu)$ pour les variétés projectives lisses, nous donnons aussi la définition générale de $HC^{\rm ar}_*(X_\nu)$ en terme d'un complexe construit à partir du complexe qui définit l'homologie cyclique négative et de celui qui définit l'homologie cyclique périodique réelle.

Références

[1] A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions*. (Russian) Current problems in mathematics, vol. 24, 181-238.

[2] A. Connes, *Spectral sequence and homology of currents for operator algebras*, http://www.alainconnes.org/docs/Connes_1981.pdf, Mathematisches Forschunginstitut Oberwolfach, Tagungsbericht 42/81.

[3] A. Connes, *Cohomologie cyclique et foncteurs* Ext^n, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math, 296 (1983), n° 23, 953-958.

[4] A. Connes, *Noncommutative differential geometry*. Inst. Hautes Études Sci., Publ. Math. n° 62 (1985), 257-360.

[5] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).

[6] A. Connes, C. Consani, *Cyclic homology, Serre's local factors and the λ-operations*, preprint (2012).

[7] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 33 (1979) part II, 313-346.

[8] C. Deninger, *On the Γ-factors attached to motives*, Invent. Math., 104 (1991) 245-261.

[9] J.L. Loday, *Cyclic homology*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 301. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[10] J.P. Serre, *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures)*, Sém. Delange-Pisot-Poitou, exp. 19 (1969/70).

[11] C. Weibel, *Cyclic Homology for schemes*, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996), n° 6, 1655-1662.

[12] C. Weibel, *The Hodge filtration and cyclic homology*, K-Theory, 12 (1997), n° 2, 145-164.

Conférences

• 6 et 7 février 2012, deux conférences à l'université de Grenade, Espagne.

• 18 avril 2012, une conférence à l'université de Cardiff, « The Spectral Point of View on Geometry and Physics ».

• 26 avril 2012, une conférence à l'IHÉS, « La musique des formes ».

• Mai 2012, cinq conférences à Ohio State University Columbus, Ohio, États-Unis.

• 14 juin 2012, une conférence à Cortona. « Modular curvature for noncommutative tori ».

• 26 septembre 2012, une conférence à Lille pour l'anniversaire du Fields Institute. « The music of shapes ».

• Avril 2013, une conférence au Collège de France, séminaire d'Antoine Compagnon, « Intelligence proustienne et imaginaire mathématique ».

• Mai 2013, cinq conférences à Ohio State University, Columbus, Ohio,États-Unis.

• Juillet 2013, deux conférences à Rome, Academia dei lincei.

Publications

A. Connes, C. Consani, *The universal thickening of the field of real numbers*, 21 février 2012 [arxiv.org/abs/1202.4377].

A. Connes, C. Consani, *Cyclic homology, Serre's local factors and the lambda-operations*, 21 novembre 2012 [arxiv.org/abs/1211.4239].

A. Connes, A. Chamseddine, W. van Suijlekom, *Inner Fluctuations in Noncommutative Geometry without the first order condition*, mai 2013 [arxiv.org/abs/1304.7583].

A. Connes, A. Chamseddine, W. van Suijlekom, *Beyond the Spectral Standard Model: Emergence of Pati-Salam Unification*, mai 2013 [arxiv.org/abs/1304.8050].

A. Connes, D. Chéreau, J. Dixmier, *Le Théâtre quantique*, Éditions Odile Jacob, mai 2013.