Théorie des Nombres

M. Don ZAGIER, professeur

COURS : FONCTIONS THÊTA (SUITE) ET PROPRIÉTÉS COMBINATOIRES DES FORMES MODULAIRES

Le cours de l'année précédente avait été dévoué à l'étude des séries thêta associées à des formes quadratiques définies positives (cas classique) et indéfinies. Dans cette deuxième partie ce sont les aspects purement combinatoires des formes modulaires qu'on va surtout étudier et les séries thêta ne seront pas toujours visibles, mais ce sont elles qui déterminent en fait toutes les structures qu'on découvre.

Valeurs zêta doubles et formes modulaires

Les « valeurs zêta multiples » ou « sommes d'Euler » sont les nombres définis par l'expression

$$\zeta(s_1,\dots, s_h) = \sum_{m_1>\dots>m_h>0} \frac{1}{m_1^{s_1}\dots m_h^{s_h}},$$

où les s_i sont des entiers strictement positifs avec $s_1 \geq 2$. Elles ont été beaucoup étudiées dans les dernières années à cause de leurs liens avec les invariants des nœuds, les intégrales de Feynman, et les périodes des motifs de Tate mixtes. Le cas des valeurs zêta doubles ($h = 2$) a des liens étroits avec la théorie des formes modulaires qui ont été élaborés dans un article récent écrit en collaboration avec H. Gangl et M. Kaneko et dont les résultats principaux sont présentés en détail dans le cours. On donne ici un bref résumé.

Pour un entier $k > 2$ donné, il y a $k - 2$ valeurs zêta doubles de poids k,

$$\zeta(r, s) = \sum_{m>n>0} \frac{1}{m^r\, n^s} \qquad (r \geq 2,\ s \geq 1,\ r + s = k).$$

Ces nombres satisfont, comme toutes les valeurs zêta multiples, aux « relations de mélange doubles », qui ici prennent la forme

$$\zeta(r, s) + \zeta(s, r) = \zeta(r)\,\zeta(s) - \zeta(k) \quad (r + s = k\,;\ r, s \geq 2),$$

$$(1) \qquad \sum_{r=2}^{k-1} \left[\binom{r-1}{j-1} + \binom{r-1}{k-j-1}\right] \zeta(r, k-r) = \zeta(j)\,\zeta(k-j) \quad \left(2 \leq j \leq \frac{k}{2}\right).$$

Dans le cas de k impair, déjà Euler a découvert que tous les $\zeta(r, s)$ s'expriment comme des combinaisons linéaires à coefficients rationnels de produits de deux valeurs zêta ordinaires (fonction zêta de Riemann), par exemple $\zeta(3, 4) = -18\zeta(7) + 10\zeta(2)\zeta(5) + \zeta(3)\zeta(4)$. Dans le cas de k pair la situation est beaucoup plus compliquée et est liée à l'espace $M_k = M_k(\Gamma_1)$ des formes modulaires de poids k sur le groupe modulaire $\Gamma_1 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. (Notez que $M_k = \{0\}$ pour k impair.) La première telle relation est le fait que le nombre de relations linéaires sur $\mathbb{Q}$ parmi les valeurs $\zeta(k)$ et $\zeta(r, s)$ avec $r + s = k$ et r et s impairs (ou plutôt le nombre de relations démontrables, qui n'est que conjecturalement le nombre total) est exactement égal à dim M_k. Il y a donc toujours au moins une telle relation, puisque M_k contient au moins une forme modulaire non nulle, la série d'Eisenstein $G_k(\tau)$; c'est la relation

$$(2) \qquad \sum_{\substack{2 \leq r \leq k-1 \\ r \text{ impair}}} \zeta(r, k-r) = \frac{1}{4}\,\zeta(k).$$

(Le fait que la somme de *toutes* les valeurs $\zeta(r, k-r)$ est égale à $\zeta(k)$ avait déjà été trouvé par Euler.) La première fois où il y a une relation indépendante de (2) est le cas $k = 12$, où M_k contient en dehors de $G_{12}(\tau)$ la forme parabolique $\Delta(\tau)$ et où l'on a la relation

$$(3) \qquad 28\,\zeta(9, 3) + 150\,\zeta(7, 5) + 168\,\zeta(5, 7) = \frac{5197}{691}\,\zeta(12).$$

Il n'y a pas de rapport visible entre les coefficients d'une telle relation et les nombres liés aux formes paraboliques. Pour comprendre le lien, il faut travailler avec les « valeurs zêta doubles formelles » (ce sont des variables $Z_{r,s}$ satisfaisant aux relations de mélange doubles (1)). Alors le membre de droit d'une relation comme (3) ne sera plus un multiple de Z_k (l'analogue formel de $\zeta(k)$), mais plutôt une combinaison linéaire d'expressions $P_{r,s} = Z_{r,s} + Z_{s,r} + Z_k$ (valeurs formelles symétrisées) avec r et s pairs, par exemple la relation (3) sera remplacée par :

$$28\,Z_{9,3} + 150\,Z_{7,5} + 168\,Z_{5,7} = 28P_{4,8} + \frac{95}{3}\,P_{6,6} - \frac{167}{3}\,Z_{12}.$$

Les $P_{r,s}$ correspondent dans le monde « réel » (c'est-à-dire la réalisation des variables formelles $Z_{r,s}$ par les valeurs réelles $\zeta(r, s) \in \mathbb{R}$) à $\zeta(r, s) + \zeta(s, r) + \zeta(k)$ et donc, par la première des relations (1), aux produits $\zeta(r)\zeta(s)$ qui pour r et s pairs sont des multiples rationnels de π^k (et donc aussi de $\zeta(k)$). Les coefficients des relations s'obtiennent d'une manière explicite, bien qu'un peu compliquée, à partir des coefficients des « polynômes des périodes impairs » des formes paraboliques dans M_k. (Pour la théorie de ces polynômes, voir les résumés de cours de 2002-2003 et 2003-2004.)

Dans la réalisation réelle, tous les $P_{r,s}$ avec r et s pairs sont proportionnels à Z_k, comme on vient de le remarquer. Le deuxième lien entre valeurs zêta doubles et formes modulaires est le fait que ceci n'est plus vrai au niveau formel et que, au contraire, une relation $\sum_{r,s \text{ pairs}} \lambda_{r,s} P_{r,s} = \lambda Z_k$ avec $\lambda_{r,s}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ est vraie si et seulement si la relation correspondante $\sum \lambda_{r,s} \zeta(r)\zeta(s) = \lambda\zeta(k)$ « se relève aux formes modulaires » dans le sens que l'on a $\sum \lambda_{r,s} G_r(\tau)G_s(\tau) = \lambda G_k(\tau)$, où $G_r(\tau)$ est la série d'Eisenstein de poids r, dont le terme constant est égal à $\zeta(r)$. (Il faut modifier cet énoncé légèrement dans le cas où $\lambda_{2,k-2} + \lambda_{k-2,2}$ est différent de 0 pour tenir compte du fait que la série d'Eisenstein G_2 n'est pas modulaire.) Les coefficients $\lambda_{r,s}$ pour lesquels ceci a lieu sont, à des facteurs simples près, les coefficients des polynômes des périodes *pairs* des formes modulaires dans M_k.

Séries d'Eisenstein doubles

Tous les énoncés donnés ci-dessus possèdent des démonstrations purement combinatoires, en utilisant les relations de mélange (1) et les propriétés connues des polynômes des périodes des formes modulaires. Toutefois, il y a une façon beaucoup plus intéressante de les comprendre, à l'aide des *séries d'Eisenstein doubles.* Il y en a deux espèces. Tout d'abord, on peut écrire la définition de la série d'Eisenstein $G_k(\tau)$ usuelle (k ≥ 4 pair) comme

(4)
$$G_k(\tau) = \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \\ \mathbf{m} \succ 0}} \frac{1}{\mathbf{m}^k} \quad ,$$

où $\mathbf{m} \succ 0$ signifie que $\mathbf{m} = a\tau + b$ avec $a > 0$ ou $a = 0$, $b > 0$. On pose alors

(5)
$$G_{r,s}(\tau) = \sum_{\substack{\mathbf{m},\, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \\ \mathbf{m} \succ \mathbf{n} \succ 0}} \frac{1}{\mathbf{m}^r\, \mathbf{n}^s},$$

où $\mathbf{m} \succ \mathbf{n}$ signifie que $\mathbf{m} - \mathbf{n} \succ 0$. Cette série est absolument convergente pour r ≥ 3, s ≥ 2, et on peut lui donner un sens dans certains autres cas. S'il n'y avait pas des problèmes de convergence, on pourrait déduire par un calcul formel et simple que les fonctions $G_{r,s}(\tau)$ satisfont aux mêmes relations de mélange que les valeurs zêta doubles, c'est-à-dire aux relations (1) avec $\zeta(r,s)$, $\zeta(r)\zeta(s)$ et $\zeta(k)$ remplacés par $G_{r,s}(\tau)$, $G_r(\tau)G_s(\tau)$ et $G_k(\tau)$. Les cas de non-convergence compliquent beaucoup l'analyse, mais le principe reste vrai et ceci explique pourquoi seules les relations « relevables à M_k » entre les produits de zêtas formels $P_{r,s}$ sont démontrables par des calculs au niveau purement formel.

Mais il y a aussi une autre sorte de série d'Eisenstein double, qu'on peut appeler les *séries d'Eisenstein doubles combinatoires*. On les obtient en remplaçant (4) par l'autre définition des séries d'Eisenstein usuelles, en termes de leurs développements de Fourier :

$$(6) \qquad (2i\pi)^{-k}G_k(\tau) = \frac{\zeta(k)}{(2i\pi)^k} + g_k(q), \qquad g_k(q) := \frac{(-1)^k}{(k-1)\,!} \sum_{u,n>0} u^{k-1}\, q^{un},$$

où $q = e^{2i\pi\tau}$ comme d'habitude. On définit alors la série d'Eisenstein double combinatoire comme

$$(7) \qquad g_{r,s}(q) = \frac{(-1)^{r+s}}{(r-1)!(s-1)!} \sum_{\substack{m>n>0 \\ u,\, v>0}} u^{r-1}v^{s-1}q^{um+vn} \qquad \in \mathbb{Q}[[q]].$$

Ces séries satisfont elles aussi à une version des relations de mélange doubles et on en tire les mêmes conclusions qu'auparavant. En plus, il y a un lien direct entre les deux types de série d'Eisenstein double : un calcul long mais assez amusant montre que le développement de Fourier de la fonction périodique $G_{r,s}(\tau)$ est la somme de trois termes, un terme constant $\zeta(r, s)$, un terme « mixte » qui est une combinaison linéaire à coefficients rationnels de produits $(2i\pi)^h\, \zeta(p)\, g_h(q)$ avec $h + p = r + s$, et la fonction $(2i\pi)^{r+s}\, g_{r,s}(q)$.

Formes modulaires combinatoires

Ces idées peuvent être étendues pour livrer toute une théorie des « formes modulaires combinatoires » dans laquelle on démontre les identités usuelles entre les formes modulaires en n'utilisant que leurs développements en séries formelles, sans jamais se servir de la modularité. On définit pour chaque k positif et pair la série d'Eisenstein combinatoire comme $G_k^c(q) = \dfrac{-B_k}{2k} + g_k(q) \in \mathbb{Q}[[q]]$, où B_k est le k-ième nombre de Bernoulli et $g_k(q)$ la série formelle définie dans (6). Cette fonction n'est bien sûr rien d'autre que $(2i\pi)^{-k}G_k(\tau)$, donc modulaire pour $k > 2$ et quasi modulaire pour $k = 2$, et la théorie des formes modulaires nous donne immédiatement un grand nombre de relations entres les G_k^c : l'espace M_k^c engendré par G_k^c et les produits $G_r^cG_{k-r}^c$ ($4 \le r \le k-4$, r pair) est de dimension $\dfrac{k}{12} + \mathrm{O}(1)$; le produit d'un élément de M_k^c avec un élément de M_h^c est un élément de M_{k+h}^c ; chaque élément de M_k^c est un polynôme en G_4^c et G_6^c ; les « crochets de Rankin-Cohen » $[G_r^c, G_s^c]_n$ (voir les résumés de cours des années 2000-2001 et 2001-2002) sont contenus dans M_{r+s+2n}^c pour tous $r, s \ge 4$ pairs et $n \ge 0$; l'anneau engendré par G_2^c, G_4^c et G_6^c est fermé par rapport à la différentiation, etc. On peut se demander si tous ces énoncés, faciles à démontrer en utilisant la modularité des G_k^c mais dont la formulation est purement élémentaire, possèdent des démonstrations qui sont aussi purement élémentaires et formelles, sans faire aucun recours aux processus infinis. Ceci est effectivement possible. L'idée de base, qui avait déjà été donnée par Skoruppa il y a plusieurs années, peut être développée assez loin. On utilise l'identité

$$f_N(m, n) = f_N(m+n, n) + f_N(m, m+n) + \varepsilon_N(m+n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}_{>0}),$$

où les fonctions f_N et ε_N sont définies, pour un entier $N > 0$ fixé, par

(8) $$f_N(m, n) = \#\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2_{>0} \mid ma + nb = N\}, \quad \varepsilon_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n|N, \\ 0 & \text{si } n\nmid N \end{cases}.$$

En multipliant l'identité (8) par un polynôme en m et n convenablement choisi et faisant la sommation (finie) sur tout (m, n) dans le quadrant positif, on trouve des identités entre les produits de séries d'Eisenstein combinatoires $G^c_r G^c_s$. Une version plus compliquée permet de traiter aussi les produits de dérivées de séries d'Eisenstein combinatoires et ainsi les crochets de Rankin-Cohen. Le tout est très étroitement lié aux séries d'Eisenstein doubles combinatoires définies dans l'équation (7), où on voit déjà apparaître les séries thêtas associées aux formes quadratiques indéfinies (ici, la forme quaternaire $um + vn$).

Les formes toriques et les sommes de Kontsevich-Nahm

Plusieurs autres thèmes appartenant au complexe d'idées « aspects combinatoires des formes modulaires » ont été abordés. En particulier, on a discuté les « formes modulaires toriques » de Borisov et Gunnells. Ce sont des séries formelles en q associées aux variétés toriques complètes, données par des expressions compliquées qui sont des combinaisons linéaires finies de certaines sommes relativement simples portant sur les points entiers d'un cône, dont les auteurs démontrent qu'elles sont toujours des formes modulaires. La démonstration utilise la combinatoire associée aux variétés toriques (éventails polyèdraux rationnels), le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch, et la théorie des séries thêta classiques.

Une construction liée est celle de la somme de Kontsevich et Nahm (travaux non publiés) :

(9) $$\sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}^n \\ L_1(x),\, \dots,\, L_k(x) \neq 0}} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - q^{L_i(x)}},$$

où les L_i sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ à coefficients entiers qui ne prennent pas simultanément des valeurs du même signe (ce qui revient à dire que $L_i(x) = c_i \cdot x$ où $c_i \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs dont la clôture convexe contient 0). L'énoncé est qu'une telle somme est toujours une somme finie de formes modulaires et quasi modulaires de poids $\leq k$. Là aussi on peut, en développant les séries formelles, interpréter ces fonctions comme une sorte de série d'Eisenstein combinatoire, ou comme une sorte de série thêta combinatoire.

Un troisième thème traité dans le cours, mais qui ne sera pas discuté ici, était une découverte récente de Felder et Varchenko qui utilise les valeurs des fonctions $G_k(\tau)$ définies par (4) ou (6) dans le cas de *k impair*, où elles ne sont plus modulaires, pour construire un cocycle pour le groupe $SL_3(\mathbb{Z})$.

Fausses formes modulaires

Enfin, on a repris le sujet traité l'année passée des « mock theta functions » de Ramanujan et de leurs généralisations, les *fausses formes modulaires*. Cette théorie, qui a été inaugurée dans la thèse doctorale de Sander Zwegers et que nous avons élaborée par la suite, est une extension de la théorie des formes modulaires où l'on étudie des séries de puissances ou de Laurent $f(\tau) = \sum a_n q^n$ qui ne sont pas modulaires mais qui le deviennent si on leur ajoute un terme non holomorphe qui est une sorte d'intégrale d'Eichler d'une forme modulaire de poids complémentaire (c'est-à-dire de poids $2 - k$ si f est de poids k). Les fausses formes modulaires ont des propriétés combinatoires assez remarquables et apparaissent aussi dans l'étude des invariants quantiques de certaines variétés de dimension 3. La théorie a été passée en revue et un certain nombre d'exemples nouveaux ont été présentés. On en donne un ici. Définissons pour $k > 0$ pair une « fausse série d'Eisenstein » F_k par

$$F_k = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0}} (-1)^n \left(\frac{-3}{n-1}\right) n^{k-1} \frac{q^{n(n+1)/6}}{1-q^n} = -\sum_{r>s>0} \left(\frac{12}{r^2-s^2}\right) s^{k-1} q^{rs/6} \quad \in \mathbb{Z}[[q]]$$

(l'égalité des deux définitions n'est pas totalement évidente), les deux premières valeurs étant

$$F_2 = q + 2q^2 + q^3 + 2q^4 - q^5 + 3q^6 - 2q^7 + \dots ,$$
$$F_4 = 7q + 26q^2 + 7q^3 + 26q^4 - 91q^5 + 63q^6 - 2q^7 + \dots .$$

Alors la fonction F_k est une fausse forme modulaire en τ (où $q = e^{2i\pi\tau}$) de poids k sur le groupe modulaire $\Gamma_1 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Sans expliquer ce que cela signifie en détail, on peut en donner des conséquences explicites. Si chaque F_k était modulaire ou quasi modulaire de poids k, la fonction $f := (E_2 - 12F_2)/\eta$, où $E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} nq^n/(1 - q^n)$ est la série d'Eisenstein quasi modulaire de poids 2 et $\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n)$ la fonction êta de Dedekind (qui est modulaire de poids 1/2), serait une forme modulaire ou quasi modulaire de poids 3/2, et les crochets de Rankin-Cohen $[f, \eta]_n$ seraient modulaires ou quasi modulaires de poids $2n + 2$ pour tout $n > 0$. Ce n'est pas le cas, mais une certaine combinaison linéaire de $[f, \eta]_n$ et de F_{2n+2} est une forme modulaire de poids $2n + 2$ sur Γ_1 pour tout $n > 0$. Pour $n = 1$, cela donne par exemple l'identité $F_4 - E_2F_2 + 6F_2' - E_2' = 0$, où $'$ est l'opération de différentiation $F' = (2i\pi)^{-1}dF/d\tau = q\, dF/dq$. En comparant les coefficients de Fourier des deux côtés de ces identités, on obtient des identités combinatoires du même type que celles déduites des relations entre les formes modulaires, mais qui ne peuvent pas être obtenues à partir de la théorie classique.

Cours à Pennsylvania State University : « New Aspects of Modular Forms »

Ce cours de six exposés a été dévoué aux aspects moins connus de la théorie des formes modulaires. Dans plusieurs cas il s'agissait de thèmes déjà traités dans des cours donnés au Collège de France, mais un certain nombre des sujets étaient nouveaux. Les thèmes individuels étaient les suivants :

1. Formes modulaires et leurs dérivés

Introduction aux formes modulaires et quasi modulaires et quelques-unes de leurs applications, par exemple à un problème concernant les fonctions périodiques et à un problème venant de la théorie de la percolation.

2. Formes modulaires et équations différentielles

Les formes modulaires, exprimées localement en termes d'une fonction modulaire, satisfont à des équations différentielles linéaires. Ce fait, qui est lié au thème du premier exposé, a des applications de nature très différente, notamment la version donnée par Beukers de la démonstration célèbre d'Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$.

3. Fonctions quadratiques et formes modulaires

En commençant par des questions élémentaires concernant la sommation de polynômes quadratiques à coefficients entiers et à discriminant donné, on est mené automatiquement à des identités surprenantes liées aux formes modulaires. Un exemple simple est l'identité $\Sigma \max(ax^2 + bx + c, 0) = 2$, valable pour tout nombre réel x, où la sommation porte sur les triples $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ avec $a < 0$ et $b^2 - 4ac = 5$.

4. Polynômes des périodes des formes modulaires

Les propriétés arithmétiques essentielles des formes modulaires peuvent être décrites en termes de leurs polynômes des périodes. Cette construction, connue depuis longtemps, a des nouveaux aspects liés aux fonctions quadratiques traitées dans la conférence précédente et aux « valeurs zêta doubles » découvertes par Euler.

5. Fausses fonctions thêta et séries thêta des formes quadratiques indéfinies

Les séries thêta donnent l'une des constructions les plus utiles des formes modulaires et ont beaucoup d'applications dans les domaines tels que la théorie de codage ou l'étude de la géométrie des réseaux. Elles sont associées aux formes quadratiques définies positives. Essayer d'étendre cette théorie au cas des formes quadratiques indéfinies mène à des questions arithmétiques nouvelles liées aux fonctions thêta « mock » de Ramanujan.

6. Formes modulaires quantiques

Ce dernier sujet, qui a des liens avec les trois précédents, concerne les valeurs limites des formes modulaires aux racines d'unité. Ceci est à l'origine de la parution des formes modulaires (classiques ou « mock ») dans le contexte des invariants quantiques des variétés de dimension 3.

Cours à l'École Normale Supérieure : « Bouillon Mathématique »

Le cours « Bouillon Mathématique » donné annuellement à l'ENS a changé cette année de format. Au lieu de la « promenade hors des sentiers battus » usuelle, c'était une série de conférences autour de certains sujets très liés entre eux (et non sans rapport avec le sujet du cours principal donné au Collège de France). Il s'agissait surtout des sommes sur les réseaux et des objets mathématiques liés comme les nombres et les polynômes de Bernoulli, les sommes de Dedekind, les valeurs zêta multiples, etc. Le résultat central est le fait, relativement simple à démontrer mais assez compliqué d'un point de vue algorithmique, que la valeur de n'importe quelle somme convergente de la forme

$$\sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^n \\ L_1(x), \ldots, L_k(x) \neq 0}} \frac{1}{L_1(x) \ldots L_k(x)},$$

où les L_i sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ à coefficients rationnels, est toujours un multiple rationnel de π^k. C'est une version plus élémentaire de l'énoncé (trouvé plus tard) de Kontsevich et Nahm sur les sommes (9) discutées ci-dessus.

Comme d'habitude, plusieurs élèves ont rédigé des textes donnant des versions plus détaillées des énoncés et des démonstrations traités dans le cours.

Conférences invitées

Philadelphie, États-Unis, septembre 2005 : *Theta functions and mock theta functions*. Penn Mathematics Colloquium, University of Pennsylvania.

Philadelphie, États-Unis, septembre 2005 : *Dilogarithms, 3-manifolds, and modular forms*. Galois Seminar, University of Pennsylvania.

State College, États-Unis, septembre 2005 : *New Aspects of Modular Forms* (6 exposés). Distinguished Visiting Professor Lecture Series, Pennsylvania State University.

State College, États-Unis, octobre 2005 : *How old was Diophantus's son ?* Conférence spéciale pour étudiants, Pennsylvania State University.

State College, États-Unis, septembre 2005 : *The enigma of Ramanujan's mock theta functions*. Colloquium, Pennsylvania State University.

Princeton, États-Unis, octobre 2005 : *Quantum aspects of modular forms*. Colloque spécial, Université de Princeton.

Princeton, États-Unis, octobre 2005 : *Indefinite theta functions and mock theta functions*. Colloque spécial, Institute for Advanced Study.

Londres, Angleterre, novembre 2005 : *Double zeta values and modular forms*. London number theory seminar, Imperial College.

Londres, Angleterre, novembre 2005 : *Dilogarithms and the Bloch group : from algebraic K-theory to modular forms to conformal field theory*. Colloquium, King's College.

Fribourg, Suisse, décembre 2005 : *Modular forms, mock modular forms, and combinatorics*. Plancherel-Vorlesung, conférence spéciale annuelle de l'Université de Fribourg.

Paris, janvier 2006 : *Périodes des formes modulaires et réduction des formes quadratiques*. Séminaire de Théorie des Nombres de Chevaleret.

Fukuoka, Japon, février 2006 : *Mock modular forms*. Conference on L-functions, Université de Kyushu.

Utrecht, Pays-Bas, mars 2006 : *The Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture*. Stafcolloquium « fundamental problems », Université d'Utrecht.

Paris, mars 2006 : *Les fausses (« mock ») formes modulaires*. Colloquium de Mathématiques, Institut de Mathématiques de Jussieu.

Cambridge, États-Unis, avril 2006 : *Mellin transforms, zeta values and the Casimir effect*. Basic notions seminar, Université de Harvard.

Oberwolfach, Allemagne, mai 2006 : 1. *Dilogarithms, K-theory and q-series*. 2. *Double zeta values and modular forms*. 3. *Modular forms, multiple zeta values and the twisted Hopf algebra of Connes and Moscovici* (3 exposés). Workshop « Zeta Functions, Index and Twisted K-Theory ; Interactions with Physics », Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

Hanovre, Allemagne, mai 2006 : *Die Nahmsche Vermutung : eine Verbindung zwischen Modulformen, konformen Feldtheorien und algebraischer K-Theorie*. Colloque de Mathématique et Physique, Université de Hanovre.

Banff, Canada, juin 2006 : 1. *Modular forms and differential equations*. 2. *Quasimodular forms, Rankin-Cohen brackets and related algebraic structures* (2 exposés). Conference on Modular forms and String Duality, Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery.

Bonn, Allemagne, juillet 2006 : *The dilogarithm function* (2 exposés). Conférences pour membres de l'école doctorale « IMPRS », Max-Planck-Institut für Mathematik.

Munich, Allemagne, juillet 2006 : *The conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer : very modern answers to very ancient problems on numbers*. « Outstanding problems in mathematics : challenges or dead end ? », European Open Science Forum.

Berlin, Allemagne, juillet 2006 : *q-Hypergeometric Series and Modular Forms*. Algorithmic Number Theory Symposium, Université de Berlin.

Publications

(avec K. Ihara et M. Kaneko) Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values. Compositio Math. **142** (2006), 307-338.

(avec T. Dokchitser et R. de Jeu) Numerical verification of Beilinson's conjecture for K_2 of hyperelliptic curves. Compositio Math. **142** (2006), 339-373.

Ramanujan à Hardy : de la première à la dernière lettre. Dans *Les grands mathématiciens*, hors-série, n° 25, Bibliothèque Tangente (2006), 60-65.

(avec H. Gangl et M. Kaneko) Double zeta values and modular forms. *Automorphic forms and Zeta functions. Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa*, Böcherer, S., Ibukiyama, T., Kaneko, M. et Sato, F. (Eds.), World Scientific (2006), 71-106.

The Mellin transform and other useful analytic techniques. Appendice au livre *Quantum Field Theory I : Basics in Mathematics and Physics. A Bridge Between Mathematicians and Physicists* par E. Zeidler, Springer-Verlag (2006), 305-323.

The dilogarithm function. *Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II*, Cartier, P., Julia, B., Moussa, P., Vanhove, P. (Eds.), Springer-Verlag (2006), 3-65.