

Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

J'ai utilisé cette année le calcul différentiel quantique pour construire et étudier l'analogie pour les variétés conformes de dimension quatre de l'action de Polyakov. Rappelons que si Σ est une surface de Riemann compacte orientée et X une application différentiable de Σ dans l'espace Riemannien (\mathbb{R}^d, η) (où $\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ est la métrique Riemannienne), la fonctionnelle d'action de Polyakov est définie par l'égalité :

$$(1) \quad I(\Sigma, X) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \eta_{ij} dX^i \wedge * dX^j$$

où les X^i désignent les composantes ($i = 1, \dots, d$) de l'application X et où l'opération $*$ sur les 1-formes de Σ provient de sa structure conforme.

Par construction $I(\Sigma, X)$ est inchangée si l'on modifie la structure Riemannienne de Σ sans changer la structure conforme. Cette propriété d'invariance conforme n'a lieu qu'en dimension 2 pour la fonctionnelle d'énergie :

$$(2) \quad \int_{\Sigma} \eta_{ij} \langle dX^i, dX^j \rangle.$$

Pour construire une fonctionnelle, invariant conforme analogue de (1) en dimension quatre notre première observation est d'interpréter (1) comme la trace de Dixmier de l'opérateur :

$$(3) \quad \eta_{ij} [F, X^i] [F, X^j]$$

où $[F, X] = dX$ désigne la différentielle quantique de la fonction X sur Σ .

Rappelons qu'étant donnée une variété compacte conforme Σ , de dimension paire $n = 2m$, on quantifie le calcul différentiel sur Σ de manière canonique en considérant le module de Fredholm (\mathcal{H}, F) sur $C(\Sigma)$ avec :

$$(4) \quad \mathcal{H} = L^2(\Sigma, \Lambda_{\mathbb{C}}^m T^*) \text{ est l'espace de Hilbert}$$

des m -formes différentielles de carré intégrable

(5) $F = 2P - 1$ où P est le projecteur orthogonal de \mathcal{H}
sur le sous-espace des formes exactes.

Le produit scalaire sur \mathcal{H} est donné par :

(6) $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int \omega_1 \wedge * \omega_2$

et n'utilise que la structure conforme de Σ .

L'algèbre $C(\Sigma)$ des fonctions continues sur Σ agit dans \mathcal{H} par opérateurs de multiplication :

(7) $(f\omega)(x) = f(x)\omega(x) \quad \forall f \in C(\Sigma), \omega \in \mathcal{H}.$

Manifestement le module de Fredholm (\mathcal{H}, F) ne dépend que de la structure conforme de Σ .

L'interprétation de (1) qui permet sa généralisation conforme en dimension quatre est la suivante :

Proposition 1. — *Soit Σ une surface de Riemann compacte. Pour toute application différentiable $X : \Sigma \rightarrow (\mathbb{R}^d, \eta)$ on a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \eta_{ij} dX^i \wedge * dX^j = -\frac{1}{2} \text{Tr}_{\omega} (\eta_{ij} [F, X^i] [F, X^j])$$

où (\mathcal{H}, F) est le module de Fredholm canoniquement associé à Σ et où Tr_{ω} est la trace de Dixmier.

La démonstration de cette proposition est immédiate. En effet l'opérateur F est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 sur Σ que l'on peut écrire (et ceci pour toute dimension paire $n = 2m$) sous la forme :

(8) $F = (dd^* - d^*d)(dd^* + d^*d)^{-1}$ sur $L^2(\Sigma, \Lambda_{\mathbb{C}}^m T^*)$.

Le symbole principal de l'opérateur F est donné par :

(9) $\sigma_0(x, \xi) = (e_{\xi} i_{\xi} - i_{\xi} e_{\xi}) |\xi|^{-2} \quad \forall (x, \xi) \in T^*(\Sigma)$

où e_{ξ} (resp. i_{ξ}) désigne le produit extérieur (resp. intérieur) par le covecteur ξ .

Pour $n = 2m = 2$ on a $\Lambda_{\mathbb{C}}^m T^* = T_{\mathbb{C}}^*$ et $\sigma_0(x, \xi)$ est la symétrie d'axe ξ . Pour toute fonction $f \in C^{\infty}(\Sigma)$, l'opérateur $[F, f]$ est pseudodifférentiel d'ordre -1 . Son symbole principal $\sigma_{-1}([F, f])$ est le crochet de Poisson $\{\sigma_0, f\}$,

(10) $\{\sigma_0, f\}(x, \xi) = 2(e_{df} i_{\xi} + e_{\xi} i_{df} - 2 e_{\xi} i_{\xi} \langle \xi, df \rangle)$

pour $|\xi| = 1$.

Si l'on décompose df en $\langle df, \xi \rangle \xi + \eta$ avec $\eta \perp \xi$ on a alors $\{\sigma_0, f\}(x, \xi) = 2(e_\eta i_\xi + i_\xi e_\eta)$ et la norme de Hilbert-Schmidt de cet opérateur est donnée pour $n = 2$ par $8|\eta|^2$. On calcule facilement la trace de Dixmier dans le cas $n = 2$ car elle ne dépend que du symbole principal de l'opérateur pseudodifférentiel d'ordre -2 :

$$(11) \quad \eta_{ij} [F, X^i] [F, X^j]$$

ce qui donne la preuve de la proposition.

Passons maintenant au cas où Σ est de dimension $n = 2m = 4$. Soit X une application différentiable de Σ dans (\mathbb{R}^d, η) , et définissons l'analogie de (1) grâce à la proposition :

$$(12) \quad I(\Sigma, X) = \text{Tr}_\omega (\eta_{ij} [F, X^i] [F, X^j]).$$

Ici Tr_ω désigne l'unique prolongement de la trace de Dixmier en une trace définie sur tous les opérateurs pseudodifférentiels sur la variété Σ . Ce prolongement est le résidu de Wodzicki et se calcule en coordonnées locales par :

$$(13) \quad \text{Tr}_\omega(P_\sigma) = \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{S^*\Sigma} \sigma_{-4}(x, \xi) d^4x d^3\xi.$$

Dans cette expression P_σ est l'opérateur pseudodifférentiel de symbole total $\sigma(x, \xi)$, i.e. donné par l'intégrale oscillante :

$$(14) \quad p(x, y) = (2\pi)^{-4} \int \sigma(x, \xi) e^{i(x-y) \cdot \xi} d^4\xi$$

et $\sigma_{-4}(x, \xi)$ est la composante homogène de degré -4 du symbole total $\sigma = \sigma_0 + \sigma_{-1} + \dots$. La formule (13) est valable pour des opérateurs scalaires. Dans le cas d'opérateurs pseudodifférentiels agissant sur un fibré vectoriel E on utilise, outre les coordonnées locales x^j impliquées dans (13) et (14), une trivialisatation locale de E . Ceci permet de remplacer P par une matrice P_k^l d'opérateurs scalaires et la formule :

$$(15) \quad \text{Tr}_\omega(P) = \Sigma \text{Tr}_\omega(P_k^k)$$

est alors indépendante des choix effectués.

Notre but est de calculer l'action I définie par (12). Ce calcul résultera de celui de la forme trinéaire suivante sur $C^\infty(\Sigma)$:

$$(16) \quad \tau(f_0, f_1, f_2) = \text{Tr}_\omega(f_0 [F, f_1] [F, f_2]) \quad \forall f_j \in C^\infty(\Sigma).$$

Par construction τ est un 2-cocycle de Hochschild sur $C^\infty(\Sigma)$. De plus il existe, pour $f_1, f_2 \in C^\infty(\Sigma)$, une unique forme différentielle de degré 4, $\Omega(f_1, f_2)$ sur Σ déterminée par l'équation :

$$(17) \quad \tau(f_0, f_1, f_2) = \int_\Sigma f_0 \Omega(f_1, f_2).$$

L'existence de Ω résulte de la formule locale pour le symbole total σ du produit $P_{\sigma^1} P_{\sigma^2}$ de deux opérateurs pseudodifférentiels, en terme de σ_1 et σ_2 :

$$(18) \quad \sigma(x, \xi) = \sum \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \sigma_1(x, \xi) D_x^{\alpha} \sigma_2(x, \xi)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ est un multi-indice, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \alpha_3! \alpha_4!$ et $D_x^{\alpha} = (-i)^{|\alpha|} \partial_x^{\alpha}$.

Cette formule appliquée à $P_{\sigma^1} = f_0$, $P_{\sigma^2} = [F, f_1] [F, f_2]$, jointe à la formule (13) donne l'existence de Ω .

Par construction $\Omega(f_1, f_2)$ ne dépend, pour f_1 et f_2 données, que de la structure conforme de Σ et notre but est le calcul de $\Omega(f_1, f_2)(x)$, $x \in \Sigma$. Soient (x^j) un système de coordonnées locales en x et $\omega^{(i,j)} = dx^i \wedge dx^j$ la base correspondante du fibré $E = \Lambda_{\mathbb{C}}^2 T^*$ sur Σ .

L'opérateur $P = [F, f_1] [F, f_2]$ est pseudodifférentiel d'ordre -2 et nous utiliserons son symbole d'ordre -4 , σ_{-4} :

$$(19) \quad \sigma = \sigma_{-2} + \sigma_{-3} + \sigma_{-4} + \dots$$

où les indices matriciels sont omis. On a, localement :

$$(20) \quad \Omega(f_1, f_2) = \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{S^3} (\text{trace } \sigma_{-4}(x, \xi) d^3\xi) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^4$$

où S^3 est la sphère unité, $|\xi| = 1$.

Le symbole total σ de P est obtenu par la formule (18) à partir des symboles totaux $\sigma([F, f_j])$, $j = 1, 2$. Pour connaître $\sigma_{-4}(P)$ il suffit de connaître $\sigma_{-k}([F, f_j])$, $k = 1, 2, 3$. Pour faire ce calcul on utilise à nouveau (18) pourvu que l'on connaisse le symbole total σ^F de F jusqu'à l'ordre -2 .

Lemme 2. — *Le symbole total σ^F de F jusqu'à l'ordre -2 est une matrice 6×6 de la forme :*

$$\sigma^F = \sigma_0^F + \sigma_{-1}^F + \sigma_{-2}^F$$

où $\sigma_0^F(x, \xi)$ n'implique que $g_{ij}(x)$, $\sigma_{-1}^F(x, \xi)$ est un polynôme de degré 1 du jet d'ordre 1 de la métrique g_{ij} en x à coefficients dépendant de $g_{ij}(x)$, et $\sigma_{-2}^F(x, \xi)$ est la somme d'un polynôme de degré 2 du jet d'ordre 1 de la métrique en x et d'un polynôme de degré 1 du jet d'ordre 2 de la métrique. Les coefficients de ces polynômes sont des fonctions de classe C^{∞} de $g_{ij}(x)$.

Démonstration. — En coordonnées locales les opérateurs $dd^* - d^*d$ et $\Delta = dd^* + d^*d$ sont différentiels et leur symbole total

$$(21) \quad \sigma(dd^* - d^*d) = q_2 + q_1 + q_0, \quad \sigma(\Delta) = p_2 + p_1 + p_0$$

ne dépend que du jet d'ordre 2 de g_{ij} en $x \in \Sigma$. De plus p_2, q_2 ne dépend que de $g_{ij}(x), p_1, q_1$ et p_0, q_0 ont les propriétés indiquées dans le lemme pour σ_{-1}^F et σ_{-2}^F respectivement. Le symbole total $\sigma(\Delta^{-1})$ se calcule, à l'ordre -2 , en utilisant la composition $\sigma_1 \circ \sigma_2$ des symboles (formule 18) par :

$$(22) \quad \sigma(\Delta^{-1}) = p \circ (1 - \epsilon_{-1} - \epsilon_{-2} + \epsilon_{-1}^2)$$

où $p(x, \xi) = p_2(x, \xi)^{-1}$ et $\epsilon_{-1}, \epsilon_{-2}$ sont données par :

$$(23) \quad \Delta \circ p = 1 + \epsilon_{-1} + \epsilon_{-2}$$

expression du symbole total de $\Delta \circ p$ jusqu'à l'ordre -2 . Comme $F = (dd^* - d^*d) \Delta^{-1}$ on a :

$$(24) \quad \sigma_F = (q_2 + q_1 + q_0) \circ \sigma(\Delta^{-1})$$

et l'on vérifie directement l'assertion du lemme. \square

Le symbole total de $[F, f], f \in C^\infty(\Sigma)$, jusqu'à l'ordre -3 inclus, est donné par :

$$(25) \quad \begin{aligned} & \sum_{|\alpha|=1} \partial_\xi^\alpha \sigma_0^F D^\alpha f + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma_0^F D^\alpha f + \sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma_0^F D^\alpha f \\ & + \sum_{|\alpha|=1} \partial_\xi^\alpha \sigma_{-1}^F D^\alpha f + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma_{-1}^F D^\alpha f + \sum_{|\alpha|=1} \partial_\xi^\alpha \sigma_{-2}^F D^\alpha f \end{aligned}$$

où l'on note que l'opération ∂_ξ^α n'altère pas la forme de la dépendance de σ_{-k}^F en fonction de g_{ij} énoncée dans le lemme. En utilisant $\partial_\xi D^\alpha f = 0$ on obtient l'expression suivante pour le symbole σ_{-4} de $[F, f_1] [F, f_2]$:

$$(26) \quad \sigma_{-4} = \sum \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{\beta!} \frac{1}{\gamma!} \frac{1}{\delta!} (D^\alpha f_1) (\partial_\xi^{\alpha+\gamma+\delta} \sigma_{-k}^F) (\partial_\xi^\alpha D^\gamma \sigma_{-l}^F) (D^{\beta+\delta} f_2)$$

où $|\alpha| \geq 1, |\beta| \geq 1, |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| + k + l = 4$.

L'on écrit alors $\sigma_{-4} = \sigma_{-4}^{(0)} + \sigma_{-4}^{(1)} + \sigma_{-4}^{(2)}$ en décomposant la somme (26) selon la valeur de $k + |\gamma| + l \in \{0, 1, 2\}$.

Le lemme montre alors que $\sigma_{-4}^{(j)}$ a la même dépendance en la métrique g_{ij} que celle de $\sigma_k^{(-j)}$. Ces propriétés de $\sigma_{-4}^{(j)}$ persistent après intégration de la variable ξ sur la sphère unité S^3 de $T_x^*(\Sigma)$. Il suffit alors de choisir comme coordonnées les coordonnées normales au point x , données par l'application exponentielle $\exp_x : T_x^*(\Sigma) \rightarrow \Sigma$, on obtient :

Lemme 3. — Soient g une structure Riemannienne sur Σ compatible avec la structure conforme, et ∇, R la dérivation covariante et la courbure correspondantes. Il existe une forme bilinéaire universelle

$$B(\nabla^\alpha df_1, \nabla^\beta df_2), \quad |\alpha| \leq 2, |\beta| \leq 2$$

et une forme trilinéaire universelle $C(R, df_1, df_2)$ telles que :

$$\Omega(f_1, f_2) = (B(\nabla^\alpha df_1, \nabla^\beta df_2) + C(R, df_1, df_2)) dv$$

où dv est la forme volume de (Σ, g) .

Pour déterminer B et C on traite d'abord le cas plat qui est très simple, on obtient dans ce cas :

$$(27) \quad \Omega_0(f_1, f_2) = \left(\Delta(\langle df_1, df_2 \rangle) + \langle \nabla df_1, \nabla df_2 \rangle - \frac{1}{2} \Delta f_1 \Delta f_2 \right) dv$$

où $\Delta = -\Sigma \partial_i^2$ est le Laplacien sur les fonctions.

Ce calcul détermine B en toute généralité et il reste à calculer $C(R, df_1, df_2)$. Dans ce but on utilise l'invariance conforme de $\Omega(f_1, f_2)$ pour montrer qu'il existe une seule forme trilinéaire $C(R, df_1, df_2)$ qui permette d'annuler la variation de l'expression 27 lorsque l'on remplace la métrique g par $e^\delta g$ où $\delta \in C^\infty(\Sigma)$. Il suffit d'effectuer les calculs à l'ordre 1 en δ et l'on obtient la variation suivante pour (27) :

$$(28) \quad d/d\delta \Omega_0(f_1, f_2) = -\Delta \delta \langle df_1, df_2 \rangle dv.$$

L'on montre alors que l'égalité :

$$(29) \quad d/d\delta C(R, df_1, df_2) = \Delta \delta \langle df_1, df_2 \rangle dv$$

détermine uniquement la forme trilinéaire C par l'égalité

$$(30) \quad C(R, df_1, df_2) = -1/3 r \langle df_1, df_2 \rangle$$

où r désigne la courbure scalaire de la métrique g . L'analogue, invariant conforme, de l'action de Polyakov (1) en dimension 4 est ainsi obtenue :

Théorème 4. — Soient Σ une variété conforme compacte de dimension quatre, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application différentiable et $\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ une métrique Riemannienne sur \mathbb{R}^d . On a :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_\omega (\eta_{\mu\nu} [F, X^\mu] [F, X^\nu]) &= \frac{1}{16\pi^2} \int_\Sigma \eta_{\mu\nu}(X) \left(\frac{1}{3} r \langle dX^\mu, dX^\nu \rangle + \Delta \langle dX^\mu, dX^\nu \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \nabla dX^\mu, \nabla dX^\nu \rangle - \frac{1}{2} (\Delta X^\mu) (\Delta X^\nu) \right) dv \end{aligned}$$

où pour un choix arbitraire g de métrique sur Σ , compatible avec la structure conforme, on désigne par r , Δ , ∇ , dv la courbure scalaire, le Laplacien, la dérivée covariante et la forme volume.

Dans le reste de mon cours j'ai ensuite comparé l'action ci-dessus avec l'action d'Einstein-Hilbert. Notons que dans le cas où les $\eta_{\mu\nu}$ sont constants

on peut relier l'action ci-dessus avec le Laplacien d'ordre quatre de Paneitz. Les problèmes suivants sont :

- 1) Le calcul de l'anomalie conforme de l'intégrale fonctionnelle :

$$\int e^{-I(X)} \Pi dX(x).$$

2) Le calcul de l'analogie à quatre dimension du modèle de Veneziano, obtenu en prenant $\Sigma = S^4$ avec sa structure conforme standard $S^4 = P_1(\mathbb{H})$.

A. C.

CONFÉRENCES ET SÉMINAIRES

Décembre 1993. Tel-Aviv : 2 conférences ; « Quantized differential calculus and applications ».

Janvier-mars 1994. Institut Newton Cambridge (U.K.) : Mon cours a eu lieu cette année dans cet institut.

Mai 1994. Université de Berkeley : 3 conférences ; « Bowen Lectures ».

Juillet 1994. Durham (U.K.) : Conférence de deux heures (le 2 juillet) ; « Geometry and gravity ».

Juillet 1994. Paris : Congrès de physique mathématique, une conférence plénière de une heure ; « Calcul différentiel quantique et applications ».

ARTICLES PUBLIÉS

A. Connes, N. Teleman and D. Sullivan. Quasiconformal mappings, operators on Hilbert space and local formulae for characteristic classes, *Topology*, Vol. 33 n° 4, p. 663-681.