ANNUAIRE
du COLLÈGE DE FRANCE
2016 - 2017

Résumé des cours et travaux

117e année

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Géométrie algébrique

Claire Voisin

Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeur au Collège de France

Mots-clés : géométrie algébrique, structures de Hodge, cohomologie, cycles algébriques, variétés hyper-kählériennes, dégénérescences, espaces de modules, classes de Chern

La série de cours « Topologie des variétés algébriques » est disponible en audio et/ou en vidéo, sur le site internet du Collège de France (https://www.college-de-france.fr/site/claire-voisin/course-2016-2017.htm) ainsi que le colloque « Géométrie algébrique » (https://www.college-de-france.fr/site/claire-voisin/symposium-2016-2017.htm). La leçon inaugurale Topologie des variétés algébriques complexes est également disponible en vidéo (https://www.college-de-france.fr/site/claire-voisin/inaugural-lecture-2016-06-02-18h00.htm), et publiée par le Collège de France et Fayard sous forme papier.

Enseignement

Cours – Topologie des variétés algébriques

Introduction

La théorie de Hodge fournit les notions de « structure de Hodge », développée par Griffiths, et de « structure de Hodge mixte » introduite par Deligne. C'est un outil puissant pour étudier la topologie des (familles de) variétés algébriques complexes et ce cours en présente les principaux résultats, ainsi que certaines applications récentes. Il y a trois aspects différents de la théorie de Hodge. Le premier aspect, évoqué rapidement dans ce cours, est le recours à des méthodes d'analyse (formes harmoniques) pour montrer le théorème de décomposition de Hodge, le lemme ddbar et les théorèmes d'annulation, ainsi que le théorème de Lefschetz difficile. On en admet les résultats qui sont le point de départ de la théorie. Le deuxième aspect, développé par Deligne, est alors purement formel : il consiste à dégager puis exploiter les propriétés de la catégorie des structures de Hodge polarisées et celle de la catégorie des structures de Hodge mixtes afin de montrer des résultats profonds sur la topologie des variétés algébriques et leurs familles.

Le troisième aspect fondamental du domaine est l'interaction entre données transcendantes (topologie) et données algébriques (cycles algébriques). La théorie de Hodge, c'est-à-dire la connaissance des structures de Hodge, ou même seulement des nombres de Hodge, nous donne conjecturalement un moyen de mesurer le coniveau, c'est-à-dire la codimension du support de la partie transcendante de la cohomologie. Selon Bloch et Beilinson, celui-ci pourrait également être calculé *via* l'étude des groupes de Chow. La troisième partie de ce cours explique comment ces conjectures se formulent via la notion de « décomposition de la diagonale » et décrit quelques progrès récents.

Structures de Hodge

On part de la définition d'une structure de Hodge et de ses propriétés basiques de fonctorialité. Le cadre géométrique naturel dans lequel les structures de Hodge apparaissent est la géométrie kählérienne compacte, et les fonctorialités sont données par le tiré en arrière ou le morphisme de Gysin agissant sur la cohomologie. L'opération de cup-produit par une classe de Hodge fournit aussi un morphisme de structures de Hodge. L'existence de la décomposition de Hodge est liée à la dégénérescence en E1 de la suite spectrale de Frölicher d'une variété kählérienne compacte. On discute au passage le lien entre géométrie algébrique et géométrie analytique. Le principe GAGA de Serre a pour conséquence que la dégénérescence de la suite spectrale de Frölicher pour une variété projective est un énoncé algébrique. Une autre conséquence importante du principe GAGA est le théorème de Grothendieck calculant la cohomologie à coefficients complexes comme la cohomologie de de Rham algébrique (qui n'utilise que les formes différentielles algébriques). Cette dernière est définie sur le corps de définition de la variété, supposé inclus dans le corps des complexes.

Une notion cruciale qui donne de meilleures propriétés catégorielles aux structures de Hodge est celle de structure de Hodge polarisée. Les structures de Hodge sur la cohomologie des variétés projectives complexes sont polarisées, bien que la construction de polarisations, faisant appel à la décomposition de Lefschetz, soit assez délicate. La catégorie des structures de Hodge polarisées est semi-simple. On rappelle au passage le théorème de Kodaira, qui caractérise les variétés projectives comme étant celles admettant une classe de Kähler rationnelle. Cette partie du cours culmine avec la preuve du théorème suivant :

Théorème (Voisin, 2004) : *Il existe des variétés kählériennes compactes n'ayant pas l'algèbre de cohomologie de variétés projectives.*

Structures de Hodge mixtes

On étudie ici la notion de « structure de Hodge mixte » dégagée par Deligne. La cohomologie d'une variété algébrique (peut-être singulière, peut-être non projective) admet une structure de Hodge fonctorielle. On établit les propriétés formelles des structures de Hodge mixtes, découvertes par Deligne, à savoir l'existence d'une décomposition formelle en morceaux de type (p, q), au moins à coefficients réels. La conséquence immédiate de cette décomposition est le fait que les morphismes de structure de Hodge mixtes sont stricts pour les deux filtrations, en particulier la filtration par le poids, ce qui a de nombreuses conséquences sur la topologie des familles de variétés. La conséquence principale est le théorème global des cycles invariants, ou théorème de la partie fixe, dû à Deligne. D'autres applications de ce principe concernent la filtration par le coniveau. Par exemple, la cohomologie de coniveau géométrique c est une sous-structure Hodge de coniveau de Hodge au moins c. La conjecture de Hodge généralisée est la réciproque de ce dernier énoncé. Un énoncé remarquable obtenu en combinant ces ingrédients et le théorème d'algébricité de Cattani-Deligne-Kaplan est le théorème suivant :

Théorème : *La conjecture de Lefschetz standard entraîne la forme variationnelle de la conjecture de Hodge.*

Coniveau et cycles algébriques

Un théorème de Mumford a établi en 1968 qu'une variété est de coniveau de Hodge 1 (c'est-à-dire qu'elle n'admet pas de formes holomorphes de degré strictement positif) sous l'hypothèse de l'annulation du groupe des zéro-cycles homologues à zéro modulo équivalence rationnelle. Bloch et Srinivas ont donné en 1984 une preuve d'une version forte de ce théorème, où le coniveau de Hodge est remplacé par le coniveau géométrique. L'ingrédient-clé de Bloch et Srinivas est la notion de « décomposition de la diagonale ». Des généralisations ont ensuite été obtenues par Paranjape, Lewis, Schoen, Laterveer, montrant que la trivialité des groupes de Chow de dimension au plus c – 1 entraîne que la variété est de coniveau géométrique au moins c. La conjecture de Bloch généralisée est une réciproque à ce dernier énoncé. Le cours se termine avec la preuve du résultat suivant :

Théorème (Voisin 2013) : *La conjecture de Hodge généralisée pour une intersection complète X très générale de l'espace projectif entraîne la conjecture de Bloch généralisée pour X. Plus généralement, si une telle variété X est de coniveau géométrique c, alors ses groupes de Chow sont triviaux en dimension 0,…, c – 1.*

Colloque – Géométrie algébrique

Ce colloque inaugural a consisté en douze exposés de géométrie algébrique complexe, dont six sur le thème fondamental des espaces de modules et leur topologie ou géométrie birationnelle, l'accent étant mis sur les surfaces K3 et variétés kählériennes. Les autres thèmes évoqués ont été la géométrie projective, les aspects analytiques de la géométrie complexe, les transformations birationnelles et leur dynamique, et les propriétés fines des hypersurfaces de haut degré.

Intervenants :

Arnaud Beauville : An introduction to Ulrich bundles ;
Gavril Farkas : K3 surfaces of genus 14 via cubic fourfolds ;
Kieran O'Grady : Git versus BB compactification for the moduli space of quartic surfaces ;
Daniel Huybrechts : The global Torelli theorem for cubic fourfolds via the Jacobi ring and the derived global Torelli theorem for K3 surfaces ;
Jean-Pierre Demailly : Extension of holomorphic functions defined on non reduced analytic subvarieties ;
Serge Cantat : From birational transformations to regular automorphisms ;
Rahul Pandharipande : Tautological classes on the moduli space of K3 surfaces ;

Giulia Saccà : Intermediate jacobians and hyperkahler manifolds ;
János Kollár : Moduli of stable varieties ;
Enrico Arbarello : Polarized halphen surfaces and Du Val curves ;
Olivier Debarre : Unexpected isomorphisms between hyperkähler fourfolds ;
Robert Lazarsfeld : Measures of irrationality for hypersurfaces of large degree.

Recherche

Le premier thème de recherche de l'année 2016-2017 a été la géométrie des variétés hyper-kählériennes, qui sera l'objet du cours de l'année 2017-2018. La construction de variétés hyper-kählériennes est encore expérimentale et on ne sait pas actuellement s'il existe une infinité de modèles topologiques pour une dimension donnée. Le principal résultat des années 2000 dans ce domaine est la construction par O'Grady de deux types topologiques exotiques en dimension 6 et 10 respectivement. Le second aspect de ce problème de construction concerne la construction de familles complètes de déformations par des méthodes de géométrie algébrique. Nous avons montré en 2016 le résultat suivant, en collaboration avec Laza et Saccà :

Théorème (Laza, Saccà, Voisin, 2016) : *La fibration en jacobiennes intermédiaires d'une cubique de dimension 4 générale admet une compactification qui est une variété hyper-kählérienne. Ces variétés sont des déformations des variétés de O'Grady de dimension 10.*

La preuve que nous avons donnée de ce résultat est *ad hoc*. Elle fait appel à la géométrie pfaffienne. Nous sommes revenus sur ce type d'énoncés dans un travail en commun avec Kollar, où nous montrons le résultat suivant :

Théorème (Kollar, Laza, Saccà, Voisin, 2017) : *Si une famille de variétés projectives paramétrées par le disque a ses fibres au-dessus du disque épointé lisses hyper-kählériennes, et une fibre centrale peut-être singulière mais admettant une composante non uniréglée, alors après un changement de base, cette famille admet un modèle birationnel qui est une famille de variétés hyper-kählériennes lisses*.

On obtient comme corollaire que si la fibre centrale d'une famille comme ci-dessus a une composante de multiplicité 1 qui est birationnelle à une variété hyper-kählérienne W, alors les fibres lisses sont des déformations de W.

Le second thème de recherche a porté sur la notion de « cycle universellement défini ». Cette recherche était motivée par des travaux antérieurs et permet de donner une preuve unifiée de nombreux résultats sur les cycles tautologiques sur le schéma de Hilbert d'une surface.

Un cycle universellement sur les variétés de dimension d est la donnée pour toute famille de variétés lisses $f : X \to B$, d'un cycle Z(f) dans CH(X) satisfaisant deux axiomes : la compatibilité au changement de base et par passage à un ouvert.

Le résultat est le suivant :

Théorème (Voisin, 2017) : *Si Z est un cycle universellement défini sur les variétés de dimension d, il existe un unique polynôme P de degré pondéré d en les variables c_i, i = 1,…, d, tel que pour toute variété X sur un corps, on ait Z(X) = P(c_1(X),…, c_d(X)) dans CH(X).*

Ici Z(X) = Z(f) pour f le morphisme constant.

PUBLICATIONS

KOLLÁR J., LAZA R., SACCÀ G., VOISIN C., « Remarks on degenerations of hyper-Kähler manifolds », arXiv:1704.02731.

COLOMBO E., FARKAS G., VERRA A., VOISIN C., « Syzygies of Prym and paracanonical curves of genus 8 », *Épijournal de géométrie algébrique*, vol. 1, 2017, arXiv:1612.01026.

VOISIN C., « Hyper-Kähler compactification of the intermediate Jacobian fibration of a cubic fourfold: the twisted case », arXiv:1611.06679.

VOISIN C., « Torsion points of sections of Lagrangian torus fibrations and the Chow ring of hyper-Kähler fourfolds », arXiv:1603.04320, à paraître dans le *Duke Mathematical Journal*.

LAZA R., SACCÀ G., VOISIN C., « A hyper-Kähler compactification of the Intermediate Jacobian fibration associated to a cubic fourfold », à paraître dans *Acta Mathematica*.

VOISIN C., « On the universal CH_0 group of cubic hypersurfaces », *Journal of the European Mathematical Society*, vol. 19, nº 6, 2017, p. 1619-1653.

RANESTAD K., VOISIN C., « Variety of power sums and divisors in the moduli space of cubic fourfolds », *Documenta Mathematica*, vol. 22, 2017, p. 455-504.