Théorie des nombres

M. Don Zagier, professeur

Cours : Topologie, Combinatoire et Formes Modulaires

Le cours de cette année (et son extension prévue pour l'année prochaine) avait pour but, comme son nom l'indique, de faire le lien entre des disciplines assez hétérogènes des mathématiques où interviennent des propriétés combinatoires d'un certain type. Ces liens apparaissent souvent en relation avec la physique quantique. Les deux axes principaux sont, d'une part, le lien entre les formes modulaires et la géométrie algébrique provenant de la symétrie miroir, qui se manifeste au travers des équations différentielles de type Picard-Fuchs, et, d'autre part, le lien entre l'arithmétique et la topologie, qui se manifeste au travers des invariants quantiques des variétés hyperboliques en dimension 3 et des nœuds.

Dans cette première année on a surtout traité le premier de ces sujets. L'exemple-type du genre de relation cherchée est le lien entre les équations différentielles linéaires et les formes modulaires classiques, qui a déjà été discuté dans le cours de 2001-2002. Là on a vu que si on exprime une forme modulaire elliptique $f(z)$ de poids k entier en fonction $f(z) = F(t(z))$ d'une fonction modulaire $t(z)$, alors la fonction $F(t)$ satisfait toujours à une équation différentielle linéaire de poids $k+1$, et que cela entraîne des propriétés spéciales des coefficients du développement de $F(t)$ en série de puissances en t, un exemple célèbre en étant les coefficients d'Apéry intervenant dans sa démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$. Dans le cours de cette année on a discuté un certain nombre de spécialisations et de généralisations de ce principe, notamment aux équations différentielles liées aux variétés de Calabi-Yau de dimension 2 ou 3. On a discuté aussi deux types d'équations différentielles qui s'inscrivent dans le même cadre général mais qui sont d'un type nouveau. Dans ce résumé on ne reprendra que ces deux cas plus insolites, liés respectivement aux « formes modulaires de Teichmüller » et à une forme automorphe sur $U(1,3)$. Comme troisième thème on parlera ensuite des

« formes modulaires quantiques », une notion nouvelle liée en même temps aux formes modulaires classiques et aux invariants topologiques et quantiques. Ce dernier thème fera l'objet du cours de l'année suivante.

Formes modulaires de Teichmüller

La théorie décrite ici a été élaborée en collaboration avec Martin Möller (MPIM Bonn). On la développera autour d'un exemple explicite provenant d'un papier récent de Möller et d'Irène Bouw. Pour rendre l'exposition plus claire, on le mettra en contraste avec l'équation d'Apéry (pour $\zeta(2)$) déjà évoquée.

Cas d'Apéry. Soit a_n ($n \in \mathbb{N}$) la suite de nombres rationnels définie par la récurrence

$$(n+1)^2\, a_{n+1} = (11n^2 + 11n + 3)\, a_n + n^2\, a_{n-1}$$

avec la valeur initiale $a_0 = 1$. Alors Apéry a montré que les a_n sont des entiers (ce qui n'a rien d'évident) et qu'ils sont les dénominateurs d'une suite d'approximations rationnelles de $\zeta(2)$ dont la convergence est suffisamment rapide pour en entraîner l'irrationalité. La raison plus profonde pour cela, mise à jour par F. Beukers, est que la fonction

$$y = y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n = 1 + 3t + 19t^2 + 147t^3 + \dots,$$

qui est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\Big((t^3 + 11\,t^2 - t)\frac{dy}{dt}\Big) + (t+3)y = 0$$

(c'est la traduction de la récurrence pour les a_n), est modulaire dans le sens expliqué ci-dessus : on a $y(t(z)) = f(z)$ où

$$t(z) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{(n/5)}, \quad f(z) = \prod_{n\equiv\pm1\,(\mathrm{mod}\,5)}(1-q^n)^{-3} \prod_{n\not\equiv\pm1\,(\mathrm{mod}\,5)}(1-q^n)^2$$

sont respectivement une fonction modulaire et une forme modulaire de poids 2 sur $\Gamma_0(5)$. (Ici $q = e^{2i\pi z}$ comme d'habitude).

Cas de Bouw-Möller Soit maintenant A_n ($n \in \mathbb{N}$) la suite de nombres dans le corps quadratique réel $K = \mathbb{Q}(\sqrt{17})$ définie par la récurrence

$$(n+1)^2\, A_{n+1} = (Cn^2 + Cn + \beta_0)\, A_n + (-\,Cn^2 + \beta_1)\, A_{n-1} + (n - \tfrac{1}{2})^2\, A_{n-2}$$

$$\Big(C=\frac{1087-217\sqrt{17}}{64},\quad \beta_0=\frac{81-15\sqrt{17}}{16},\quad \beta_1=\frac{-209+23\sqrt{17}}{256}\Big)$$

avec les valeurs initiales $A_0=1$, $A_{-1}=A_{-2}=0$. Alors Bouw et Möller ont démontré en utilisant la théorie des courbes de Teichmüller (expliquée dans le cours) que les A_n sont, à des puissances de 2 près, tous des entiers algébriques dans le corps K. Cette fois aussi il y a une explication modulaire de ce fait, mais qui fait intervenir un type de formes modulaires différentes des formes classiques.

Soit $\mathcal{O}=\mathbb{Z}\Big[\frac{1+\sqrt{17}}{2}\Big]$ l'anneau des entiers de K et $\Gamma_K=\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ le groupe de Hilbert-Blumenthal classique, opérant sur le produit $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}^-$ des demi-plans complexes supérieur et inférieur par $\gamma\circ(z_1,\, z_2)=(\gamma(z_1),\, \gamma'(z_2))$, où γ' désigne le conjugué galoisien de γ. L'inclusion $K\subset\mathbb{R}$ induit une inclusion de Γ_K dans le groupe de Lie $G=\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. L'image de cette inclusion n'est pas discrète (elle le devient uniquement lorsqu'on plonge Γ_K dans $G\times G$), mais il y a un certain sous-groupe $\Gamma\subset\Gamma_K$, décrit explicitement en termes de ses générateurs, qui est discret et pour lequel il existe une application holomorphe $\phi:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}^-$ (c'est là le fait remarquable) satisfaisant à l'équation fonctionnelle non-linéaire

$$\phi(\frac{az+b}{cz+d})=\frac{a'\phi(z)+b'}{c'\phi(z)+d'}$$

(ou plus compactement $\phi\circ\gamma=\gamma'\circ\phi$) pour tout $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma$. Cette équation implique que le plongement holomorphe

$$\Phi:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}^-,\qquad \Phi(z)=(z,\,\phi(z))$$

de $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}^-$ est équivariant par rapport à Γ et qu'on a donc une application de la courbe modulaire $\mathfrak{H}/\Gamma$ dans la surface modulaire de Hilbert $X_{17}=\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}^-/\Gamma_K$. L'image de cette application est une courbe algébrique $W_{17}\subset X_{17}$, la courbe de Teichmüller.

On définit maintenant une *forme modulaire de Teichmüller* de bi-poids $(k,\,\ell)$ comme une fonction holomorphe f: $\mathfrak{H}\to\mathbb{C}$ satisfaisant à l'équation de transformation

$$f(\gamma(z))=(cz+d)^k\,(c'\,\phi(z)+d')^\ell\,f(z)$$

pour tout $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma$ et tout $z\in\mathfrak{H}$. Pour $\ell=0$ c'est la définition usuelle d'une forme modulaire (sauf que Γ n'est plus un sous-groupe arithmétique G comme dans le cas habituel), mais pour $\ell\neq0$ on a des formes modulaires non-classiques. Il s'avère que la série de puissances $y=\sum A_nt^n$ est la série reliant une forme modulaire $f(z)$ de bi-poids $(1,\,0)$ sur Γ à une fonction modulaire sur Γ, exactement comme dans le cas classique, mais pour le démontrer on est obligé de déterminer tout l'anneau bi-gradué des formes modulaires de Teichmüller de poids mixte et d'étudier les équations différentielles liées à ses éléments non-classiques aussi. Ces équations ont des particularités par rapport au cas habituel, par exemple, celle d'avoir des q-développements avec des coefficients qui sont des nombres transcendants du type α^β avec α et β dans K.

Une première application de ces résultats est que l'on obtient une description explicite de la courbe de Teichmüller W_{17} dans la surface modulaire de Hilbert-Blumenthal X_{17} (dont on connaît une description algébrique complète), le premier cas pour lequel ceci a été possible. Ce qui est plus intéressant est que l'équation différentielle dont il s'agit ici se trouve à mi-chemin entre les équations liées aux formes modulaires classiques, que nous comprenons bien, et les équations provenant de la symétrie miroir (par exemple, dans le cas célèbre de la quintique), que nous ne comprenons pas du tout du point de vue arithmétique. Le fait que l'on ait réussi à donner une interprétation modulaire de ces équations de Picard-Fuchs, en utilisant une notion généralisée de forme modulaire, peut nous donner l'espoir de trouver des interprétations analogues dans le cas des équations liées aux variétés de Calabi-Yau auxquelles on s'intéresse dans la physique.

Une forme automorphe de Picard

Notre deuxième exemple est d'une nature très différente. On sait que les formes modulaires classiques satisfont, non seulement à une équation linéaire (d'ordre $k+1$, k étant le poids de la forme) quand on les exprime localement en termes d'une fonction modulaire, mais aussi à une équation non-linéaire (d'ordre 3, quel que soit le poids de la forme) par rapport à la variable originale $z \in \mathfrak{H}$, le prototype étant l'équation de Chazy à laquelle satisfait la série d'Eisenstein quasimodulaire $E_2(z)$ de poids 2 sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Ici on a un exemple beaucoup plus sophistiqué du même phénomène. Le point de départ est un système remarquable de 15 équations différentielles non-linéaires découvert par Ferapontov, Khusnutdinova et Tsarev comme la condition d'intégrabilité (par la méthode dite des réductions hydrodynamiques) des équations d'Euler-Lagrange associées à une certaine densité de Lagrange. Ces équations expriment les 15 dérivées d'ordre 4 d'une fonction $f(x, y, z)$ de 3 variables complexes en termes des 20 dérivées d'ordre ≤ 3 de la même fonction. Puisqu'en les différentiant on obtient également des expressions pour toutes les dérivées d'ordre supérieur en termes de ces mêmes 20 valeurs initiales, on voit que la fonction f est déterminée dans le voisinage d'un point générique (tout d'abord comme série formelle, mais ensuite comme fonction holomorphe) par 20 nombres complexes, c'est-à-dire, que l'espace de modules des solutions est une variété complexe $\mathcal{S}$ de dimension 20. Une observation clé, due à Ferapontov et Odesskii, est que le système d'équations différentielles, et par conséquence aussi la variété $\mathcal{S}$, admettent un groupe de symétries G, isomorphe à $\mathrm{GL}(4, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^4$, de la même dimension 20. On s'attend donc à ce que toutes les solutions, du moins génériquement, se déduisent d'une seule à l'aide de l'opération de ce groupe de symétries, et le but est alors de trouver une solution spéciale F qui n'est pas stabilisée par un sous-groupe de Lie de G de dimension > 0.

Un candidat pour une telle fonction a été donné par Ferapontov et Odesskii. C'est cette fonction qui s'avère être automorphe (dans un sens convenable) par rapport à un certain groupe de Picard, à savoir $\Gamma = U(1,3\,;\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, opérant sur le domaine 3-dimensionnel

$$\mathbb{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3| \ , \ \ |x|^2 + |y|^2 < 2\sqrt{3}\,\Im(z)\}.$$

La démonstration des propriétés automorphes est indirecte et assez amusante. On en indique ici juste les pas principaux.

La fonction de Ferapontov et Odesskii est définie par

$$F(x,y,z) = \sum_{\lambda\in\mathcal{O}} \lambda^{-2}\,\Phi(\lambda x)\,\Phi(\lambda y)\,q^{\mathbf{N}(\lambda)} \qquad \big((x,y,z)\in\mathbb{D}\big),$$

où $q = \mathbf{e}(z) := e^{2i\pi z}$, $\mathbf{N}(\lambda) = \lambda\bar{\lambda}$ est la norme dans $\mathcal{O}$, et Φ est la fonction entière

$$\Phi(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-8}{m}\right)\mathbf{e}\left(\frac{m^2\sqrt{-3}}{16} + \frac{mz}{2} + \frac{z^2}{2\sqrt{-3}}\right).$$

(Pour $\lambda = 0$ il faut remplacer le terme correspondant de la série définissant F par sa valeur limite $\Phi'(0)^2 xy$.) En utilisant la formule de Poisson pour Φ ainsi que les symétries évidentes, on voit aisément que la fonction F a les propriétés de transformation suivantes :

$$F(y,x,z) = F(x,y,z), \quad F(x,y,z+1) = F(x,y,z), \quad F(\varepsilon x,y,z) = \varepsilon F(x,y,z),$$
$$F(x+\nu,y,z) - (\bar{\nu}x + \varepsilon\nu\bar{\nu})/\sqrt{-3}) = F(x,y,z) + \Phi'(0)^2\nu y \quad (\forall\ \nu\in\mathcal{O}),$$

où $\varepsilon = (1+\sqrt{-3})/2$. D'autre part, si on note par α_j le coefficient de z^j dans le développement de Taylor de $\Phi(z)$ en $z = 0$ (qui s'annule sauf pour $j \equiv 1 \pmod 6$), on trouve le développement :

$$F(x,y,z) = \sum_{i,j\geq 0} \alpha_i\,\alpha_j\,x^i\,y^j\,\Theta_{i+j-2}(z),$$

où $\Theta_n(z)$ (qui s'annule pour n non divisible par 6) est la série thêta classique

$$\Theta_n(z) = \sum_{\lambda\in\mathcal{O}} \lambda^n\,q^{N(\lambda)}.$$

La formule de Poisson appliquée à ces séries thêta nous donne la formule de transformation supplémentaire

$$\frac{z\sqrt{3}}{i}\,F\left(\frac{ix}{z\sqrt{3}}, \frac{iy}{z\sqrt{3}}, \frac{-1}{3z}\right) = F(x,y,z)\,.$$

Mais ces propriétés d'invariance ne suffisent pas pour montrer l'automorphie de F : il manque encore un générateur du groupe Γ.

Pour la trouver, on utilise les résultats obtenus il y a quelques années avec F. Rodriguez Villegas et exposés dans le cours de l'année 2001-2002. Ces résultats impliquent que les coefficients de Taylor α_j sont donnés par $\alpha_j = c_0 A_j c_1^j / j!$ avec $c_0 = 3^{5/24}\Gamma(\frac{1}{3})^{3/2} i/2\pi$, $c_1 = 3^{1/6}\Gamma(\frac{1}{3})^3/2\pi$, où les A_j sont des entiers donnés par un algorithme récursif élémentaire, dont les premières valeurs sont

j	1	7	13	19	25	31
A_j	1	– 2	– 24	4416	297600	314599680

D'autre part, les coefficients de Taylor « canoniques » (voir le résumé du cours cité) autour du point $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}$ sont donnés par le développement

$$\frac{1}{(1-Z)^{n+1}}\Theta_n\left(\frac{z_0 - \bar{z}_0 Z}{1-Z}\right) = c_2^{n+1}\sum_{k\geq 0} A_k\, A_{k+n}\,\frac{(c_3\, Z)^k}{k!}$$

avec $c_2 = 3^{2/3}\Gamma(\frac{1}{3})^3/4\pi^2$, $c_3 = 3^{5/6}\Gamma(\frac{1}{3})^6/8\pi^3$ et avec *les mêmes coefficients* A_k que pour la fonction Φ. Il s'ensuit qu'on a l'identité

$$\begin{aligned}(1-Z)\,F\Big(\frac{X}{1-Z},\frac{Y}{1-Z},\frac{z_0-\bar{z}_0\,Z}{1-Z}\Big)\\ = \frac{c_0^2}{c_2}\sum_{i,j,k\geq 0} A_i\, A_j\, A_k\, A_{i+j+k-2}\,\frac{(c_3\,X)^i\,(c_3\,Y)^j\,(c_3\,Z)^k}{i!\,j!\,k!}\end{aligned}$$

et la symétrie de cette dernière expression par rapport aux variables X et Z nous livre l'automorphie de F pour le dernier générateur du groupe de Picard Γ.

Formes modulaires quantiques

Une forme modulaire classique, comme on le sait, est une fonction holomorphe f dans le demi-plan de Poincaré qui satisfait à l'équation de transformation

$$(f|_k\,\gamma)(z)\ :=\ (cz+d)^{-k}\ f(\frac{az+b}{cz+d}) = f(z)$$

pour tout $z \in \mathfrak{H}$ et toute matrice $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ (où $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ou un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ d'indice fini) ainsi qu'à certaines conditions de croissance quand z tend vers une pointe (point rationnel ou ∞). Dans les dernières années, un autre type d'objet modulaire est apparu auquel – puisqu'il a plusieurs caractéristiques typiques des objets provenant de la théorie quantique perturbative des champs, et puisque plusieurs des exemples les plus intéressants sont liés aux invariants quantiques en topologie – on donne le nom de *formes modulaires quantiques*. Il s'agit de fonctions qui, à la différence des formes modulaires classiques, ont leur existence uniquement dans les pointes (ou dans un voisinage infitésimal des pointes). Une telle fonction sera donc une fonction f à valeurs complexes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, ou plus généralement sur

$\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \smallsetminus S$ pour un sous-ensemble fini $S \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, ayant un certain comportement par rapport à l'action de Γ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

On ne peut bien sûr pas demander de cette fonction qu'elle soit analytique, ou même continue (il convient d'ailleurs de penser à $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ comme étant muni de la topologie discrète plutôt que de celle induite par l'inclusion dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, et dans ce cas-là l'exigence de continuité n'a aucun contenu) ; et ça n'a pas de sens non plus de demander l'égalité entre f et $f|_k\gamma$, puisque le groupe Γ opère transitivement ou avec un nombre fini d'orbites sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ et cette invariance impliquerait la trivialité de la fonction cherchée. On demande plutôt que la non-continuité ou non-analycité de f compense précisément sa non-invariance. En d'autres mots, notre forme modulaire quantique devrait être une fonction $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ pour laquelle la fonction $h_\gamma\colon \mathbb{Q} \smallsetminus \{\gamma^{-1}(\infty)\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$h_\gamma(x) = f(x) - (f|_k\gamma)(x)$$

possède quelque propriété de continuité ou d'analyticité (la définition précise dépendra de la situation donnée) pour tout élément $\gamma \in \Gamma$.

On notera la nature cohomologique de cette définition. Désignons par V_0 l'espace de toutes les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ définies sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ ou sur le complément d'un ensemble fini de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, et par V_1 le sous-espace des fonctions qui sont continues ou analytiques (d'après le cas) par morceaux pour la topologie réelle, avec l'opération $f \mapsto f|\gamma = f|_k\gamma$ de Γ dans les deux cas. Alors, dire que la différence $h_\gamma = f - f|\gamma$ soit continue ou analytique pour tout $\gamma \in \Gamma$ revient à dire que la fonction f elle-même, vue comme un élément du quotient V_0/V_1, est invariante par rapport à l'opération de Γ sur le dernier ; l'application $h : \Gamma \to V_1$ qui envoie γ sur h_γ est un cocycle et sa classe $[h]$ en $H^1(\Gamma, V_1)$ est l'image de la classe $[f]$ de f dans $(V_0/V_1)^\Gamma = H^0(\Gamma; V_0/V_1)$ par rapport à l'application canonique $H^0(\Gamma; V_0/V_1) \to H^1(\Gamma; V_1)$ associée à la suite exacte courte $0 \to V_1 \to V_0 \to V_0/V_1 \to 0$. Ce point de vue homologique, étroitement lié à la théorie des périodes des formes modulaires (v. résumés des cours des années 2002-2004), s'avère dans certains contextes très fructueux et sera repris dans un cours ultérieur.

Dans le cours on a donné plusieurs exemples de formes modulaires quantiques. Ici on en discutera deux, un qui est lié aux formes modulaires dans le sens traditionnel (mais de Maass, non holomorphes) et l'autre provenant de la topologie.

Exemple 1. On considère la fonction q-hypergéométrique suivante, extraite du « Cahier Perdu » de Ramanujan :

$$\sigma(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(1+q)(1+q^2)\dots(1+q^n)} = 1 + q - q^2 + 2q^3 - 2q^4 + q^5 + \dots$$

Cette fonction a été l'objet d'études profondes et très belles de George Andrews, Freeman Dyson, Dean Hickerson et Henri Cohen, qui ont dégagé son lien avec des séries thêtas associées aux formes quadratiques binaires indéfinies $x^2 - 2y^2$, $x^2 - 3y^2$ et $x^2 - 6y^2$ et à une forme modulaire de Maass de poids 0 et valeur propre 1/4 par rapport au Laplacien hyperbolique pour le groupe $\Gamma_0(2)$.

Une propriété apparemment très différente (mais en réalité fortement liée) à celles-ci est que la fonction $\sigma(q)$ a une valeur bien définie quand q tend vers une racine de l'unité. C'est une conséquence de l'identité suivante, également due à Henri Cohen :

$$\sigma(q) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, q^{n+1} \, (1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^n) \;,$$

dans laquelle le membre de droite est une série finie (et donc *a fortiori* convergente) quand q est une racine de l'unité. Cela nous donne la possibilité de définir une fonction sur les nombres rationnels en posant

$$f(x) = e^{i\pi x/12}\, \sigma(e^{2i\pi x}) \qquad (x \in \mathbb{Q}).$$

C'est là notre forme modulaire quantique : bien que n'ayant elle-même aucune propriété de continuité ou d'analyticité, elle satisfait aux équations de transformations

$$f(x+1) = e^{i\pi/12}\, f(x), \qquad \frac{1}{2x+1}\, f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = e^{i\pi/12}\, f(x) + h(x)$$

par rapport aux générateurs $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x/(2x+1)$ du groupe $\Gamma_0(2)$, où h est une fonction *analytique* sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{-\frac{1}{2}\}$. Le contenu de cet énoncé, qui pourrait au premier abord paraître peu clair, le devient beaucoup plus si l'on regarde les graphes des fonctions $f(x)$ (ou plutôt de sa partie réelle, la partie imaginaire étant tout à fait semblable) et $h(x)$:

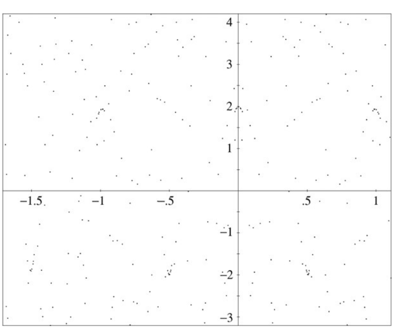

Figure 1 : Graphe de $\Re(f(x))$

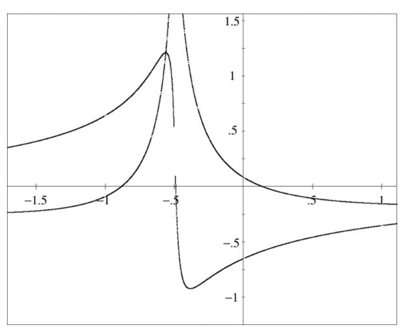

Figure 2 : Graphe de $\Re(h(x))$ et $\Im(h(x))$

La démonstration utilise le lien évoqué ci-dessus entre f et une forme de Maass, ainsi que la théorie des périodes des formes de Maass, élaborée avec J. Lewis, qui a été présentée dans le cours de 2003-2004.

Exemple 2 : Notre deuxième exemple, qui vient de la topologie, est beaucoup plus mystérieuse dans la mesure où même le cocycle associé à la « forme modulaire quantique » n'est pas continu ou lisse, mais seulement « plus continu et plus lisse » que cette forme elle-même.

À chaque nœud et à chaque entier $n \geq 2$ on associe un polynôme de Laurent $J_n(q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, appellé le « polynôme de Jones n-coloré ». (Sa définition à partir de la théorie des représentations des groupes quantiques ne joue pas de rôle ici.) Nous considérons ces polynômes pour le nœud hyperbolique le plus simple (nœud de huit, numéroté 4_1 dans la classification standard), où ils sont donnés par la formule simple

$$J_n(q) = \sum_{m=0}^{n-1} q^{-mn} \prod_{j=1}^{m} (1-q^{n-j})(1-q^{n+j}),$$

par exemple $J_2(q) = q^2 - q + 1 - q^{-1} + q^{-2}$. Si q est une racine de l'unité, $q^N = 1$, alors les valeurs des polynômes ne dépendent que de n (mod N) et on peut définir un nombre $J_0(q) \in \mathbb{Z}[q]$ comme la valeur de $J_n(q)$ pour n'importe quel n divisible par N. Le comportement de cette fonction J_0 est très différent de celui des polynômes J_n eux-mêmes ; par exemple, les valeurs de $J_n(\zeta_N)$ pour $\zeta_N = e^{2i\pi/N}$ avec $0 < n < N \leq 300$ ne dépassent jamais 25 en valeur absolue, tandis que la valeur de $J_0(\zeta_N) = J_N(\zeta_N)$ vaut $8{,}2 \times 10^{16}$, $2{,}5 \times 10^{31}$ et $4{,}9 \times 10^{45}$ pour $N = 100$, 200 et 300, respectivement. Les premières valeurs de la fonction J_0 sont données par la table suivante :

q	1	-1	$\zeta_3^{\pm 1}$	$\pm i$	$\zeta_5^{\pm 1}$	$\zeta_5^{\pm 2}$	$\zeta_6^{\pm 1}$
$J_0(q)$	1	5	13	27	$46+2\sqrt{5}$	$46-2\sqrt{5}$	89

Le comportement asymptotique de $J_0(q)$ pour $q = \zeta_N$ avec $N \to \infty$ est connu : on a

$$J_0(e^{2\pi i/N}) \sim \frac{1}{3^{1/4}} N^{3/2} e^{CN} \left(1 + \frac{11}{36\sqrt{3}} \frac{\pi}{N} + \frac{697}{7776} \frac{\pi^2}{N^2} + \frac{724351}{4199040\sqrt{3}} \frac{\pi^3}{N^3} + \dots\right),$$

où le facteur en parenthèses est une série de puissances en $\pi/N\sqrt{3}$ à coefficients rationnels. (Dans le papier avec Dimofte, Gukov et Lenells cité ci-dessous on conjecture un développement analogue pour un nœud hyperbolique arbitraire avec les coefficients de la série en $i\pi/N$ appartenant toujours à un certain corps de nombres algébriques, le « corps des traces » du nœud, qui est ici le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Le terme exponentiel dans ce développement est déjà prédit par une conjecture antérieure, la « conjecture de volume » célèbre de Kashaev-Hikami.) C'est en regardant d'autres valeurs limites pour q, et non seulement le comportement pour $q \to 1$, que l'on découvre les propriétés de modularité. Par exemple, pour $q = -\zeta_N$ avec $N \to \infty$ on trouve expérimentalement l'asymptotique

$$J_0(-e^{2\pi i/N}) \sim \kappa(N) \cdot \frac{3^{1/4}}{2^{3/2}} N^{3/2} e^{CN/4}\Big(1 + \frac{41}{36\sqrt{3}}\frac{\pi}{N} + \frac{12625}{7776}\frac{\pi^2}{N^2} + \dots\Big),$$

qui est de la même forme que pour $J_0(\zeta_N)$, mais cette fois avec un facteur supplémentaire

$$\kappa(N) = \begin{cases} 27 & \text{si } N \equiv 1 \pmod 2, \\ 1 & \text{si } N \equiv 2 \pmod 4, \\ 5 & \text{si } N \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

qui dépend de la valeur de $N \pmod 4$. En comparant avec la table des valeurs de $J_0(q)$ donnée ci-dessus, nous trouvons que ce facteur est donné dans tous les cas par $\kappa(N) = J_0(i^{N+2})$.

On trouve un phénomène analogue pour $q \to q_0$ pour chaque racine de l'unité q_0 fixée. Il implique que la fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \log\left(J_0(e^{2i\pi x})\right) \qquad (x \in \mathbb{Q})$$

tend vers l'infini, quand x s'approche à un nombre rationnel fixé, sur certaines courbes lisses (en nombre dénombrable) qui dépendent de ce nombre rationnel. Ce comportement se voit clairement dans le graphe de la fonction $f(x)$:

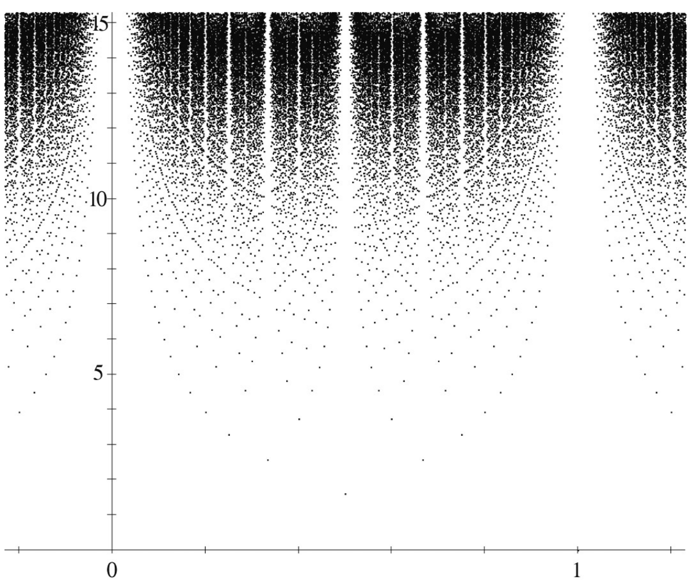

Figure 3 : Graphe de $f(x) = \log(J_0(e^{2i\pi x}))$

Et maintenant on peut voir la nature « forme modulaire quantique » de la fonction $f(x)$ en comparant ce graphe, qui est compliqué et très loin d'être le graphe d'une fonction continue ou lisse (tout en montrant beaucoup plus de régularité que le graphe de la fonction en figure 1), avec le graphe de la différence $h(x) := f(x) - f(1/x)$:

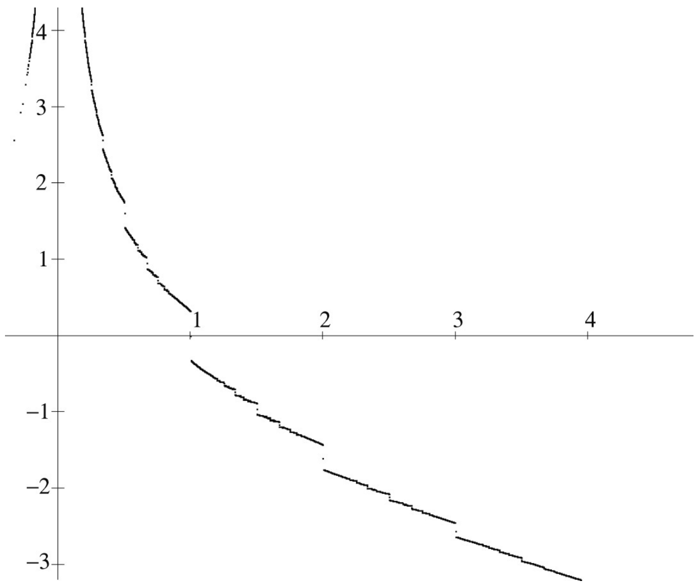

Figure 4 : Graphe de $h(x) = f(1/x)$

La fonction $h(x)$ n'est toujours pas lisse ou continue (il ne s'agit donc pas d'une forme modulaire quantique stricte au sens de la définition donnée au début), mais elle n'en est pas très loin. Il semble (d'après les expériences numériques et l'analyse théorique partielle dont on dispose) qu'elle est continue en chaque point irrationnel, tandis que dans les points rationnels elle a un saut mais est différentiable quand on s'approche de ce point de droite ou de gauche.

Cours à l'École Normale Supérieure : « Bouillon Mathématique »

Ce cours n'a pas eu lieu cette année.

Conférences invitées

Osaka, Japon, septembre 2008 : *Higher spherical polynomials*. Conférence « Explicit Structures in Modular Forms and Number Theory », Kinki University.

Banff, Canada, septembre 2008 : *Mock modular forms and BPS states* (avec A. Dabholkar). Conférence « Number Theory and Physics at the Crossroads », Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery.

Oberwolfach, Allemagne, octobre 2008 : *Teichmüller modular forms and their differential equations*. Workshop sur « Geometry and arithmetic around hypergeometric functions », Mathematisches Forschungsintitut Oberwolfach.

Oberwolfach, Allemagne, octobre 2008 : *Das Mysterium von q : Von q-Reihen in der Kombinatorik zu Quanteninvarianten von Knoten*. Oberwolfach-Vorlesung (conférence spéciale annuelle), Mathematisches Forschungsintitut Oberwolfach.

Bonn, Allemagne, octobre 2008 : *Die zwei Gesichter der Mathematik*. Hirzebruch-Vorlesung, Universitätsclub Bonn, suivie d'une discussion podium avec l'écrivain H.M. Enzensberger.

Utrecht, Pays-Bas, janvier 2009 : *New constructions of mock modular forms*. Intercity Number Theory Seminar, Université d'Utrecht.

Lyon, février 2009 : *Formes modulaires quantiques*. Colloquium, Institut Camille Jordan, Université de Lyon I.

Lyon, février 2009 : *Exemples anciens et récents de formes modulaires « mock »*. Séminaire « Théorie des Nombres, Combinatoire, Structures Discrètes », Université de Lyon I.

Paris, février 2009 : *Lucas et l'analyse indéterminée.* Symposium international « La "Tour d'Hanoï", un casse-tête mathématique d'Édouard Lucas (1842--1892) », Institut Henri Poincaré.

Fukuoka, Japon, mars 2009 : *Modular properties of quantum invariants and other q-series*. Conférence « Low dimensional topology and number theory », Université de Kyushu.

Groningen, Pays-Bas, avril 2009 : *The riddle of the mock theta functions.* 45e Congrès Mathématique Néerlandais, Université de Groningen.

Utrecht, Pays-Bas, avril 2009 : *On a U(3,1)-automorphic form of Ferapontov and Odesskii.* Aachen-Köln-Lille-Siegen Automorphic Forms Seminar.

Bonn, Allemagne, avril 2009 : *3-manifolds, quantum invariants and modularity*. Bethe Colloquium, Bethe Center for Theoretical Physics.

Bonn, Allemagne, mai 2009 : *Mock modular forms–theory and examples*. Conférence « Mock Modular Forms », Max-Planck-Institut für Mathematik .

Bonn, Allemagne, mai 2009 : *Quantum modular forms.* Conférence « Mock Modular Forms », Max-Planck-Institut für Mathematik.

Bonn, Allemagne, juin 2009 : *Mock modular forms: Two examples related to physics.* International Workshop on Mirror Symmetry, Hausdorff Center for Mathematics.

Zürich, Suisse, juin 2009 : *Applications of complex multiplication*. Conférence plénière, « Diophantine Geometry into the Millennium », école Polytechnique Fédérale.

Woudschoten, Pays-Bas, juin 2009 : *The Poisson transformation and principal series representations for* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Conférence internationale sur « The analytic theory of automorphic forms », Université d'Utrecht.

Lille, mai 2009 : *Higher « Kronecker limit formulas » for real quadratic fields.* Conférence « Activités additives et analytiques », Université de Lille I.

Bonn, Allemagne, juillet 2009 : *Complex multiplication* (2 conférences). Conférences pour membres de l'école doctorale « IMPRS », Max-Planck-Institut für Mathematik.

Oberwolfach, Allemagne, juillet 2009 : *Diophant and seine Gleichungen*. Conférence pour lycéens, Mathematisches Forschungsintitut Oberwolfach.

Autres missions et activités

Amsterdam, Pays-Bas, février 2009 : International Advisory Committee du Center for Advanced Mathematical Sciences, American University of Beirut.

Bonn, Allemagne, mai 2009 : Co-organisateur de la conférence « Mock Modular Forms » à l'Institut Max Planck de Mathématiques.

Bonn, Allemagne, juin 2009 : Co-organisateur du « Mathematische Arbeitstagung 2009 » à l'Institut Max Planck de Mathématiques.

Oberwolfach, Allemagne, juillet 2009 : Co-organisateur du workshop « Explicit methods in number theory ».

Bonn, Allemagne, mai-juillet 2009 : Co-organisateur de l'activité « Dynamical Numbers » à l'Institut Max Planck de Mathématiques.

Publications et prépublications

Exact and asymptotic formulas for v_n. Appendice à « Sequences of enumerative geometry : congruences and asymptotics », par D. Grünberg et P. Moree, *Experim. Math.*, **17** (2008), 409-426 ; pp. 423-425.

Quantum modular forms. À paraître dans la série « Clay Mathematical Proceedings » du CMI/AMS, 16 pages.

Exact results for perturbative Chern-Simons theory with complex gauge group (avec T. Dimofte, S. Gukov et J. Lenells). Communications in Number Theory and Physics, **3** (2009), 363-443.

Some questions and observations around the mathematics of Seki Takakazu (avec S. Wimmer-Zagier). À paraître dans les Proceedings of the International Conference on History of Mathematics in Memory of Seki Takakazu (1642?-1708), Springer, Tokyo, Japon, 20 pages.