Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Variations sur le thème spectral

1. Introduction

J'ai donné cette année mon cours au Newton Institute à Cambridge à l'occasion d'un programme de six mois sur la géométrie noncommutative. L'essentiel de mon activité mathématique a consisté à terminer le livre écrit avec Matilde Marcolli et ayant pour titre : « Noncommutative geometry, quantum fields and motives » qui sera publié par l'AMS et Hindustan book agency.

J'exposerai dans ce résumé quelques variations autour de la notion centrale de triplet spectral qui sert de paradigme en géométrie noncommutative.

Définition 1.1.

Un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *est donné par une algèbre involutive* $\mathcal{A}$ *représentée dans l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *et un opérateur auto-adjoint* D *à résolvante compacte tel que les commutateurs* $[D, a]$ *soient bornés pour tout* $a \in \mathcal{A}$.

Un triplet spectral pair est doté d'une $\mathbb{Z}/2$-graduation

$$\gamma = \gamma^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad \gamma^2 = I$$

qui commute avec l'action de $\mathcal{A}$, et vérifie

$$D\,\gamma = -\,\gamma\, D. \tag{1.1}$$

2. Le rôle des $g_{\mu\nu}$

Les coefficients $g_{\mu\nu}$ du développement de Taylor du carré de l'élément de longueur $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ jouent un rôle crucial en géométrie Riemannienne. En géométrie noncommutative l'élément de longueur est donné par l'Ansatz suivant :

$$ds = D^{-1} \tag{2.1}$$

où dans le cas Riemannien l'opérateur D est l'opérateur de Dirac. Cet opérateur $D = i\gamma^\mu \nabla_\mu$ utilise non pas les $g_{\mu\nu}$ mais la matrice inverse $g = (g^{\mu\nu})$ dans la présentation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\, g^{\mu\nu}$ de l'algèbre de Clifford. De plus le produit de deux géométries noncommutatives (dont l'une est paire) donne la formule simple suivante pour le carré de D,

$$D^2 = (D_1 \otimes 1)^2 + (1 \otimes D_2)^2 \tag{2.2}$$

de sorte qu'il ne semble pas possible d'obtenir une formule simple pour le carré de l'élément de longueur opératoriel ds^2 de la géométrie produit (la formule $ds^2 = ds_1^2 \otimes 1 + 1 \otimes ds_2^2$ ne donne même pas un opérateur compact), pas plus qu'il ne semble possible de relier l'élément de longueur opératoriel aux $g_{\mu\nu}$.

En fait ces difficultés sont résolues par le Théorème suivant qui ne fait aucune hypothèse de commutativité et s'applique (sous des conditions de régularité convenables) à des opérateurs D_μ non bornés non nécessairement auto-adjoints (d'où la notation dz^μ au lieu de ds^μ pour D_μ^{-1}).

Théorème 2.1.

Soit $g = (g^{\mu\nu}) \in M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ une matrice positive inversible d'opérateurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Soient D_μ des opérateurs inversibles dans $\mathcal{H}$ et

$$D^2 = \sum_{\mu,\nu} D_\mu g^{\mu\nu} D_\nu^*. \tag{2.3}$$

Soient $dz^\mu = D_\mu^{-1}$. Alors $ds^2 = D^{-2}$ est donné par

$$\langle \xi, ds^2\, \xi \rangle = \mathrm{Inf}_{\sum_\mu \xi^\mu = \xi} \sum_{\mu,\nu} \langle dz^\mu \xi^\mu, g_{\mu\nu}\, dz^\nu \xi^\nu \rangle, \ \forall \xi \in \mathcal{H} \tag{2.4}$$

où $g^{-1} = (g_{\mu\nu})$ est l'inverse de $g = (g^{\mu\nu})$ dans $M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

On peut étendre l'énoncé au cas non-inversible modulo la convention qui prolonge l'inverse, défini sur le support de l'opérateur, par 0 sur l'orthogonal de ce support.

3. Triplets spectraux à bord

Cette section décrit un travail en collaboration avec A. Chamseddine.

La variation de l'action I_E de Hilbert-Einstein :

$$\begin{aligned} \delta I_E &= \int_M \delta\,(g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{g})\, d^4x \\ &= \int_M (R_{\alpha\beta} \sqrt{g}\,\delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \sqrt{g}\,\delta R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}\,\delta \sqrt{g})\, d^4x \\ &= \int_M (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta})\, \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{g}\, d^4x + \int_M g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} \sqrt{g}\, d^4x \end{aligned}$$

impose, si l'on veut obtenir les équations d'Einstein, de rajouter à cette fonctionnelle d'action un terme de bord qui donne la somme

$$-\int_M R\,\sqrt{g}\,d^4x - 2\int_{\partial M} K\,\sqrt{h}\,d^3y$$

où (en signature Euclidienne) R est la courbure scalaire (positive pour la sphère) et K est la courbure extrinsèque (positive pour un disque). Nous avons montré que cette combinaison apparaît comme l'action spectrale d'un triplet spectral, de dimension quatre, canoniquement associé à une variété spinorielle à bord. Les conditions au bord pour l'opérateur de Dirac sont données (en dimension paire) par la condition de Dirichlet $\Pi_- \xi = 0$ où

$$\Pi_- = \frac{1}{2}(1 - i\,\gamma_n \gamma)$$

où γ_n est la multiplication de Clifford par la normale, et γ est la $\mathbb{Z}/2$-graduation usuelle des spineurs.

Une variété M à bord ∂M donne une suite exacte de C^*-algèbres :

$$0 \to C_0(M \backslash \partial M) \to C(M) \to C(\partial M) \to 0$$

et une suite exacte en K-homologie, de la forme :

$$K^0(C(\partial M)) \to K^0(C(M)) \to K^0(C(M \backslash \partial M)) \to K^1(C(\partial M)) \to \cdots$$

qui donne une obstruction à l'extension de la classe de K-homologie de l'opérateur de Dirac sur $M \backslash \partial M$ en une classe sur M. L'on ne peut donc en général définir un triplet spectral pair sur M qui prolonge celui donné à l'intérieur par l'opérateur de Dirac, mais la construction ci-dessus qui donne la contribution recherchée pour l'action spectrale vérifie toutes les conditions de la Définition (1.1) sauf pour l'anticommutation de D et γ qu'il faut affaiblir de la manière suivante :

Définition 3.1.

Un triplet spectral est ∂–pair *si l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *est muni d'une* $\mathbb{Z}/2$-*graduation* γ *telle que* $[\gamma, a] = 0$ *pour tout* $a \in \mathcal{A}$ *et que* $\mathrm{Dom}\, D \cap \gamma\,\mathrm{Dom}\, D$ *soit dense dans* $\mathcal{H}$ *avec*

$$(D\gamma + \gamma D)\,\xi = 0, \qquad \forall \xi \in \mathrm{Dom}\, D \cap \gamma\,\mathrm{Dom}\, D. \tag{3.1}$$

Cette seule donnée permet de construire une algèbre quotient $\partial\mathcal{A}$ qui joue le rôle de l'algèbre des coordonnées sur le bord, et les ingrédients d'un triplet spectral $(\partial\mathcal{A}, \partial\mathcal{H}, \partial\mathcal{D})$.

Lemme 3.2. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *un triplet spectral* ∂-pair. *Alors l'ensemble des* $a \in \mathcal{A}$ *tels que*

$$a\,\mathrm{Dom}\, D \subset \gamma\,\mathrm{Dom}\, D, \tag{3.2}$$

est un idéal bilatère $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$.

L'algèbre $\partial\mathcal{A}$ est donnée par

$$\partial\mathcal{A} = \mathcal{A} / (\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}^*). \tag{3.3}$$

Soit D_0 l'opérateur restriction de D à Dom D_0 = Dom $D \cap \gamma$ Dom D. C'est un opérateur symétrique fermé. On a

(3.4) $$\{\xi \in \text{Dom } D_0 \mid \| D_0 \xi \| \leq 1\} \text{ est compact en norme.}$$

Le domaine Dom D_0 est globalement invariant par l'action de $\mathcal{A}$.

L'espace de Hilbert $\partial\mathcal{H}$ est construit comme l'adhérence

(3.5) $$\partial\mathcal{H} = \overline{D^{-1} \text{ Ker } D_0^*}$$

de D^{-1} Ker D_0^* dans $\mathcal{H}$ où Ker D_0^* désigne le noyau de l'adjoint de D_0 et l'on suppose que D est inversible pour simplifier la discussion. On montre alors que sous une hypothèse de régularité convenable, l'égalité suivante définit une représentation ρ de $\partial\mathcal{A}$ dans $\partial\mathcal{H}$:

(3.6) $$\rho(a) = a - D^{-2}\,[D^2, a].$$

On montre de plus que pour tout $a \in \partial\mathcal{A}$ l'opérateur $\rho(a^*) - \rho(a)^*$ est compact. On définit l'opérateur ∂D dans $\partial\mathcal{H}$ sur le domaine Dom ∂D = D^{-1} Ker D_0^* par l'égalité

(3.7) $$\langle \xi, \partial D\, \eta \rangle = \langle \xi, D\, \eta \rangle, \qquad \forall\, \eta \in \text{Dom } \partial D, \qquad \xi \in \partial\mathcal{H},$$

(où bien entendu $D\eta$ est considéré comme un élément de Ker $\mathrm{D}_0^* \subset \mathcal{H}$). L'opérateur ∂D est par construction symétrique densément défini et l'on montre que son domaine est invariant par l'action de $\rho(a)$ et que le commutateur $[\partial D, \rho(a)]$ est borné pour tout $a \in \partial\mathcal{A}$.

4. Triplets spectraux et type II

Cette section décrit un travail en collaboration avec M. Marcolli.

La notion de triplet spectral de type II a été introduite par Benameur et Fack. La seule condition qui est altérée dans la Définition 1.1) est la compacité de la résolvante de D qui est maintenant relative à une sous-algèbre de von Neumann semi-finie N du commutant de l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}$, D (et γ dans le cas pair). L'analyse de l'analogue des idéaux de Schatten d'opérateurs compacts est bien développée dans le cas de type II et l'on remplace dans les calculs la trace Tr des opérateurs dans l'espace de Hilbert par la trace Tr_N relative à N, qui est unique à normalisation près quand N est un facteur, ce que nous supposerons.

4.1. Les espaces X_z

L'extension de la théorie aux triplets spectraux de type II est justifiée car elle permet la construction, pour z réel et positif, d'un triplet spectral (de type II) qui est purement de dimension z, *i.e.* dont l'opérateur $D = D_z$ vérifie l'équation :

(4.1) $$\mathrm{Tr}\,(e^{-\lambda D^2}) = \pi^{z/2}\,\lambda^{-z/2}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,$$

correspondant à l'intégrale formelle qui est à la base de la régularisation dimensionnelle :

$$\int e^{-\lambda k^2}\, d^z k = \pi^{z/2}\, \lambda^{-z/2}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*. \tag{4.2}$$

La construction part de l'élément de longueur opératoriel *ds* correspondant à un espace (de type II) de dimension 1 et utilise la transformation $|ds| \to |ds|^{1/z}$.

4.2. Régularisation dimensionnelle

L'analogue de la régularisation dimensionnelle consiste à faire le produit d'un triplet spectral pair $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ par le triplet de type II correspondant à l'espace X_z ci-dessus. On pose $D' = D_z$, et

$$\bar{D} = D \otimes 1, \quad \hat{D} = \gamma \otimes D', \qquad D'' = \bar{D} + \hat{D}, \tag{4.3}$$

où γ est la $\mathbb{Z}/2$-graduation de $\mathcal{H}$. Pour analyser les symétries chirales on adjoint à l'algèbre $\mathcal{A}$ l'opérateur γ et on gradue l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$ ainsi obtenue en considérant $\gamma \in \tilde{\mathcal{A}}$ comme un élément impair. Cet élément n'anticommute pas avec D″, et l'on obtient un potentiel de jauge de la forme

$$B = [D'', \gamma]_- = 2\, \gamma\, \hat{D}, \tag{4.4}$$

qui est à l'origine des anomalies dans les théories de jauge et joue le rôle des « potentiels évanescents » en physique. Rappelons que la notion de potentiel de jauge est définie dans le cas usuel par le $\mathcal{A}$-bimodule $\Omega_D^1 \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs de la forme :

$$A = \Sigma\, a_i\, [D, b_i\,], \qquad a_i,\ b_i \in \mathcal{A}. \tag{4.5}$$

Elle s'adapte en utilisant des commutateurs gradués au cas où l'algèbre est $\mathbb{Z}/2$-graduée, comme ci-dessus pour l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$.

4.3. Finition des graphes anormaux

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral pair et régulier. On suppose pour simplifier que D est inversible. On note $OP\,(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}$, D et γ. Le Lemme suivant donne la finitude des graphes anormaux, avec les notations du § 4.2.

Lemme 4.1. *On suppose que le spectre de dimension du triplet spectral* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *est simple. Soit* $P \in OP\,(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$. *Pour* $n > k > 0$ *on a, quand* $z \to 0$ *:*

$$\mathrm{Tr}\,(\hat{D}^{2k}\,(P \otimes 1)\, D''^{-2n}) \to -\frac{1}{2}\, B\,(k, n-k) \fint P\, D^{-2(n-k)},$$

où $\fint$ est l'analogue du résidu de Wodzicki, qui a un sens sous l'hypothèse de spectre simple.

Proposition 4.2. *Soit* $A \in \Omega_D^1$ *un potentiel de jauge pour* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *et* $n > 0$. *L'expression*

$$\mathrm{Tr}\,(((A \otimes 1)\, D''^{-1})^{\,n}) \tag{4.6}$$

admet au plus un pôle simple en $z = 0$ *de résidu donné par*

$$\mathrm{Res}_{z=0}\, \mathrm{Tr}\,(((A \otimes 1)\, D''^{-1})^{\,n}) = -⨍ (A\, D^{-1})^{n} \tag{4.7}$$

4.4. Graphes anormaux en dimension 2 et le cocycle cyclique d'indice local

On considère un potentiel de jauge évanescent de la forme $E = \gamma\, a\, \hat{D}$. Le graphe le plus simple est le « tadpole » dont l'expression est

$$\mathrm{Trace}\,(E\, D''^{-1}). \tag{4.8}$$

On note $\varphi_{2\,n}$ les composantes du cocycle cyclique donnant la formule d'indice locale (de H. Moscovici et A.C.). On montre d'abord que

$$\mathrm{Tr}\,(E\, D''^{-1}) = -\, \varphi_0(a), \qquad \forall a \in \mathcal{A}\,. \tag{4.9}$$

On rappelle qu'en dimension 2 la composante φ_2 est donnée par :

$$\varphi_2\,(a_0, a_1, a_2) = \frac{1}{4} ⨍ \gamma\, a_0\, [D, a_1]\, [D, a_2]\, D^{-2}, \qquad \forall a_j \in \mathcal{A}\,. \tag{4.10}$$

La relation entre le cocycle cyclique qui donne la formule de l'indice locale et la somme alternée des graphes anormaux est donnée en dimension deux par le résultat suivant :

Théorème 4.3. *Supposons la dimension* ≤ 2 *et que* $b\varphi_0 = 0$; *alors*
(1) φ_2 *est un* 2*-cocycle cyclique*

(2) *Pour tout* $a \in \mathcal{A}$ *et tout potentiel de jauge* A *on a*

$$\mathrm{Tr}\,(E\, D''^{-1}\, A\, D''^{-1}\, A\, D''^{-1}) - \mathrm{Tr}\,(E\, D''^{-1}\, A\, D''^{-1}) = 2 \int_{\varphi_2} a\,(dA + A^2)$$

Ici la fonctionnelle $\int_{\varphi_2}$ est définie sur les deux-formes universelles sur $\mathcal{A}$ par la condition

$$\int_{\varphi_2} a_0\, da_1\, da_2 = \varphi_2\,(a_0, a_1, a_2), \qquad \forall a_j \in \mathcal{A}\,.$$

5. Triplets spectraux et type III

Cette section décrit un travail en collaboration avec H. Moscovici. A nouveau cette variation est motivée par un exemple, celui de la structure transverse des feuilletages de codimension 1.

5.1. Feuilletages de codimension 1

L'algèbre $\mathcal{A}$ est celle des coordonnées transverses. En fait on supposera pour simplifier que l'on se restreint à une transversale de sorte que l'algèbre $\mathcal{A}$ est le produit croisé algébrique de l'algèbre $C^\infty(S^1)$ des fonctions lisses sur S^1 par un groupe Γ de difféomorphismes préservant l'orientation. Un élément de $\mathcal{A} = C^\infty(S^1) \rtimes \Gamma$ est une somme finie de la forme

$$a = \sum_\Gamma a_\phi \, U_\phi^*.$$

Le produit est donné par

$$U_\phi^* \, f = (f \circ \phi) \, U_\phi^*, \qquad U_\phi^* \, U_\psi^* = U_{\psi\phi}^*, \tag{5.1}$$

et l'involution est donnée par

$$a = \sum_\Gamma a_\phi \, U_\phi^* \to a^* = \sum_\Gamma U_\phi \, \bar{a}_\phi. \tag{5.2}$$

On représente $\mathcal{A} = C^\infty(S^1) \rtimes \Gamma$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(S^1)$ des demi-densités sur S^1 ce qui donne la $*$-représentation

$$(\pi(gU_\phi^*)\,\xi)(x) = g(x)\,\phi'(x)^{\frac{1}{2}}\,\xi(\phi(x)), \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}, \qquad x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \tag{5.3}$$

L'opérateur $\partial\!\!\!/ = i\dfrac{d}{dx}$ a pour symbole la métrique sur S^1 qui n'est bien entendu pas invariante en général par les difféomorphismes $\psi \in \Gamma$. Ainsi le commutateur de $\partial\!\!\!/ = i\dfrac{d}{dx}$ avec les U_ϕ^* n'est en général pas borné. On a cependant :

Lemme 5.1. *Soit σ l'automorphisme de $\mathcal{A}$ donné par*

$$\sigma(gU_\phi^*) = \frac{d\phi(x)}{dx}\, gU_\phi^* \tag{5.4}$$

et soit $\partial\!\!\!/ = i\dfrac{d}{dx}$; alors

$$\partial\!\!\!/ \circ \pi(a) - \pi(\sigma(a)) \circ \partial\!\!\!/ \quad \text{est borné} \quad \forall a \in \mathcal{A}. \tag{5.5}$$

5.2. σ-triplet spectral

L'exemple ci-dessus suggère la définition suivante :

Définition 5.2.

Soit σ un automorphisme de $\mathcal{A}$, un σ-triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est donné par une représentation de $\mathcal{A}$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et un opérateur D auto-adjoint à résolvante compacte tel que

$$D\,a - \sigma(a)\,D \quad \text{est borné} \quad \forall a \in \mathcal{A}. \tag{5.6}$$

Les feuilletages de codimension 1 et leur classe transverse donnent un exemple de σ-triplet spectral pour lequel la représentation de l'algèbre $\mathcal{A}$ peut être factorielle de type III.

5.3. Cocycle d'indice

La trace de Dixmier Tr_ω (qui coincide avec le résidu $⨍$ sur leur domaine commun) définit dans le cas des triplets spectraux ordinaires, de dimension finie n, une trace sur l'algèbre $\mathcal{A}$ par la formule $a \to \mathrm{Tr}_\omega(a\,|D|^{-n})$.

Proposition 5.3. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *un* σ*-triplet spectral, alors si* $D^{-1} \in \mathcal{L}^{n,\infty}$ *la fonctionnelle*

$$a \in \mathcal{A} \to \varphi(a) = ⨍ a\, D^{-n} := \mathrm{Tr}_\omega(a\, D^{-n}) \tag{5.7}$$

est une σ^{-n}*-trace* φ *sur* $\mathcal{A}$ *i.e. une fonctionnelle telle que*

$$\varphi(ab) = \varphi(b\sigma^{-n}(a), \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Nous considérons maintenant l'analogue du bimodule des potentiels de jauge (4.5). Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un σ-triplet spectral et $\Omega_D^1 \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs dans $\mathcal{H}$ de la forme

$$\mathrm{A} = \sum a_i\,(Db_i - \sigma(b_i)\, D), \quad a_i, b_i \in \mathcal{A}. \tag{5.8}$$

Proposition 5.4. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *un* σ*-triplet spectral, alors* Ω_D^1 *est un* $\mathcal{A}$*-bimodule pour l'action*

$$a \cdot \omega \cdot b = \sigma(a)\, \omega\, b, \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad \forall \omega \in \Omega_D^1. \tag{5.9}$$

et l'application

$$a \to d_\sigma(a) = D\, a - \sigma(a)\, D. \tag{5.10}$$

est une dérivation de $\mathcal{A}$ *dans* Ω_D^1.

La Proposition 5.3 semble indiquer qu'il faille utiliser la version de la cohomologie cyclique obtenue en tordant les formules usuelles par un automorphisme. En fait il n'en est rien et l'on obtient un cocycle cyclique ordinaire sur $\mathcal{A}$ en adaptant la formule qui donne le caractère de Chern en cohomologie cyclique de la manière suivante :

Proposition 5.5. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *un* σ*-triplet spectral tel que* $D^{-1} \in \mathcal{L}^{n,\infty}$ *pour un* $n \in \mathbb{N}$ *pair. Alors la forme multilinéaire*

$$\Phi_{D,\sigma}(a^0, a^1, \ldots, a^n) := \mathrm{Tr}\,(\gamma D^{-1}\, d_\sigma a^0\, D^{-1}\, d_\sigma a^1 \ldots D^{-1}\, d_\sigma a^n), \tag{5.11}$$

est un cocycle cyclique, $\Phi_{D,\sigma} \in \boldsymbol{Z}_\lambda^n(\mathcal{A})$.

Il reste à généraliser aux σ-triplets spectraux la formule de l'indice locale, ce qui est un travail en cours (en collaboration avec H. Moscovici, comme le reste de cette section).

Conférences

Août 2006 - Novembre 2006, cours au Newton Institute, Cambridge.

Novembre 2006, 1 conférence à l'IHÉS.

Novembre 2006, 1 conférence au Colloque Boltzman au Collège de France.

Février 2007, 1 conférence au CERN.

Mars 2007, 2 conférences à Rome.

Mars 2007, 1 conférence à Bonn, MPI.

Avril 2007, 2 conférences à l'IHÉS et l'IHP.

Mai 2007, 5 conférences à Vanderbilt (Fifth Spring Institute in Noncommutative Geometry and Operator Algebras).

Mai 2007, 1 conférence à Northwestern.

Juin 2007, 1 conférence à St Petersbourg.

Juillet 2007, 1 conférence à Varsovie.

Publications

Alain Connes, *Noncommutative Geometry and the standard model with neutrino mixing*, JHEP 0611 (2006) 081.

Ali H. Chamseddine, Alain Connes, Matilde Marcolli, *Gravity and the standard model with neutrino mixing,* hep-th/0610241.

Alain Connes, Caterina Consani, Matilde Marcolli, *The Weil proof and the geometry of the adeles class space*, arXiv :math/0703392.

Alain Connes, Henri Moscovici, *Type III and spectral triples*, arXiv :math/0609703.

Ali H. Chamseddine, Alain Connes, *Quantum Gravity Boundary Terms from Spectral Action,* arXiv :0705.1786.

Ali H. Chamseddine, Alain Connes, *A Dress for SM the Beggar,* arXiv :0706.3690.

Ali H. Chamseddine, Alain Connes, *Why the Standard Model,* arXiv :0705.1786.