Théorie des jeux algorithmique

Claire Mathieu

Tout est lié

Algorithmes distribués
Réseaux de communication, réseaux sociaux
Coopération et compétition entre acteurs : théorie des jeux

Aujourd’hui

Le prix de l'anarchie
Enchères

Prix de l’anarchie : congestion de réseau routier

Choix d'itinéraires

Aller le plus vite possible de A à B
Deux itinéraires possibles
Lequel choisir ?

Plus il y a de monde dans la queue, plus on attend


4 personnes par minute
A
B
AMERICA'S 1ST THEME PARK
Knott's
6 personnes par minute

4 personnes par minute
1 personne toutes les 15 secondes
queue de 40 personnes = 10 minutes d'attente

6 personnes par minute
1 personne toutes les 10 secondes
queue de 30 personnes = 5 minutes d'attente

Si le nouvel arrivant va vers la queue la plus courte
celle-ci s'allonge
et les queues s'équilibrent naturellement

4 personnes par minute
queue de 4x personnes = x minutes d'attente

6 personnes par minute
queue de 6x personnes = x minutes d'attente

Si le nouvel arrivant va vers la queue la plus courte
celle-ci s'allonge
et les queues s'équilibrent naturellement

4 personnes par minute
queue de 40 personnes = 10 minutes d'attente

40% des arrivants

100 arrivants

A

B

60% des arrivants

6 personnes par minute
queue de 60 personnes = 10 minutes d'attente

10 minutes d'attente

40% des arrivants

100 arrivants

A

B

60% des arrivants

10 minutes d'attente

Les applications proposant un itinéraire devraient suggérer les deux itinéraires en privilégiant, comme première suggestion

- **le chemin du haut, 40% du temps**
- **le chemin du bas, 60% du temps**

par exemple avec un algorithme probabiliste

Autorité centrale
Immigration

“Allez dans la file numéro 5”

But : minimiser le temps total d’attente

Avec une autorité centrale

4 personnes par minute

queue de x personnes = x/4 minutes d'attente

x arrivants

100 arrivants

A

B

100-x arrivants

6 personnes par minute

queue de 100-x personnes = (100-x)/6 minutes d'attente

Temps d'attente total : $x^2/4 + (100-x)^2/6$

Choisir x **pour que ce soit minimum:** $x/2 - 2(100-x)/6 = 0$

$$x = 40$$

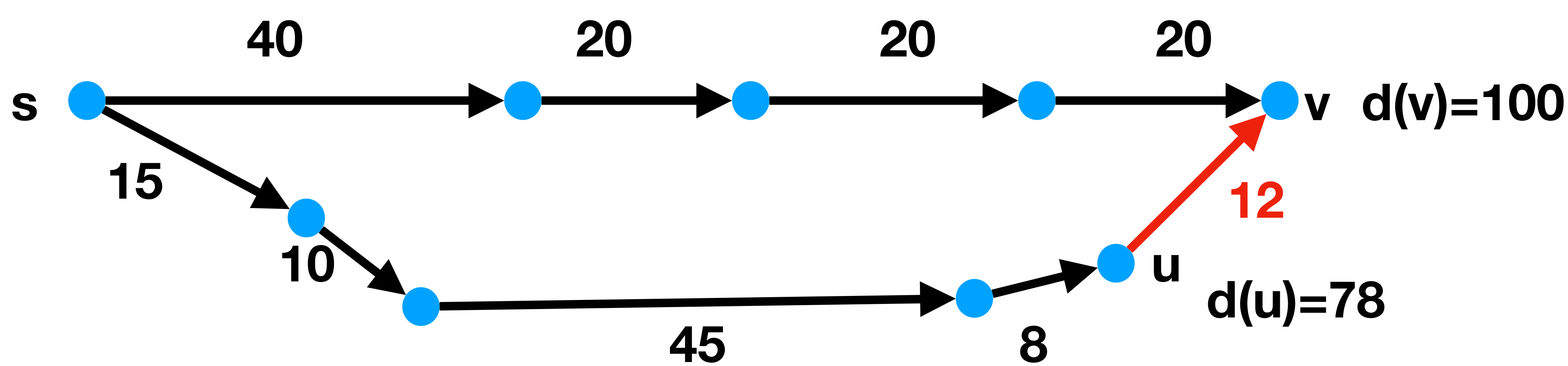
Morale :
Inutile d’avoir une autorité centrale
Il suffit que chacun aille dans la file d'attente la plus courte
— celle qui est la meilleure pour lui —
et le temps d’attente total sera minimisé

Algorithme décentralisé
Chaque usager choisit,
en fonction de la congestion courante du réseau
un chemin de s à t
pour minimiser la durée de son trajet

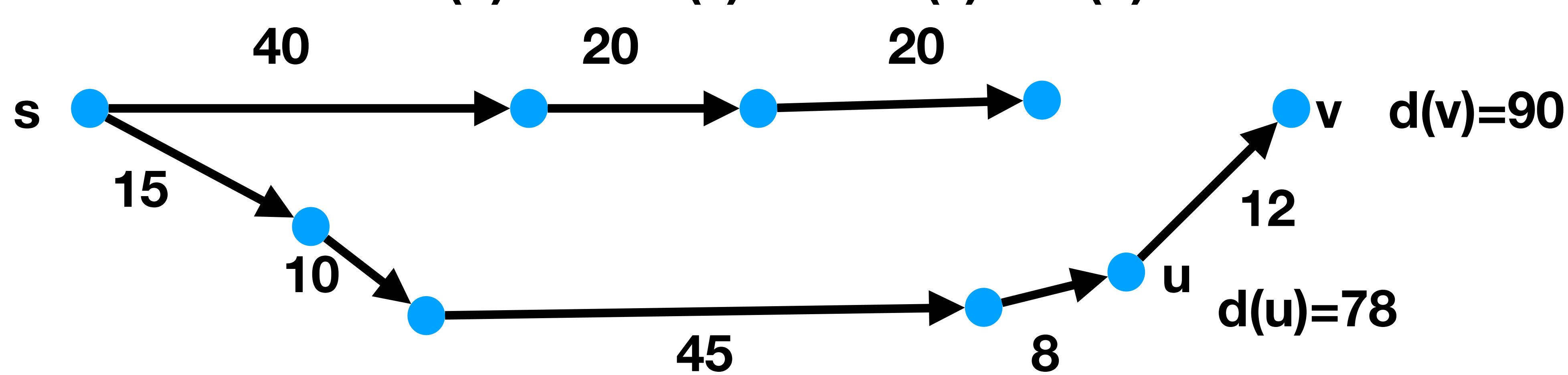
Comment calculer ce chemin ? (1/2)

d(v) = longueur du plus court chemin de s à v trouvé jusqu'à présent

brique de base :
utilisation de l'arc (u,v) pour mettre à jour d(v) :



si d(u)+12 < d(v) alors d(v) := d(u)+12



Algorithme décentralisé
Chaque usager choisit,
en fonction de la congestion courante du réseau
un chemin de s à t
pour minimiser la durée de son trajet

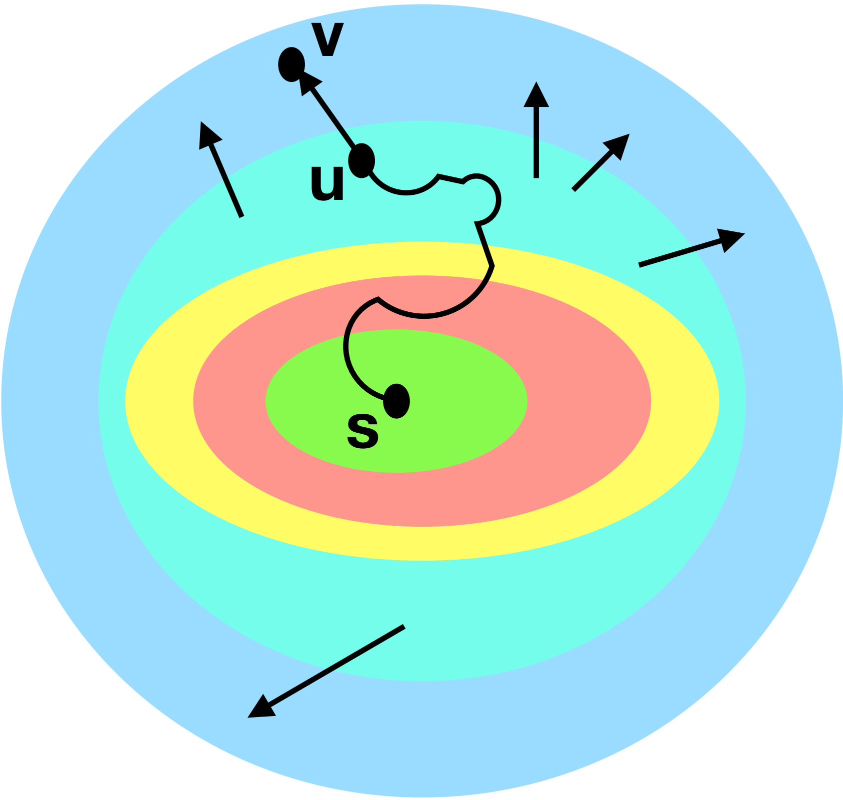
Comment calculer ce chemin ? (2/2)

d(v) = longueur du plus court chemin de s à v trouvé jusqu'à présent

brique de base :
utilisation de l'arc (u,v) pour mettre à jour d(v)

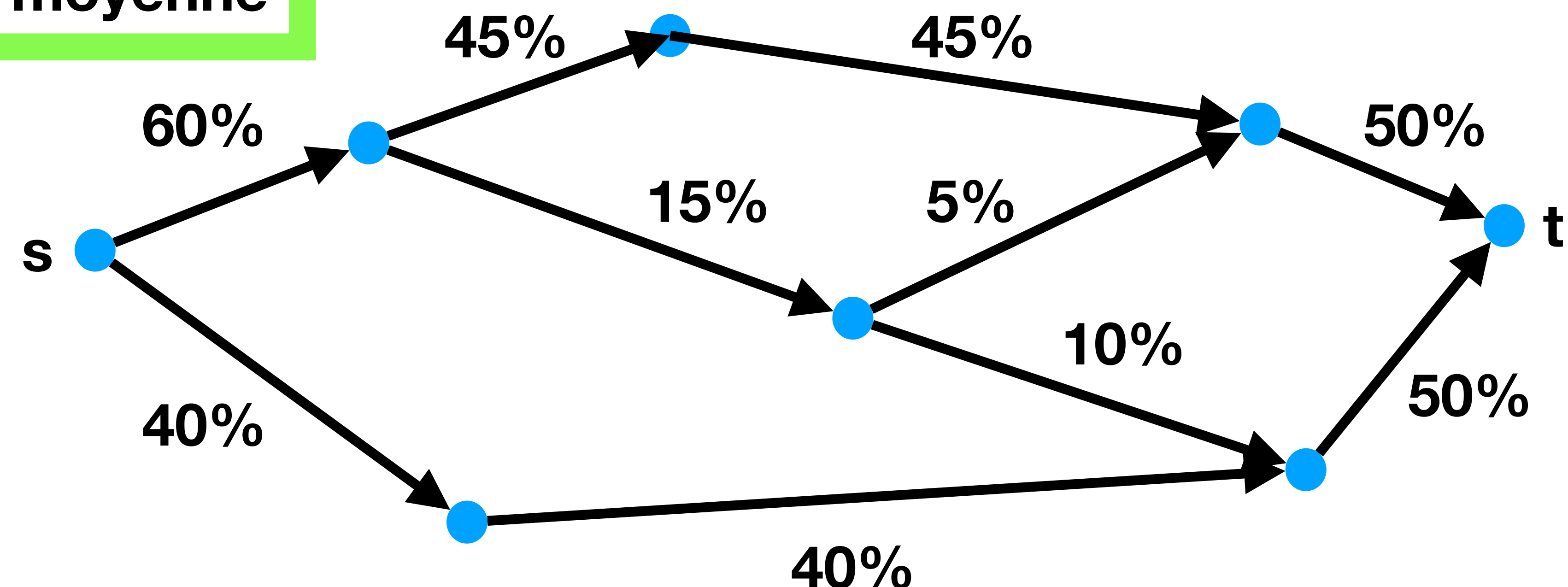
Algorithme

Initialement : d(s)=0
Calculer d(v) pour tous les sommets
de proche en proche par ordre de d(v) croissant
Résultat : d(t)



Algorithme centralisé
Les usagers sont dirigés chacun vers un chemin de s à t pour minimiser la durée totale moyenne

Comment calculer ces chemins ?



Pour tout sommet autre que s et t, ce qui arrive est égal à ce qui repart
La durée de traversée d'une arête est une fonction affine de la congestion
La durée totale est la somme des durées
Pas de nombres négatifs

Programmation linéaire : minimiser une fonction linéaire avec des contraintes linéaires

$$\min(3x+2y-4z) \text{ sachant : } \begin{cases} 2x - y & = 5 \\ 3x + y + 4z & \leq 4 \\ -x + 2z & \leq 2 \\ x & \geq 0 \end{cases}$$

On sait faire !

Inutile d’avoir une autorité centrale

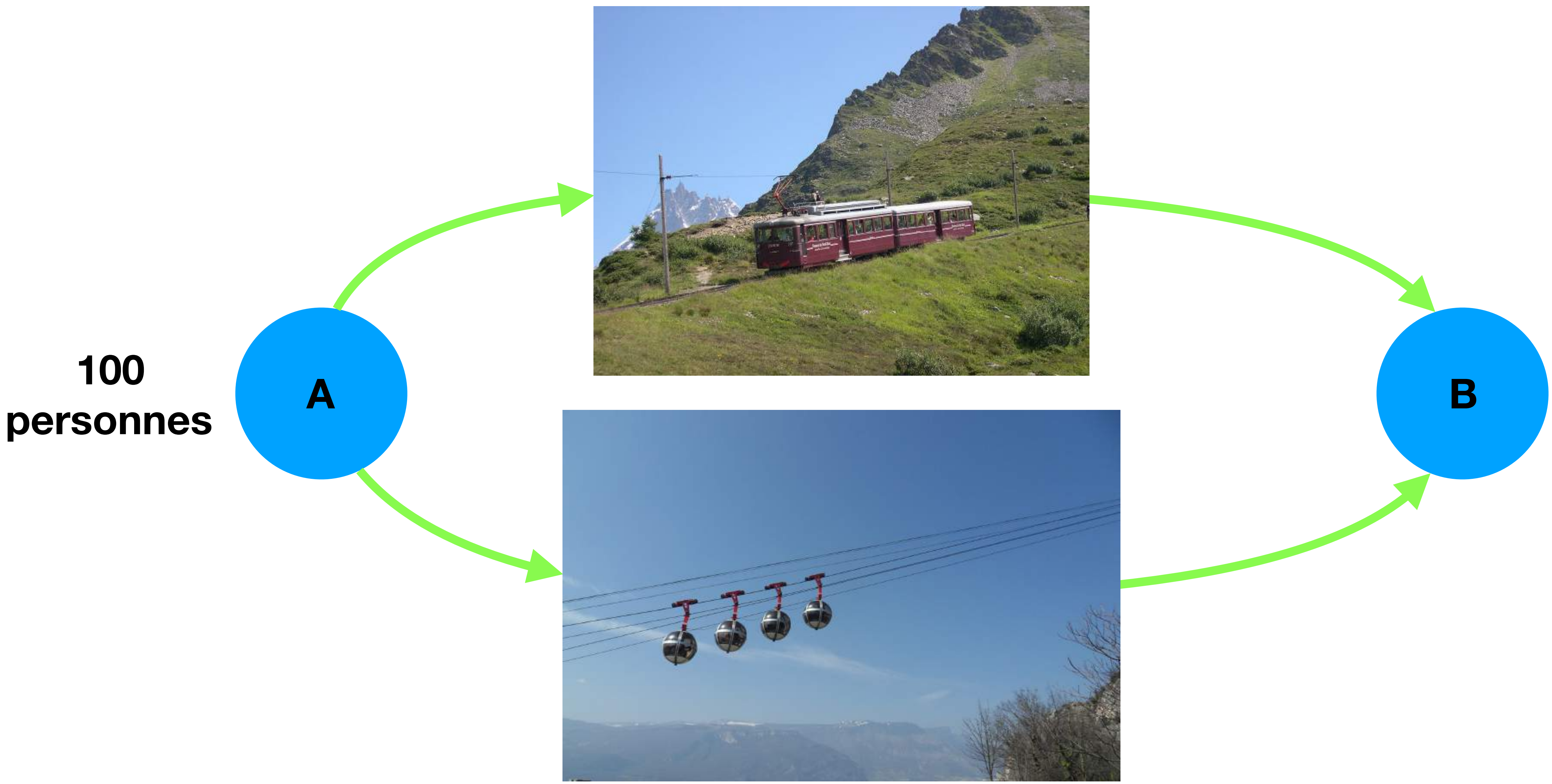
Il suffit que chacun aille dans la file d'attente la plus courte
— celle qui est la meilleure pour lui —
et le temps d’attente total sera minimisé

Morale : L’égoïsme au service du bien commun

Pour faire le meilleur choix pour la communauté,
il suffit de choisir
ce qui nous avantage le plus nous-même

Est-ce vrai en général ?

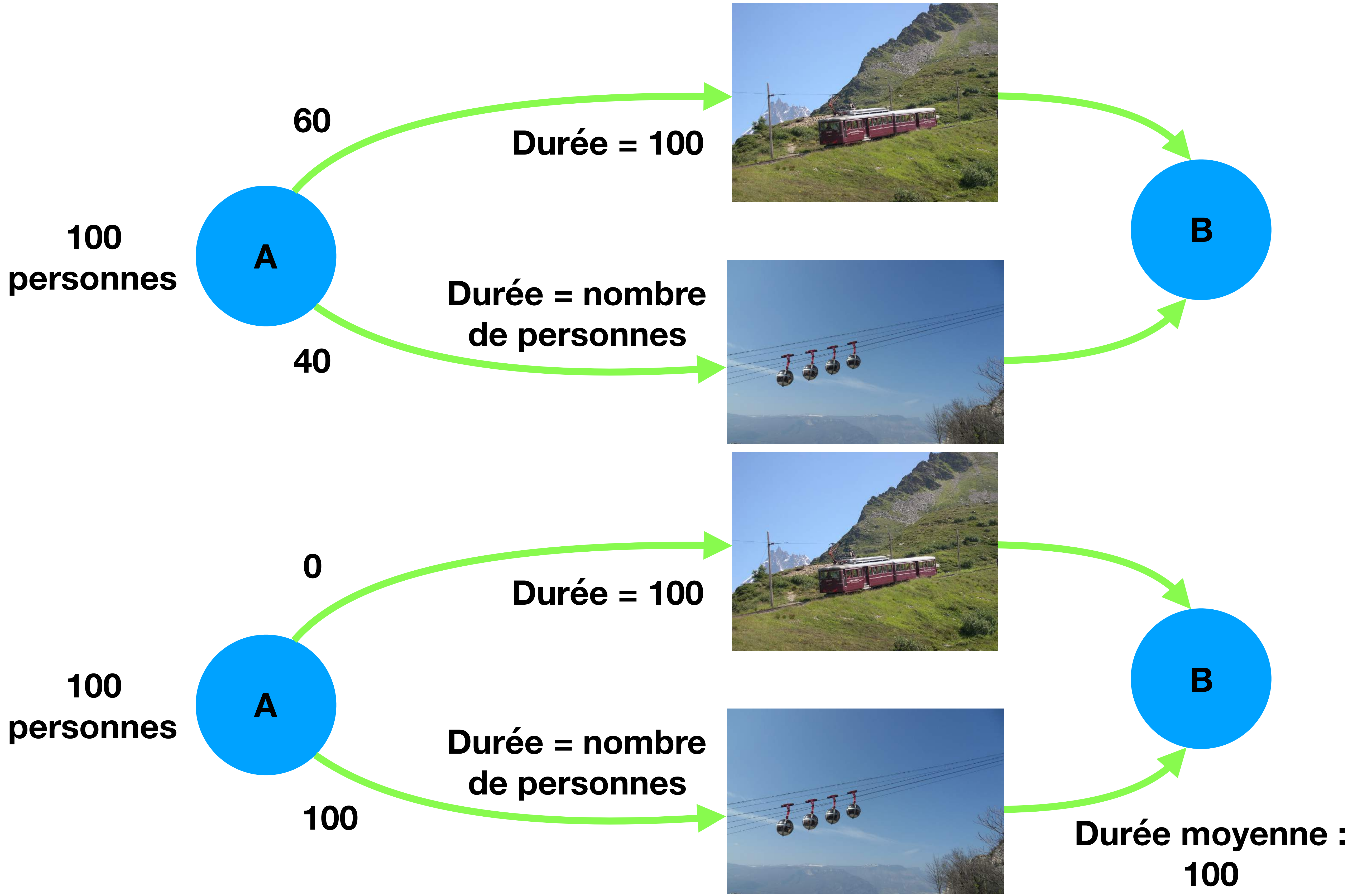
Durée = 100 quel que soit le nombre de personnes



Durée = nombre de personnes

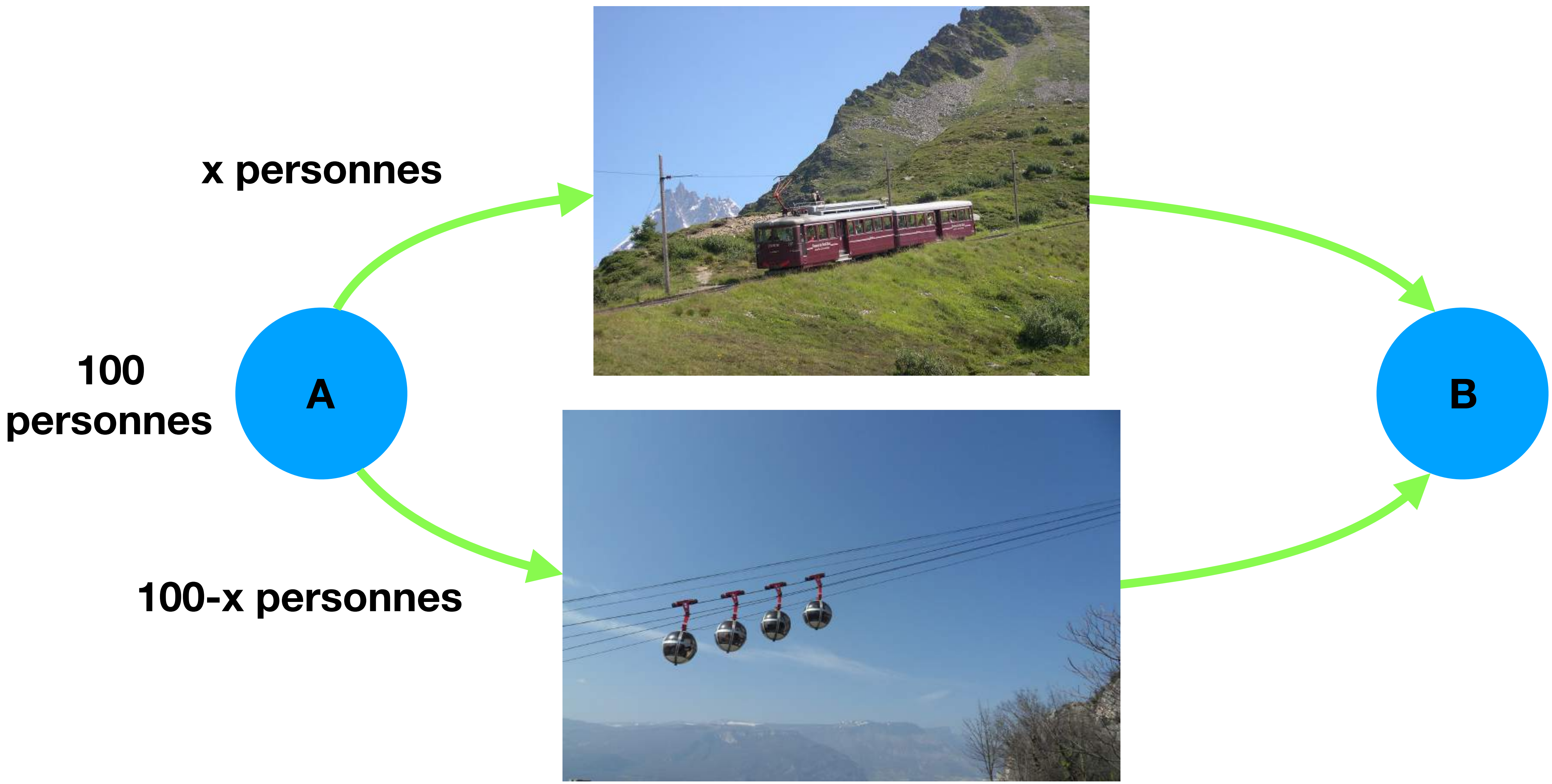
Équilibre de Nash

Équilibre si, au vu de ce que font les autres, personne ne souhaite changer son choix



Avec une autorité centrale

Durée = 100 quel que soit le nombre de personnes



Durée = nombre de personnes

Durée totale : $100x + (100 - x)^2$

On minimise : $100 - 2(100 - x) = 0$

$x = 50 \implies$ **Durée moyenne :** 75

Durée = 100

50 personnes

100 personnes

A

B

50 personnes

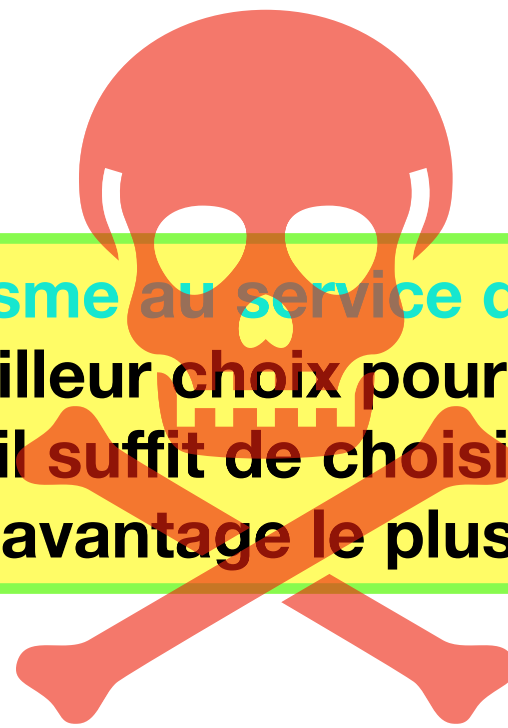
Durée = nombre de personnes = 50

Durée moyenne = 100 sans algorithme centralisé
Durée moyenne = 75 avec algorithme centralisé

Prix de l’anarchie :

$$100/75 = 4/3$$

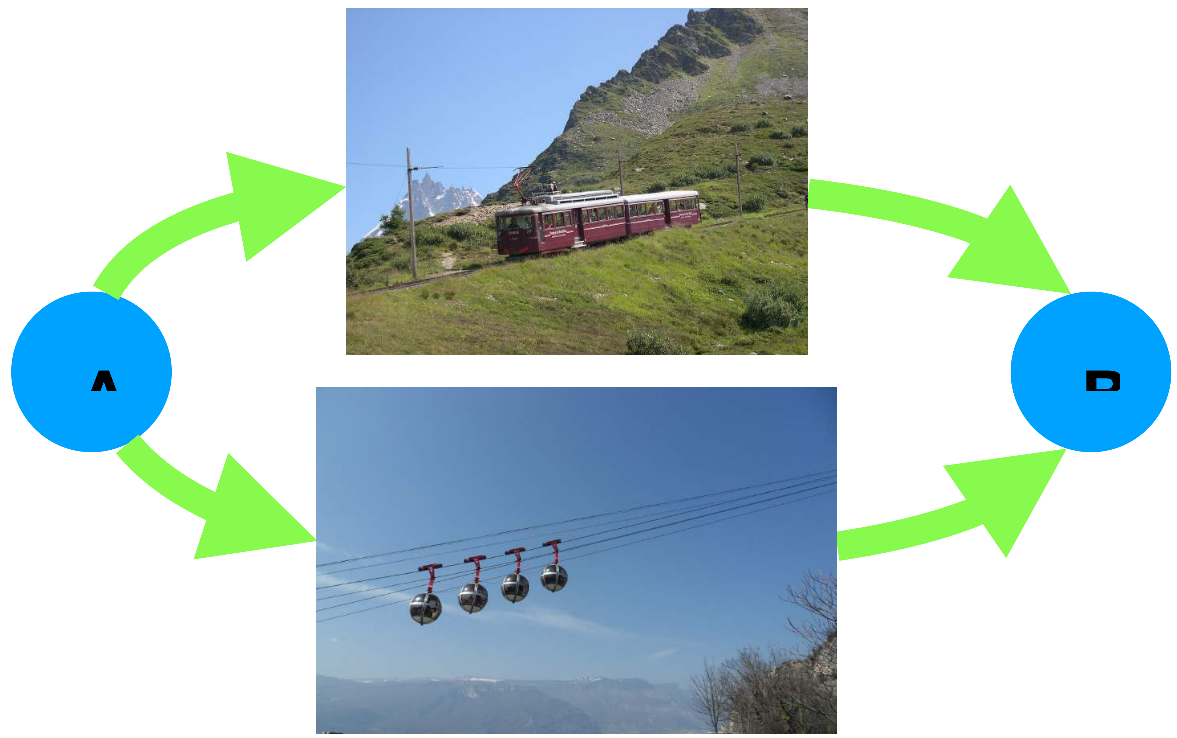
Morale :
L'autorité centrale réduit la durée moyenne de 25%



Morale : L’égoïsme au service du bien commun

**Pour faire le meilleur choix pour la communauté,
il suffit de choisir
ce qui nous avantage le plus nous-même**

Faut-il une autorité centrale ?

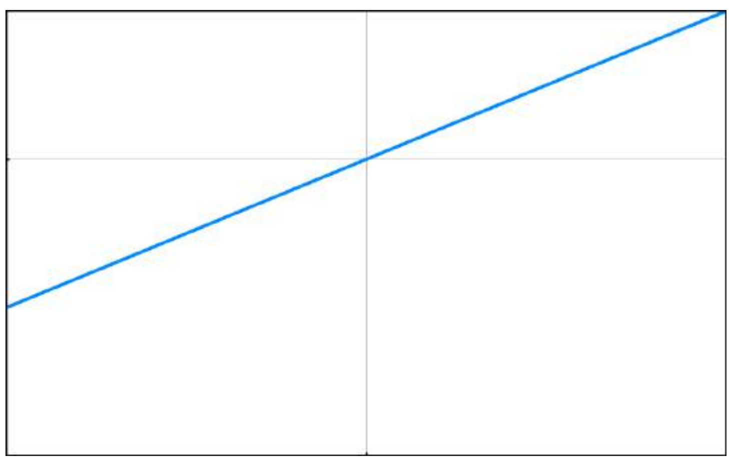


Algorithme décentralisé
Chaque usager choisit,
en fonction de la congestion courante du réseau
un chemin de s à t
pour minimiser la durée **de son trajet**

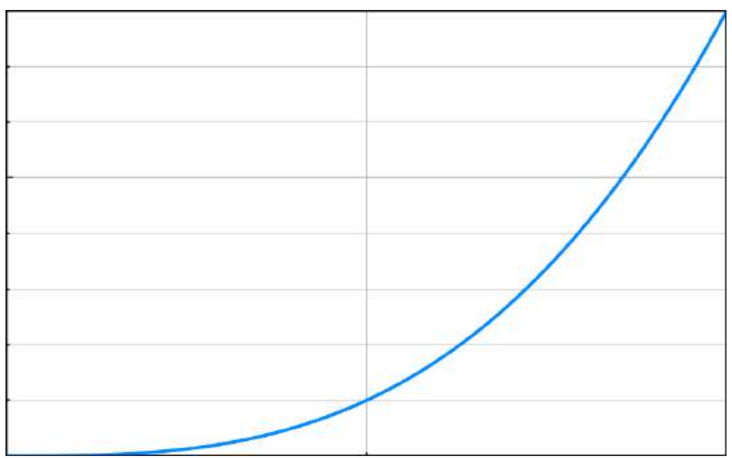
Algorithme centralisé
Les usagers sont dirigés
chacun vers un chemin de s à t
pour minimiser la durée **totale** moyenne

**Dans un réseau général,
quel est l'écart entre les deux approches
pour la durée totale de trajet ?**

Faut-il réguler les choix par une autorité centrale ?



Théorème
Si les temps de trajets sont affines :
a+bx pour x personnes
alors le pire écart entre les durées
avec ou sans autorité centrale
est de 25%



Théorème
Si les temps de trajets sont cubiques :
ax^3+bx^2+cx+d pour x personnes
alors le pire écart entre les durées
avec ou sans autorité centrale
est de 47%

Une alternative à l'autorité centrale : péages

Comment convaincre un individu de faire un choix contre son propre intérêt ?

Durée = 100 quel que soit le nombre de personnes

50 personnes

100 personnes

A

B

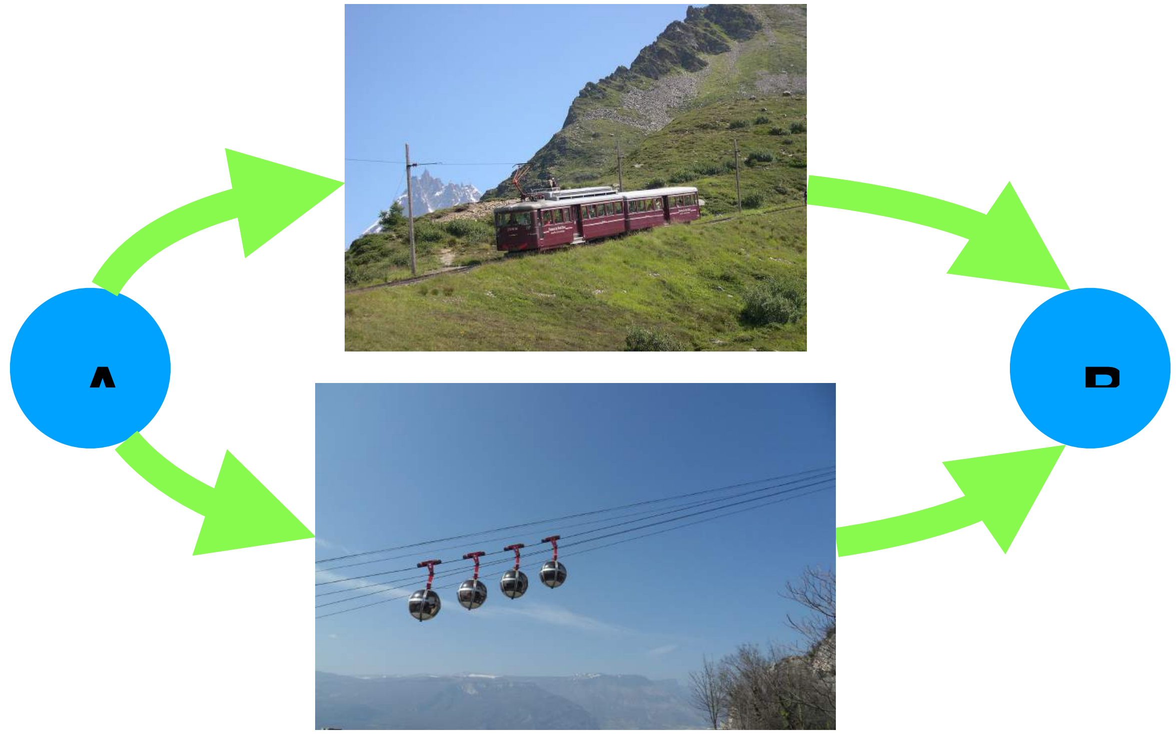
Péage

50 personnes

Durée = nombre de personnes = 50

Les péages peuvent servir de régulation pour une optimisation globale des temps de trajet

Une alternative à l’autorité centrale : grands travaux



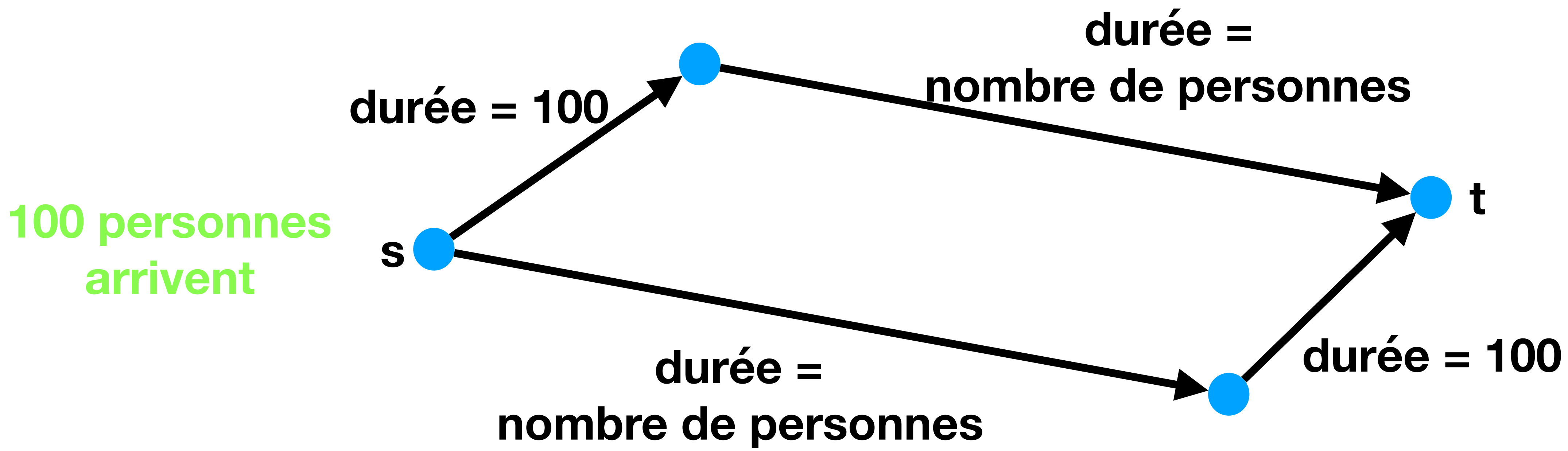
Algorithme décentralisé
Chaque usager choisit,
en fonction de la congestion courante du réseau
un chemin de s à t
pour minimiser la durée **de son trajet**

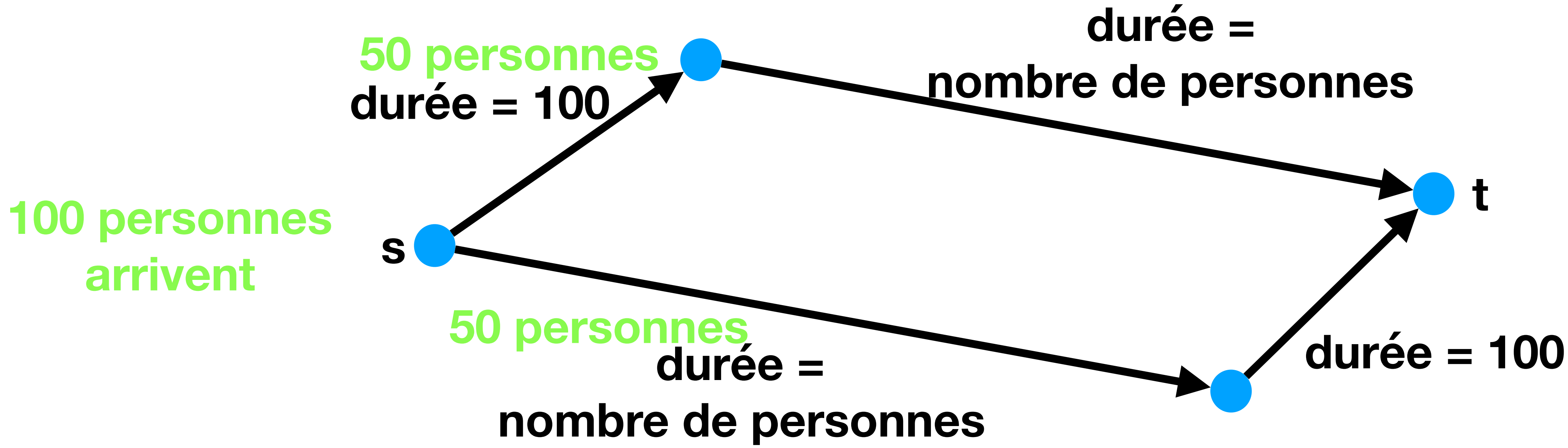
Algorithme centralisé
Les usagers sont dirigés
chacun vers un chemin de s à t
pour minimiser la durée **totale** moyenne

Théorème des grands travaux
Pour tout réseau et fonctions de délais sur les arcs :
Soit d la durée moyenne par l’algorithme centralisé.
Alors, dans le réseau où la capacité de chaque arête a été <u>doublée</u>,
l’algorithme décentralisé a durée moyenne au plus d.

Paradoxe de Braess

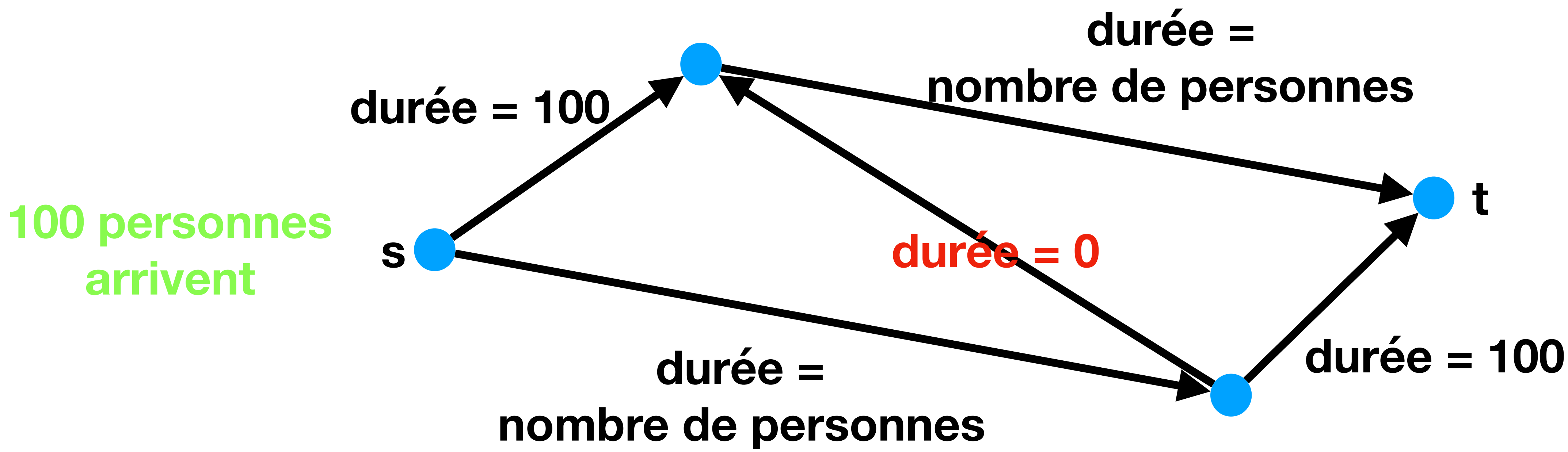
Des grands travaux mal conçus : paradoxe de Braess

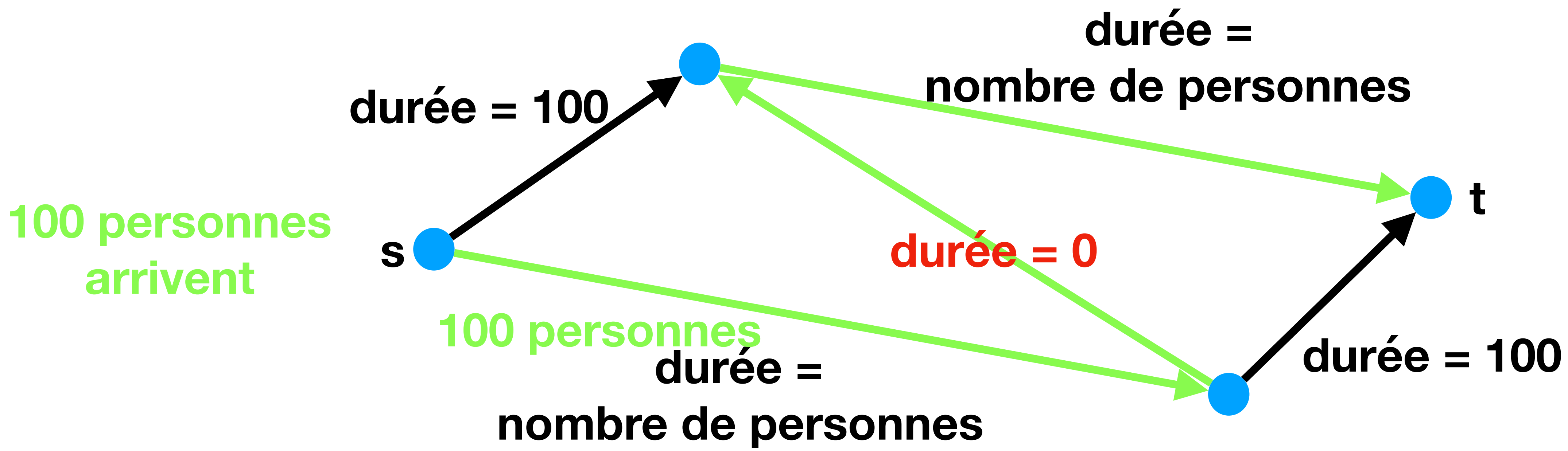




Durée totale moyenne : 150

Construction d'autoroute

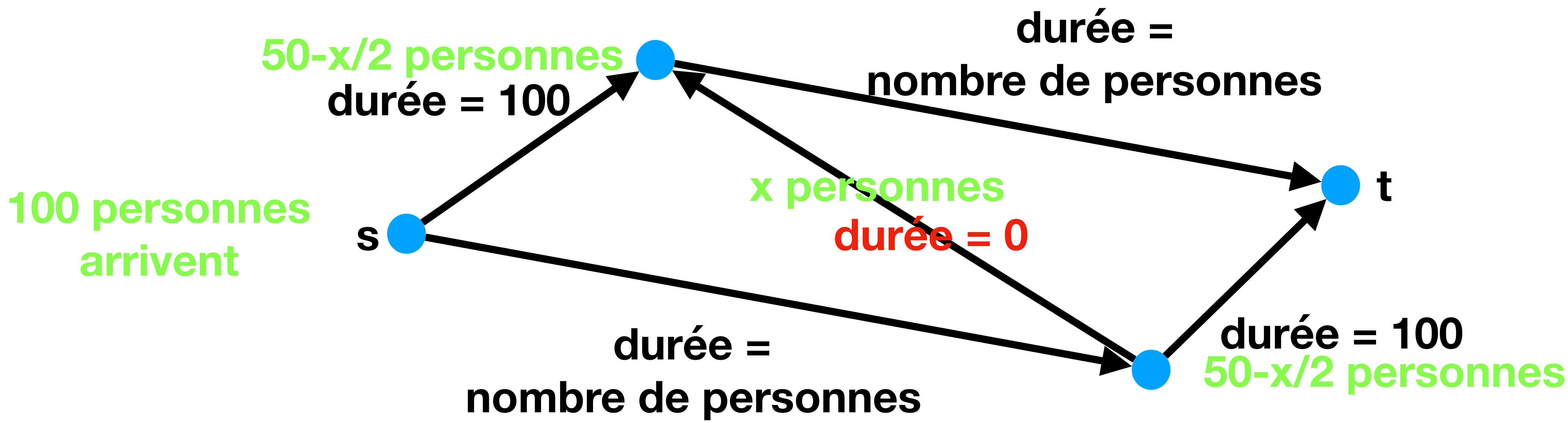




Durée totale moyenne : 200

L’autoroute a allongé la durée du trajet !

Algorithme centralisé



durée totale à minimiser

$$2(50 - x/2)(100 + 50 + x/2) + x(x + 2(150 + x/2))$$

x = 0

La meilleure solution : ne pas utiliser la nouvelle autoroute !

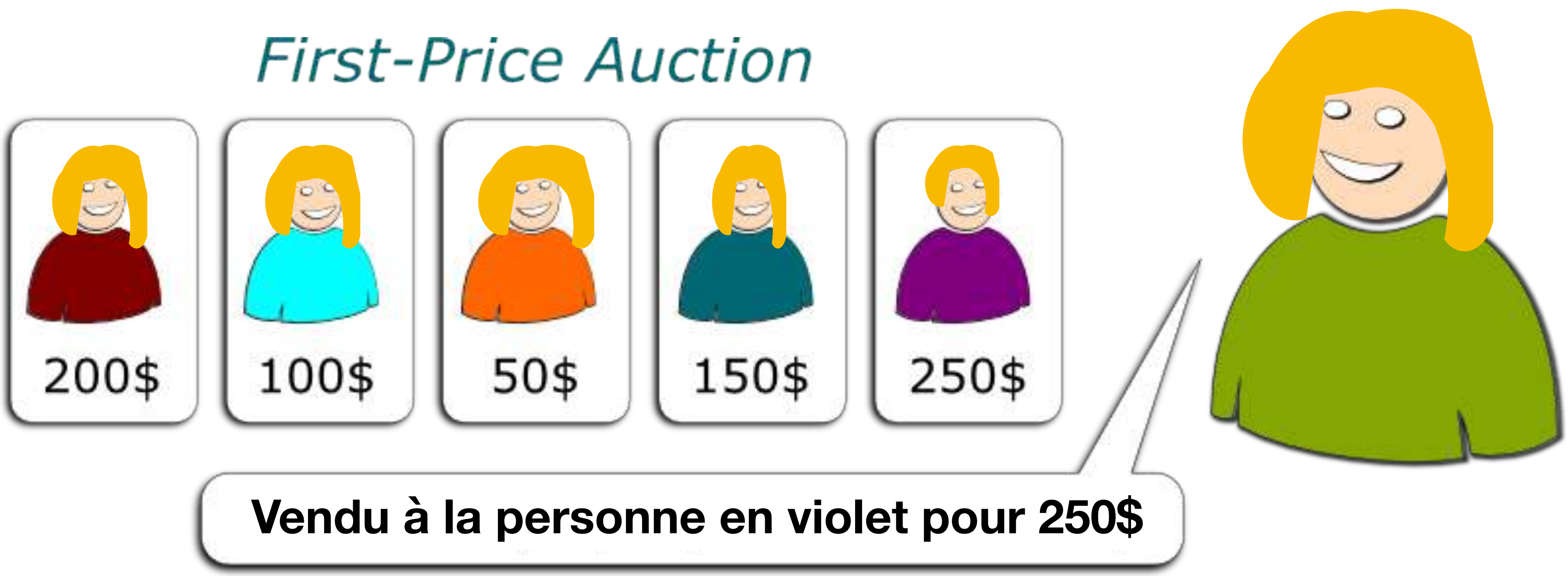
Morale :
Les routes à ajouter au réseau doivent être bien placés pour ne pas causer de congestion supplémentaire

Enchères

À qui vendre ce tableau, et à quel prix ?

À la personne à qui cela apportera le plus de joie

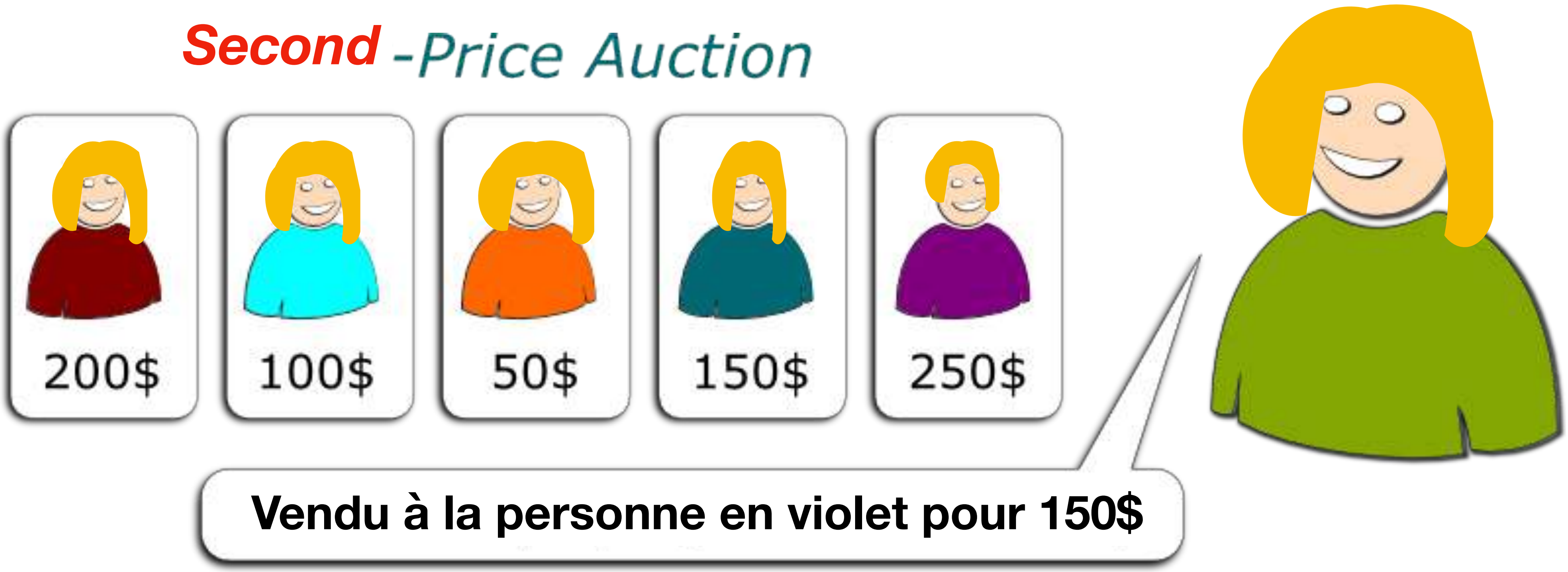
Au plus offrant, au prix qu'il a offert



"Si j'avais su, j'aurais offert seulement 160$!"

Risque de manipulations

Au plus offrant, mais au prix du deuxième plus offrant

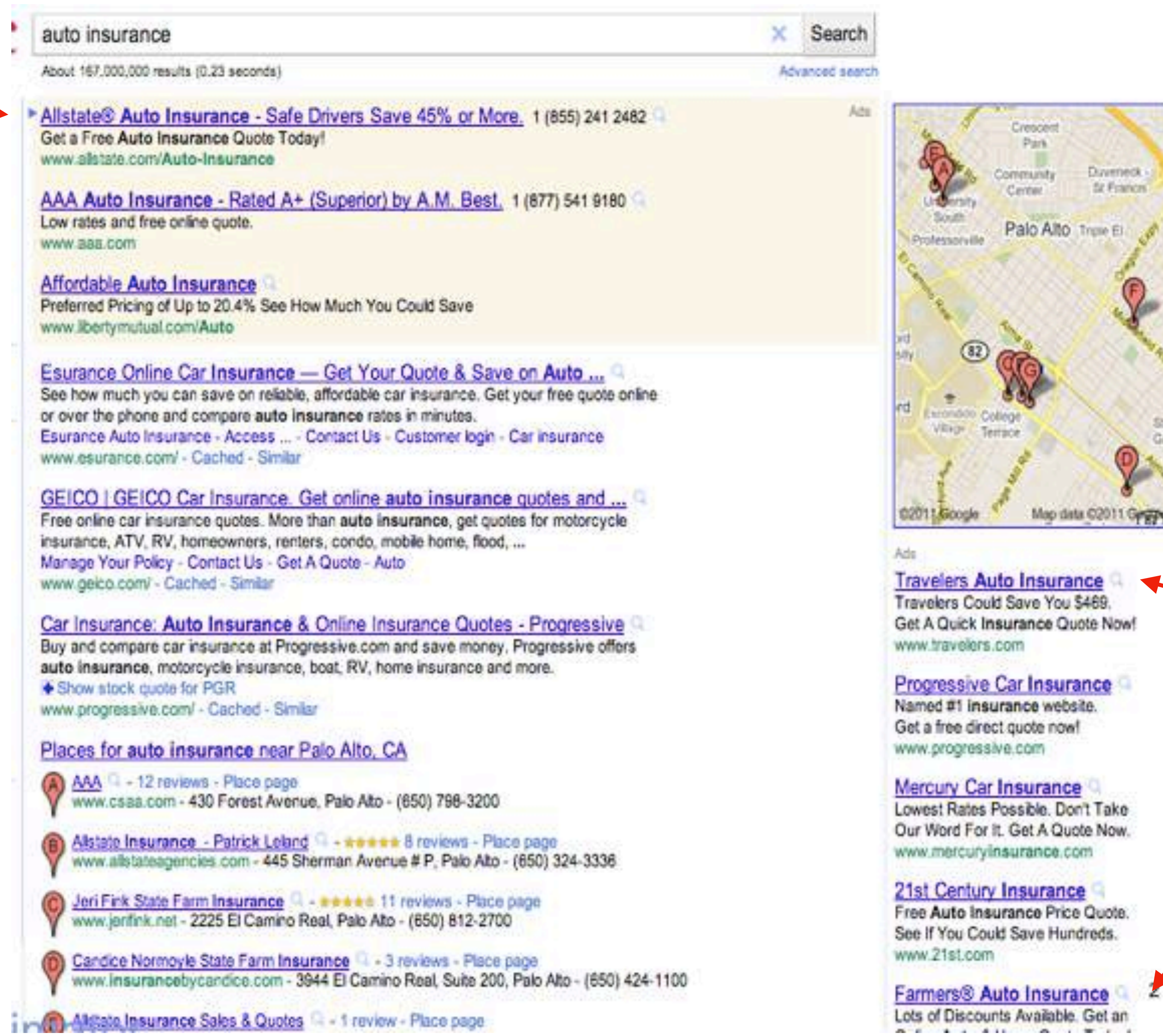


Encourage la sincérité : pas de raison de mentir sur le prix

Revient à la personne pour qui cela a le plus de valeur

Comment les moteurs de recherche peuvent-ils nous donner gratuitement les informations que nous cherchons ?

Publicités



Publicités

Publicitaire : mieux ciblé que campagne d'affiches accessible même pour les petits commerçants Revenu gagné centime par centime, clic par clic

recherche “restaurant quartier latin”

publicitaire i :
enchère de b(i) =
montant max qu’il est prêt à payer
si l’utilisateur clique sur sa publicité
valeur v(i) =
valeur de ce clic pour le restaurant

k positions pour les publicités
c(1), c(2), …, c(k) : probabilité
que l’utilisateur clique sur la position.
Valeur de la position j
pour le publicitaire i : v(i)c(j)

Valeur sociale de l’affectation : $\sum_{j=1}^{k} v(\pi_j)c(j)$

Moteur de recherche :
décide quelles publicités montrer
et combien faire payer le publicitaire
pour chaque clic

- Trier par enchères décroissantes
b(1) > b(2) > … > b(k) > b(k+1)
- Montrer publicitaire i en position i
- Faire payer b(i+1) chaque clic sur i

Cet algorithme encourage-t'il la sincérité ?

Moteur de recherche :
- Trier par enchères décroissantes
b(1) > b(2) > … > b(k) > b(k+1)
- Montrer publicitaire i en position i
- Faire payer b(i+1) chaque clic sur i

Utilité de voir sa publicité montrée pour i : $(v(i) - b(i+1))c(i)$

Exemple
k=2 positions
c(1)=11, c(2)=10
3 publicitaires
v(1)=100, b(2)=99, b(3)=1

Qu'est-ce que le publicitaire 1 devrait dire ?
b(1)=v(1)=100 : gagne la position 1, paye 99 par clic
utilité (100-99)*11 = 11 par clic
b(1)=98 : gagne la position 2, paye 1 par clic
utilité (100-1)*10 = 990 par clic

Cet algorithme n'encourage pas la sincérité.
Des stratégies sont possibles

Y a-t'il un algorithme qui encourage la sincérité ?

Moteur de recherche :
- Trier par enchères décroissantes
b(1) > b(2) > … > b(k) > b(k+1)
- Montrer publicitaire i en position i

Algorithme de Vickrey-Clarke-Groves (VCG)

Supposons que les autres soient sincères.
Coût de la participation de i pour les autres publicitaires :
Sans i, i+1 serait en position i : différence d'utilité $b(i+1)(c(i)-c(i+1))$
Au total : $\sum_{i+1}^{k+1} b(j)(c(j-1)-c(j))$

Coût pour i s'il paye p(i) pour chaque clic : $c(i)p(i)$

En égalisant les coûts :

$$p(i) = \frac{1}{c(i)} \sum_{i+1}^{k+1} b(j)(c(j-1)-c(j))$$

Théorème : cet algorithme encourage la sincérité et maximise la valeur sociale.

Utilité de i : (v(i)-p(i))c(i)

Pourquoi les moteurs de recherche n'utilisent-ils pas cet algorithme ?

Conclusion

Dans un monde distribué :

- **Les algorithmes sont conçus pour s’efforcer d'aligner les intérêts particuliers avec l’intérêt commun.**
- **Les échanges d’argent servent à orienter les choix des individus pour que les réseaux fonctionnent de façon harmonieuse.**