Analyse et géométrie

M. Alain Connes, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

Enseignement : Le site épicyclique

1. Introduction

Mon cours a cette année pour objet la compréhension géométrique de l'homologie cyclique et des λ-opérations grâce à la théorie des topos de Grothendieck. Les résultats ont été obtenus en collaboration avec C. Consani [6], [7], [8]. Nous étudions le topos associé à la catégorie cyclique Λ [2] et à son raffinement épicyclique. À une petite catégorie $\mathcal{C}$ correspond le topos $\hat{\mathcal{C}}$ des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathfrak{Ens}$ des ensembles. Le topos $(\tilde{\Lambda}^{\rm op})^\wedge$ est obtenu en prenant pour C la catégorie *opposée* de la catégorie épicyclique $\tilde{\Lambda}$. Ce choix est dicté par la construction qui associe à tout anneau commutatif R un foncteur *covariant* : $\mathfrak{Fin} \to \mathfrak{Ab}$ de la catégorie des ensembles finis vers celle des groupes abéliens. À l'ensemble fini J correspond la puissance tensorielle $R^{\otimes J} = \otimes_{j\in J} R$ vue comme espace vectoriel et le produit dans R permet de définir l'action des morphismes de $\mathfrak{Fin}$. Par composition avec le foncteur *covariant* $\tilde{\Lambda} \to \mathfrak{Fin}$ on associe à tout anneau commutatif R, un foncteur *covariant* $R^\natural$ de la catégorie épicyclique vers celle des groupes abéliens. En termes géométriques, $R^\natural$ est un faisceau de groupes abéliens sur le topos $(\tilde{\Lambda}^{\rm op})^\wedge$ et l'homologie cyclique de R et ses λ-opérations s'interprètent en termes de ce faisceau. Nous donnons (théorème 8.1) une interprétation conceptuelle de la catégorie épicyclique : c'est la géométrie projective de dimension finie sur le semi-corps $\mathbb{F} := \mathbb{Z}_{\rm max}$ des entiers tropicaux. Nous montrons enfin (théorème 9.1) que la catégorie des points du topos $(\tilde{\Lambda}^{\rm op})^\wedge$ est donnée par la géométrie projective de dimension arbitraire sur les extensions algébriques de $\mathbb{F} := \mathbb{Z}_{\rm max}$.

2. Subdivision marginale

Une variante de la subdivision barycentrique (qui subdivise un n-simplexe en $(n + 1)!$ simplexes) est la subdivision marginale (*edgewise subdivision*) Sd_k, définie pour tout entier $k > 0$, qui subdivise un n-simplexe en k^n simplexes. Soit Δ le squelette de la catégorie des ensembles finis totalement ordonnés. Pour $k \in \mathbb{N}$, Sd_k est le foncteur de Δ dans Δ qui associe à un ensemble fini totalement ordonné F le produit

$$\mathrm{Sd}_k(F) := \{0,..., k-1\} \times F, \text{ Ordre lexicographique}$$

$$f \in \mathrm{Hom}_\Delta(F, F'), \quad \mathrm{Sd}_k(f) := \mathrm{Id} \times f$$

Le semi-groupe $\mathbb{N}^\times$ agit sur le topos $\hat{\Delta}$ par les morphismes géométriques $\hat{\mathrm{S}}\mathrm{d}_k$, la catégorie des points de $\hat{\Delta}$ est celle des intervalles. Un intervalle est un ensemble I totalement ordonné avec un plus petit élément b et un plus grand élément $t \neq b$.

Théorème 2.1. : *L'action de* $\hat{\mathrm{S}}\mathrm{d}_k$ *sur les points de* $\hat{\Delta}$ *est donnée par le foncteur* Sd_k^* *qui associe à un intervalle* I *le quotient* $\mathrm{Sd}_k^*(I)$ *de l'ensemble totalement ordonné* $\{0,\dots, k-1\} \times I = \mathrm{Sd}_k\,(I)$ *par la relation d'équivalence* $(j, t) \sim (j+1, b)$ *pour* $j \in \{0,\dots, k-2\}$.

Corollaire 2.2. : *Le point du topos* $\hat{\Delta}$ *associé à l'intervalle* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ *est un point fixe pour l'action de* $\mathbb{N}^\times$ *sur le topos* $\hat{\Delta}$.

3. La catégorie $\Delta^{\mathrm{op}} \ltimes \mathbb{N}^\times$

La catégorie Δ^{op} opposée de la catégorie Δ est celle des intervalles finis. On note n^* l'intervalle $\{0, 1,\dots, n+1\}$. On considère la catégorie $\Delta^{\mathrm{op}} \ltimes \mathbb{N}^\times$ qui a les mêmes objets que Δ^{op} et est obtenue en adjoignant à Δ^{op} les morphismes $\pi_n^k : \mathrm{Sd}_k^*(n^*) \to n^*$ tels que

$$\pi_n^k \circ \pi_{k(n+1)-1}^\ell = \pi_n^{k\ell}$$

et que π_n^k implémente Sd_k^* au sens où l'on a

$$\alpha \circ \pi_n^k = \pi_m^k \circ \mathrm{Sd}_k^*(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(n^*, m^*).$$

Tout morphisme ϕ de $\Delta^{\mathrm{op}} \ltimes \mathbb{N}^\times$ s'écrit de manière unique $\phi = \pi_n^k \circ \beta$ avec β morphisme de Δ^{op}. L'application qui a un tel ϕ associe $k \in \mathbb{N}^\times$ est un foncteur de $\Delta^{\mathrm{op}} \ltimes \mathbb{N}^\times$ vers le monoïde $\mathbb{N}^\times$. On considère le foncteur $I \mapsto I_*$ qui associe à un intervalle I l'ensemble pointé $I_* = I / \sim$ avec pour point base la classe de $b \sim t$. À tout morphisme $f : I \to J$ correspond l'application quotient f_* qui préserve le point base. Pour tous n, k soit $(\pi_n^k)_*$ l'application de $\mathrm{Sd}_k^*(n^*)_*$ dans n_*^* donnée par le résidu modulo $n+1$. L'application $\phi \mapsto \phi_*$ définit un foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \ltimes \mathbb{N}^\times \to \mathfrak{Fin}_*$.

4. Réalisation géométrique

Dans la réalisation géométrique de la subdivision marginale du simplexe standard, les faces non dégénérées sont paramétrées par le sous-ensemble suivant de $\mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(n^*, \mathrm{Sd}_k^*(n^*))$,

$$\Sigma_n^k := \{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(n^*, \mathrm{Sd}_k^*(n^*)) \mid (\pi_n^k \circ \alpha)_* \text{ bijective}\}$$

Pour $\alpha \in \Sigma_n^k$ on note $\mathrm{Perm}(\alpha)$ la permutation $(\pi_n^k \circ \alpha)_*$.

Lemme 4.1. *L'image de l'application* $\mathrm{Perm}:\Sigma_n^k\to S_n$ *est l'ensemble des permutations dont le nombre de descentes est* $k-1-j<k$. *De plus*

$$\#\{\alpha\in\Sigma_n^k\mid \mathrm{Perm}(\alpha)=\sigma\}=\binom{n+j}{n}$$

À toute application $f:\{1,\ldots,n\}\to\{0,\ldots,k-1\}$ on associe le sous-ensemble

$$X_f := \{j+(n+1)f(j)\mid j\in\{1,\ldots,n\}\}\subset\{1,\ldots,k(n+1)-1\}$$

et l'unique élément $s(f)\in\mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(n^*,\mathrm{Sd}_k^*(n^*))$ dont l'image est X_f.

Lemme 4.2. *L'application* $f\mapsto s(f)$ *est une bijection de* $k^n=\{0,\ldots,k-1\}^n$ *avec* Σ_n^k.

5. λ-opérations et le bord b

On rappelle que les λ-opérations vues comme éléments de l'anneau du groupe symétrique S_n sont données par la somme finie

$$\lambda_n^k=\sum\binom{n+j}{n}\ell_n^{k-j}$$

où, en désignant par S_n^u le sous-ensemble formé des permutations dont le nombre de descentes est égal à $u-1$, on pose

$$\ell_n^u=\sum_{\sigma\in S_n^u}\varepsilon(\sigma)\sigma.$$

Pour relever ces opérations à la catégorie $\Delta^{\mathrm{op}}\ltimes\mathbb{N}^\times$ (puis à la catégorie épicyclique), on définit d'abord les éléments suivants de l'anneau $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{op}}]$

$$\sigma_n^k:=\sum_{\Sigma_n^k}\varepsilon(\mathrm{Perm}(\alpha))\alpha$$

puis on les compose avec les π_n^k ce qui donne des éléments de l'anneau $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{op}}\ltimes\mathbb{N}^\times]$:

$$\Lambda_n^k:=\sum_{\Sigma_n^k}\varepsilon(\mathrm{Perm}(\alpha))\pi_n^k\circ\alpha$$

Les éléments Λ_n^k de l'anneau $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{op}}\ltimes\mathbb{N}^\times]$ vérifient

$$\Lambda_n^k\Lambda_n^\ell=\Lambda_n^{k\ell},\quad \forall k,\ell,n\in\mathbb{N}$$

Le bord b de Hochschild donne également des éléments de l'anneau $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{op}}\ltimes\mathbb{N}^\times]$. Pour chaque $n\geq 1$ et $i\in\{0,\ldots,n\}$ on pose

$$d_i^n\in\mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(n^*,(n-1)^*),\, d_i^n(j):=\begin{cases} j, & \text{si } j\leq i;\\ j-1, & \text{si } j>i.\end{cases}$$

On a $d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i$, $\forall i < j$. Cela suffit pour montrer que $b^2 = 0$ où $b = b_n$ est donné par

$$b := \sum_0^n (-1)^i d_i^n \in \mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{op}}]$$

La commutation de b avec les Λ_n^k a lieu dans l'anneau $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{op}} \ltimes \mathbb{N}^\times]$. On a $\Lambda^k b = b\Lambda^k$ dans $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{op}} \ltimes \mathbb{N}^\times]$. Cela signifie $\Lambda_{n-1}^k b_n = b_n \Lambda_n^k$ pour tout $n \geq 1$. On a

$$b_n \Lambda_n^k = \sum_0^n \sum_{\alpha \in \Sigma_n^k} (-1)^i d_i^n \, \varepsilon(\mathrm{Perm}(\alpha)) \pi_n^k \circ \alpha$$

et $\Lambda_{n-1}^k = \pi_{n-1}^k \sigma_{n-1}^k$, d'où

$$\Lambda_{n-1}^k b_n = \sum_0^n \sum_{\beta \in \Sigma_{n-1}^k} (-1)^i \varepsilon(\mathrm{Perm}(\beta)) \pi_{n-1}^k \beta d_i^n$$

On a $d_i^n \pi_n^k \alpha = \pi_{n-1}^k \mathrm{Sd}_k^*(d_i^n)\alpha$ Il reste à montrer, pour tout $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}^\times$, l'égalité suivante dans $\mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{op}}]$:

$$\sum_0^n \sum_{\alpha \in \Sigma_n^k} (-1)^i \varepsilon(\mathrm{Perm}(\alpha)) \mathrm{Sd}_k^*(d_i^n) \; \alpha = \sum_0^n \sum_{\beta \in \Sigma_{n-1}^k} (-1)^i \varepsilon(\mathrm{Perm}(\beta)) \beta d_i^n$$

Il y a $(n + 1)k^n$ termes à gauche et $(n + 1)k^{n-1}$ à droite. La difference $(n + 1)$ $(k^n - k^{n-1})$ est un nombre pair, et l'on a des annulations deux à deux. Pour montrer géométriquement ces annulations, on associe à chaque terme $\mathrm{Sd}_k^*(d_i^n)\,\alpha$ une face de dimension $n - 1$ de la triangulation du simplexe $\underline{\Delta}^n$ obtenue par la subdivision marginale. Chaque face interne apparait deux fois et avec des signes opposés.

6. La catégorie épicyclique

Elle est obtenue par produit semi-direct

$$\tilde{\Lambda} := \Lambda \ltimes \mathbb{N}^\times$$

de la catégorie cyclique Λ par une action naturelle de $\mathbb{N}^\times$ par *correspondances*. La catégorie cyclique Λ contient à la fois Δ et Δ^{op} et cette action va prolonger les foncteurs Sd_k et Sd_k^*. Commençons par formuler la description de la catégorie cyclique Λ en termes d'ensembles archimédiens.

Définition 6.1. : *Un ensemble archimédien est un couple* (X, θ) *formé d'un ensemble totalement ordonné* X *et d'un automorphisme* $\theta \in \mathrm{Aut}(X)$ *tel que*
- *on a* $\theta(x) > x$ *pour tout* $x \in X$;
- *pour tous* $x, y \in X$ *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $y \leq \theta^n(x)$.

Les objets de la catégorie $\mathfrak{Arc}$ sont les ensembles archimédiens (X, θ) ; les morphismes $f\colon (X, \theta) \to (X', \theta')$ dans $\mathfrak{Arc}$ sont les classes d'équivalence d'applications :

$$f\colon X \to X', \quad f(x) \geq f(y) \quad \forall x \geq y \, ; \quad f(\theta(x)) = \theta'(f(x)), \forall x \in X$$

où la relation d'équivalence identifie f et g s'il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $g(x) = \theta'^r(f(x))$, $\forall x \in X$. Soient (X, θ) un ensemble archimédien et $k > 0$ un entier. Alors (X, θ^k) est un ensemble archimédien

$$\Psi_k(X, \theta) := (X, \theta^k).$$

Pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Arc}}((X, \theta), (X', \theta'))$, soit $g : X \to X'$ dans la classe de f. On a $g(\theta^k(x)) = \theta'^k(g(x))$, $\forall x \in X$. Donc g semble définir un morphisme :

$$\Psi_k(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Arc}}(\Psi_k(X, \theta), \Psi_k(X', \theta'))$$

Mais g et $\theta' \circ g$ donnent le même morphisme dans $\mathfrak{Arc}$ et pas le même dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Arc}}(\Psi_k(X, \theta), \Psi_k(X', \theta'))$. En fait, l'ensemble $\Psi_k(f) = \{\theta'^j \circ g \mid j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\}$ donne une correspondance $\Psi_k : \mathfrak{Arc} \to \mathfrak{Arc}$ qui vérifie :

Proposition 6.2. *(i) Soit $(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Arc}}((X, \theta),(X', \theta'))$, alors $\Psi_k(f)$ est fini de cardinalité égale à k.*

(ii) Soient ℓ, h des morphismes composables dans $\mathfrak{Arc}$

$$\Psi_k(\ell \circ h) = \Psi_k(\ell) \circ \Psi_k(h) := \{u \circ v \mid u \in \Psi_k(\ell), v \in \Psi_k(h)\}.$$

(iii) Pour tous k, k' : $\Psi_k \circ \Psi_{k'} = \Psi_{kk'}$.

Les objets de la catégorie $\mathfrak{Arc} \ltimes \mathbb{N}^\times$ sont les ensembles archimédiens (X, θ) ; les morphismes $f : (X, \theta) \to (X', \theta')$ dans $\mathfrak{Arc} \ltimes \mathbb{N}^\times$ sont les classes d'équivalence d'applications non décroissantes telles que pour un $k \in \mathbb{N}^\times$ on ait

$$f(\theta(x)) = \theta'^k(f(x)), \forall x \in X$$

où la relation d'équivalence identifie f et g s'il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $g(x) = \theta'^r(f(x))$, $\forall x \in X$. L'entier k impliqué dans la condition d'équivariance est unique et définit un foncteur :

$$\mathrm{Mod} : \mathfrak{Arc} \ltimes \mathbb{N}^\times \to \mathbb{N}^\times$$

Soit (X, θ) un ensemble archimédien. L'application identique de X dans X définit un élément :

$$\mathrm{Id}_X^k \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Arc} \ltimes \mathbb{N}^\times}(\Psi_k(X, \theta), (X, \theta))$$

Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Arc}}((X, \theta), (X', \theta'))$, alors pour tout $g \in \Psi_k(f)$ on a

$$f \circ \mathrm{Id}_X^k = \mathrm{Id}_{X'}^k \circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Arc} \ltimes \mathbb{N}^\times}(\Psi_k(X, \theta), (X', \theta'))$$

Soient $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Arc} \ltimes \mathbb{N}^\times}((X, \theta),(X', \theta'))$ et $k = \mathrm{Mod}(h)$. Il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Arc}}((X, \theta), \Psi_k(X', \theta'))$ tel que $h = \mathrm{Id}_{X'}^k \circ g$. De plus g est unique à multiplication par ω'^j près.

La catégorie épicyclique $\tilde{\Lambda}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{Arc} \ltimes \mathbb{N}^\times$ formée des ensembles archimédiens de la forme

$$\underline{n} := (\mathbb{Z}, \theta),\ \theta(x) = x + n + 1, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

L'application identique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définit l'élément

$$\mathrm{Id}_n^k \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Arc} \ltimes \mathbb{N}^\times}(\Psi_k(\mathbb{Z},\theta),(\mathbb{Z},\theta)) = \mathrm{Hom}_{\tilde{\Lambda}}(\Psi_k(\underline{n}),\underline{n})$$

Dans la définition originale de Goodwillie, la catégorie épicyclique $\Lambda \ltimes \mathbb{N}^{\times}$ est obtenue en adjoignant à la catégorie cyclique Λ de nouveaux morphismes $\pi_n^k : [k(n+1)-1] \to [n]$ pour $n \geq 0$, $k \geq 1$, qui vérifient les relations :

(1) $\pi_n^1 = \mathrm{id}_{\mathrm{n}}$, $\pi_n^\ell \circ \pi_{\ell(n+1)-1}^k = \pi_n^{k\ell}$

(2) $\alpha \pi_m^k = \pi_n^k \mathrm{Sd}_{\mathrm{k}}(\alpha)$, pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_\Delta([m],[n])$

(3) $\tau_n \pi_n^k = \pi_n^k \tau_{k(n+1)-1}$.

L'inclusion $\iota : \Delta^{\mathrm{op}} \to \Lambda$ se prolonge de manière unique en un foncteur fidèle

$$\iota : \Delta^{\mathrm{op}} \ltimes \mathbb{N}^{\times} \to \tilde{\Lambda}, \quad \iota(\pi_n^k) = \mathrm{Id}_n^k .$$

7. Opérateur *B*

On définit pour chaque entier $n \geq 0$ un élément de l'anneau $\mathbb{Z}[\Lambda] : B := B_0 A \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ où

$$A := \sum \varepsilon\,(\mathrm{Perm}(\tau))\tau, \qquad \tau \in \mathrm{Aut}_\Lambda(n).$$

$$B_0 \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\underline{n}, \underline{n+1}),$$

$$B_0(i + a\,(n+1)) := 1 + i + a(n+2), \qquad \forall i,\ 0 \leq i \leq n.$$

L'inclusion $\iota : \Delta^{\mathrm{op}} \ltimes \mathbb{N}^{\times} \to \Lambda$ permet de considérer les $\Lambda_n^k \in \mathbb{Z}[\Delta^{\mathrm{op}} \ltimes \mathbb{N}^{\times}]$ comme des éléments de l'anneau $\mathbb{Z}[\tilde{\Lambda}]$ On garde la commutation avec b. L'inclusion $\Lambda \to \tilde{\Lambda}$ fait de B un élément de l'anneau $\mathbb{Z}[\tilde{\Lambda}]$ pour chaque entier n (on devrait le noter $B(n)$).

Théorème 7.1. *Pour tous entiers n, $k \geq 1$ on a l'égalité dans l'anneau $\mathbb{Z}[\tilde{\Lambda}]$:*

$$\Lambda_{n+1}^k B = k B \Lambda_n^k$$

Définition 7.2. *Un module épicyclique E est un foncteur* covariant *de la catégorie épicyclique $\tilde{\Lambda}$ vers celle des groupes abéliens.*

Nous rappelons d'abord la construction du bicomplexe (b, B) normalisé pour un module cyclique avant de donner l'action des $\Lambda(k)$ dans le cas d'un module épicyclique. Pour chaque $n \geq 0$ on pose

$$C_n(E) := E(n) \,/\, V(n), \quad V(n) := (\oplus \,\mathrm{Im}(s_j))$$

où les $s_j = s_j^{n-1} \in \mathrm{Hom}_{\Delta^{\mathrm{op}}}((n-1)^*, n^*)$ sont les dégénérescences, pour $0 \leq j \leq n-1$. L'opérateur B passe au quotient, en effet :

Lemme 7.3. *(i) On a*

$$B(\oplus \,\mathrm{Im}(s_j)) \subset (\oplus \,\mathrm{Im}(s_\ell))$$

(ii) Le sous-espace $W(n) := \mathrm{Im}(B_0) \oplus V(n) \subset E(n)$ est invariant par les permutations cycliques, $E(t)W(n) \subset W(n)$.

On a $b^2 = B^2 = bB + Bb = 0$. On met le bicomplexe (b, B) en degrés négatifs avec

$$C^{\alpha,\,\beta} := C_{\alpha-\beta}\,(E)$$

et on définit l'homologie cyclique d'un module cyclique E par

$$HC_n(E) := \mathbb{H}^{-n}\Big(\bigoplus_{\alpha\le 0} C^{\alpha,\beta}, b+B\Big)$$

Toute algèbre non-commutative définit un module cyclique en prenant garde à l'ordre des termes dans la définition de $A^\natural$. Toutes les propriétés générales de la co-homologie des faisceaux de groupes abéliens sur un topos s'appliquent. L'homologie cyclique $HC_n(E)$ pour tout module cyclique E vérifie tous les résultats comme la longue suite exacte *SBI*, le lien avec l'homologie cyclique négative. L'intérêt de la catégorie épicyclique réside dans :

Théorème 7.4. *Les λ-opérations définissent une action de $\mathbb{N}^\times$ sur $HC_n(E)$ pour tout module épicyclique E.*

L'égalité suivante définit un endomorphisme du bicomplexe (b, B) :

$$\theta(k)\xi = k^{-\alpha}\Lambda(k)\xi, \qquad \forall \xi \in C^{\alpha,\,\beta}$$

La translation $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha + 1, \beta + 1)$ donne un endomorphisme S du bicomplexe (b, B) et l'on a

$$S\theta(k) = k\theta(k)S$$

Si le foncteur E se factorise à travers $\mathfrak{Fin}$ alors les poids sont entiers et l'on a une décomposition

$$HC_n(E) = \bigoplus_{j\ge 0} HC_n^{(j)}(E)$$

Il est facile, en tensorisant par une représentation de $\mathbb{N}^\times$, de construire des exemples où les poids ne sont pas des nombres entiers.

8. Le topos épicyclique

Comme les objets importants sont les foncteurs *covariants* de $\tilde{\Lambda}$ vers la catégorie des ensembles, le topos qui joue un rôle central en homologie cyclique et λ-opérations est le dual de la catégorie *opposée* : $\mathcal{C} = \tilde{\Lambda}^{\mathrm{op}}$.

En géométrie projective, les morphismes entre espaces projectifs $\mathbb{P}(E_j) = (E_j \setminus \{0\}) / K_j^\times$ $(j = 1,2)$ sur des corps K_j, sont induits par les applications *semi-linéaires* $f: E_1 \to E_2$ entre espaces vectoriels, telles que $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Une application $f: E_1 \to E_2$ est semi-linéaire si elle est additive et il existe un homomorphisme injectif $\sigma : K_1 \to K_2$ tel que $f(\lambda x) = \sigma(\lambda)\, f(x)\ \forall \lambda \in K_1$ et $\forall x \in E_1$. Soit $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_{\max} := (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ le semi-corps des entiers *tropicaux*, on le note multiplicativement, q est un symbole. L'addition $\vee$ est donnée par $q^n \vee q^m = q^k$, avec $k = \sup(n, m)$. La multiplication est inchangée : $q^n q^m = q^{n+m}$. Il est de caractéristique 1, on a en effet $1 + 1 = 1$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^\times$ on a un endomorphisme $\mathrm{Fr}_n \in \mathrm{End}(\mathbb{F})$ donné par $\mathrm{Fr}_n(x) := x^n\ \forall x \in \mathbb{F}$. Soit $\mathbb{F}^{(n)}$ le module sur $\mathbb{F}$ obtenu à partir du module libre $\mathbb{F}$ par restriction des scalaires en utilisant l'endomorphisme $\mathrm{Fr}_n \in \mathrm{End}(\mathbb{F})$. On obtient une réalisation des propriétés de la géométrie en caractéristique 1 suggérées dans [10].

(i) L'espace projectif $\mathbb{P}_n := \mathbb{P}(\mathbb{F}^{(n+1)})$ est **fini** de cardinalité $n+1$.

(ii) Les sous-modules E de $\mathbb{F}^{(n)}$ sont en bijection avec les **sous-ensembles** de $\mathbb{P}(\mathbb{F}^{(n)})$.

(iii) Tout sous-module E de $\mathbb{F}^{(n)}$ est isomorphe à $\mathbb{F}^{(k)}$ où k est le **rang** de E.

Théorème 8.1. *La catégorie épicyclique $\tilde{\Lambda}$ est canoniquement isomorphe à la catégorie $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ dont les objets sont les modules $\mathbb{F}^{(n)}$ sur $\mathbb{F}$ et les morphismes les classes projectives d'applications semi-linéaires non nulles.*

La catégorie cyclique $\Lambda \subset \tilde{\Lambda}$ est isomorphe à la sous-catégorie $\mathcal{P}^1_{\mathbb{F}} \subset \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ ayant les mêmes objets que $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ et dont les morphismes sont induits par les applications linéaires.

9. Points du topos épicyclique

On considère la géométrie projective en caractéristique 1, où un espace vectoriel a pour structure additive celle donnée par le max dans un ensemble totalement ordonné.

Théorème 9.1. *La catégorie des points du topos épicyclique est équivalente à la catégorie $\mathcal{P}$ dont les objets sont les espaces vectoriels archimédiens E sur les extensions algébriques K de $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_{\max}$ et les morphismes sont les classes projectives d'applications semi-linéaires.*

Pour déterminer les points du topos épicyclique, on donne une interprétation de la catégorie $\mathfrak{Arc} \ltimes \mathbb{N}^\times$ en termes de groupoïdes orientés.

Définition 9.2 : *Un groupoïde orienté est un groupoïde G muni d'une sous-catégorie $G_+ \subset G$, telle que*

$$G_+ \cap G_+^{-1} = G^{(0)},\ G_+ \cup G_+^{-1} = G.$$

(ici $G^{(0)}$ désigne les unités de G).

Soit (X, θ) un ensemble archimédien, posons

$$G(X, \theta) := (X \times X) / \sim,\ (x, y) \sim (\theta^n(x), \theta^n(y)),\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

et soient r et s les deux projections de $G(X, \theta)$ sur $G^{(0)} := X/\theta$. Muni de la composition $(x, y) \circ (y, z) := (x, z)$ et de $G_+(X, \theta) \subset G(X, \theta)$,

$$G_+(X, \theta) := \{(x, y) \mid x \geq y\}$$

le couple (G, G_+) est un groupoïde orienté qui vérifie les conditions suivantes :

(1) Pour tous $x, y \in G^{(0)}$ il existe $\gamma \in G_+$, $s(\gamma) = y$, $r(\gamma) = x$.

(2) Soit $\gamma \in G$, $s(\gamma) = y$, $r(\gamma) = x$. Alors l'application :

$$\rho \in G_y^y \mapsto \gamma \circ \rho \circ \gamma^{-1} \in G_x^x$$

est un isomorphisme de groupes ordonnés.

(3) Les groupes ordonnés G_x^x sont isomorphes à $(\mathbb{Z}, \geq)$.

Proposition 9.3. *Le foncteur G : (X, θ) $\mapsto$ G(X, θ) de la catégorie* $\mathfrak{Arc} \ltimes \mathbb{N}^\times$ *vers la catégorie des groupoïdes orientés est plein et fidèle.*

La difficulté principale de la démonstration du Théorème 9.1 est de comparer les colimites filtrantes dans deux catégories : celle des foncteurs plats $F : \tilde{\Lambda}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{Ens}$ d'une part, celle des groupoïdes orientés d'autre part. Cette comparaison est obtenue en reconstruisant un groupoïde orienté à partir d'un foncteur plat.

Réferences

[1] Connes A., *Spectral sequence and homology of currents for operator algebras*, Mathematisches Forschunginstitut Oberwolfach, Tagungsbericht 42/81, http://www.alainconnes.org/docs/Connes_1981.pdf.

[2] Connes A., *Cohomologie cyclique et foncteurs* Ext^n, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 296 (1983), n° 23, 953-958.

[3] Connes A., *Noncommutative differential geometry*, Inst. Hautes Études Sci., Publ. Math, n° 62 (1985), 257-360.

[4] Connes A., *Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).

[5] Connes A., Consani C., *Cyclic homology, Serre's local factors and the λ-operations*, Journal of K-theory.

[6] Connes A., Consani C., *Cyclic structures and the topos of simplicial sets.*

[7] Connes A., Consani C., *Projective geometry in characteristic one and the epicyclic category.*

[8] Connes A., Consani C., *The Cyclic and Epicyclic Sites.*

[9] Loday J.L., *Cyclic homology*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 301, Berlin, Springer-Verlag, 1998.

[10] Tits J., *Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes*, Colloque d'algèbre supérieure, Bruxelles 19-22 décembre 1956, Centre belge de recherches mathématiques, Établissements Ceuterick, Louvain, Librairie Gauthier-Villars, Paris (1957), 261-289.

Conférences

- 4-6 septembre 2013, une conférence en l'honneur de J.L. Loday, Institut de recherche mathématique avancée, Strasbourg.
- 8-14 septembre 2013, une conférence à Oberwolfach.
- Octobre 2013, une conférence à Leiden, Lorentz Center, « Workshop Noncommutative Geometry and Particle Physics ».
- 16 novembre 2013, une conférence à la Sorbonne, Forum du CNRS « Les fondamentales ».
- Mars 2014, une conférence à Nijmegen, Radboud University Nijmegen, « Lecture on the spectral Standard Model ».
- Mai 2014, trois conférences à Texas A&M, États-Unis, « Noncommutative Geometry Festival ».
- Mai 2014, cinq conférences à Ohio State University, Columbus, Ohio, États-Unis, « The arithmetic Site ».
- 1er-6 juin 2014, deux conférences à Côme, SIGRAV Graduate School XI Édition, Como, Italie, « Gravity and the Quantum ».

• 12 juin 2014, une conférence à Grenoble, organisée par l'Institut Fourier, « Boson de Higgs et structure fine de l'espace temps ».

• 16-21 juin 2014, une conférence à Rome, Villa Mondragone, « Noncommutative Geometry and Applications ».

• 23-27 juin 2014, une conférence à l'IHES, Algèbre, géométrie et physique, « Le site arithmétique »,

PUBLICATIONS

CONNES A. et CONSANI C., « Cyclic structures and the topos of simplicial sets », *Journal of Pure and Applied Algebra*, juillet 2014, DOI : 10.1016/j.jpaa.2014.06.002.

CONNES A. et CONSANI C., « Projective geometry in characteristic one and the epicyclic category », *Nagoya Mathematical Journal,* 217, 2015, 95-132.

CONNES A. et CONSANI C., « The Arithmetic Site », *Comptes rendus Acad. Sciences,* 352(12), 2014, 971-975.

CONNES A. et CONSANI C., « Cyclic homology, Serre's local factors and λ-operations », *Journal of K-Theory. K-Theory and its Applications in Algebra, Geometry, Analysis & Topology*, 14(1), août 2014, 1-45, DOI : 10.1017/is014006012jkt270.

CHAMSEDDINE A.H., CONNES A. et VAN SUIJLEKOM W.D., « Inner fluctuations in noncommutative geometry without the first order condition », *Journal of Geometry and Physics*, 73, novembre 2013, 222-234, DOI : 10.1016/j.geomphys.2013.06.006.

CHAMSEDDINE A.H., CONNES A. et SUIJLEKOM W.D. van, « Beyond the spectral standard model: emergence of Pati-Salam unification », *Journal of High Energy Physics*, 2013(11), novembre 2013, 1-36, DOI : 10.1007/JHEP11(2013)132.

CONNES A. et MOSCOVICI H., « Modular curvature for noncommutative two-tori », *Journal of the American Mathematical Society*, 27(3), juillet 2014, DOI : 10.1090/S0894-0347-2014-00793-1.

Preprint

CONNES A. et CONSANI C., « The Cyclic and Epicyclic Sites », *ArXiv*, 15 juillet 2014, http://arxiv.org/abs/1407.3945.

CONNES A. et CONSANI C., « Cyclic structures and the topos of simplicial sets », *ArXiv*, 2 septembre 2013, http://arxiv.org/abs/1309.0394.

Connes A. et Consani C., « Projective geometry in characteristic one and the epicyclic category », *ArXiv*, 2 septembre 2013, http://arxiv.org/abs/1309.0406.