Théorie des Nombres

M. Don Zagier, professeur

Cours : Formes modulaires et opérateurs différentiels (suite)

On rappelle qu'une *forme modulaire* de *poids k* sur le *groupe modulaire* $\Gamma_1 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ ou sur un sous-groupe $\Gamma \subset \Gamma_1$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ satisfaisant à l'équation fonctionnelle $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$ pour tout $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$; l'ensemble de ces formes sera noté $M_k(\Gamma)$. Les formes modulaires ont des propriétés arithmétiques, venant surtout de la théorie des opérateurs de Hecke, qui les relient avec des questions centrales de la théorie des nombres comme les courbes elliptiques ou les représentations galoisiennes. Mais elles ont aussi des propriétés moins bien connues et indépendantes de la théorie de Hecke, qui proviennent de l'interaction entre la notion de modularité et celle de différentiation (ou, si on veut, entre les sous-groupes arithmétiques du groupe de Lie $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et son algèbre de Lie). Le but du cours de cette année, comme du cours 2000-2001 dont il était la suite, était d'étudier cette interaction et d'en décrire quelques applications diverses dans les mathématiques et la physique mathématique.

1. La fonction E_2 et les formes quasimodulaires

Pour tout entier pair $k > 0$ on a la *série d'Eisenstein* $E_k = E_k(z)$, les trois premières étant les fonctions

$$E_2 = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n}, \; E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1-q^n}, \; E_6 = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^n}{1-q^n}$$

($q = e^{2\pi i z}$), qu'on note aussi P, Q et R. La fonction E_k appartient à $M_k(\Gamma_1)$ pour $k > 2$, et on a même $M_*(\Gamma_1) := \oplus M_k(\Gamma_1) = \mathbb{C}[Q, R]$. Par contre, la fonction $P = E_2$, qui peut être interprétée comme l'une des « quasipériodes » de la courbe elliptique $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}z + \mathbb{Z})$ paramétrée par z, n'est pas modulaire : elle satisfait plutôt à l'équation fonctionnelle

$$E_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2\, E_2\,(z) - \frac{6}{\pi i}\; c(cz+d). \tag{1}$$

Ceci a plusieurs conséquences. D'une part, on déduit facilement de l'équation (1) qu'on a

$$f \in M_k(\Gamma) \quad \Rightarrow \quad f' - \frac{k}{12}\, Pf \in M_{k+2}(\Gamma) \qquad \left(f' := \frac{1}{2\pi i}\,\frac{df}{dz}\right), \tag{2}$$

et aussi $P' - \frac{1}{12}P^2 \in M_4(\Gamma_1)$, ce qui donne explicitement les formules bien connues

$$P' = \tfrac{1}{12}(P^2 - Q), \quad Q' = \tfrac{1}{3}(PQ - R), \quad R' = \tfrac{1}{2}(PR - Q^2). \tag{3}$$

Une conséquence de (3) est que chaque élément f de l'anneau des formes modulaires $M_*(\Gamma_1)$ ou plus généralement de l'anneau des *formes quasimodulaires* $\widehat{M}_*(\Gamma_1) = \mathbb{C}[P, Q, R]$ (voir le résumé de cours de l'année 2000) satisfait à une équation différentielle autonome non-linéaire d'ordre 3 ; en effet, les quatre fonctions f, f', f'' et f''' appartiennent à l'anneau $\widehat{M}_*(\Gamma_1)$ dont le degré de transcendance est 3 et sont donc forcément algébriquement dépendantes. Pour $f = P$ cette équation différentielle est *l'équation de Chazy* $P''' = PP'' - \frac{3}{2}P'^2$, découverte en 1910, qui joue un rôle dans la théorie des équations de Painlevé, et dont on obtient ainsi des solutions paramétrées par l'espace $\Gamma_1\backslash PGL(2, \mathbb{C})$.

Les formes quasimodulaires — qu'on peut aussi définir de façon plus intrinsèque comme les fonctions holomorphes $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ telle que $(cz+d)^{-k}\, f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$ est un polynôme en $\frac{c}{cz+d}$ pour $z \in \mathbb{H}$ fixé et $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ variable — apparaissent dans des contextes assez variés en mathématiques et en physique théorique, par exemple dans la théorie récente de l'« équation d'anomalie holomorphe ». On décrit ici deux autres exemples. Le premier vient de la théorie de la « symétrie miroir » en dimension un : il s'agit de compter (dans un sens précis) le nombre de revêtements d'un degré d donné d'une courbe de genre 1 par une courbe de genre donné g, avec ramification générique. Si on note ce nombre (qui à cause des automorphismes des revêtements considérés sera en général rationnel et non entier) par $N_g(d)$ et sa fonction génératrice par $F_g(z) = \sum_{d=1}^{\infty} N_g(d)\, q^d$, alors on a la formule (Dijkgraaf)

$$\exp\left[\sum_{g=1}^{\infty} F_g(z)\, X^{2g-2}\right] = \text{coeff. de } \zeta^0 \text{ (comme élément de } \mathbb{Q}[\zeta,\zeta^{-1}][[q, X]])$$

$$\text{dans le produit } \prod_{n\geq 1}(1-q^n)\cdot \prod_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ impair}}} (1 - e^{n^2X/8}q^{n/2}\zeta)(1 - e^{-n^2X/8}q^{n/2}\zeta^{-1})$$

et on peut en déduire (Kaneko-Zagier) que la fonction F_g est quasimodulaire de poids $6g - 6$ pour tour $g > 1$, le premier exemple étant $F_2 = (5P^3 - 3PQ - 2R)/2^7 3^4 5 = q^2 + 8q^3 + 30q^4 + \cdots$.

Une deuxième apparition des formes quasimodulaires dans un contexte inattendu est un théorème récent de Gallagher (1997) qui décrit les moments $M_2 = \int_0^1 f(x)^2\, dx$ et $M_3 = \int_0^1 f(x)^3\, dx$ des fonctions périodiques $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, normalisées par $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, $\int_0^1 f'(x)^2\,dx = 1$: l'ensemble des paires de valeurs $(M_2, M_3{}^2)$ possibles est la région bornée en dessous par l'intervalle]0, 1] et en dessus par une courbe paramétrée par des fonctions rationnelles en $P(z)$, $Q(z)$ et $R(z)$, $z \in i\mathbb{R}_{>0}$.

2. Séries de Taylor des formes modulaires

La manière usuelle de décrire une forme modulaire $f(z)$ est d'en donner le *développement en série de Fourier* $f(z) = \sum a(n)q^n$ $(q = e^{2\pi iz})$, comme on l'a fait ci-dessus pour les séries d'Eisenstein. Les coefficients $a(n)$ de ce développement ont des propriétés souvent très belles (on cite la multiplicativité bien connue des coefficients de Fourier $\tau(n)$ de la « fonction discriminant » $\Delta(z) = q\prod(1 - q^n)^{24} \in S_{12}(\Gamma_1)$), mais en même temps assez mystérieuses. Il se trouve que l'idée plus simple de considérer le *développement en série de Taylor* de la fonction holomorphe $f(z)$ autour d'un point $z_0 \in \mathbb{H}$ mène à des coefficients qui ont eux aussi des applications arithmétiques remarquables et qui sont beaucoup plus faciles à calculer que les coefficients de Fourier de f.

La série de Taylor usuelle $f(z) = \sum f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n/n!$ a le défaut d'avoir un domaine de convergence $|z - z_0| < \mathrm{Im}(z_0)$ plus petit que le domaine d'holomorphie $\mathbb{H}$ de f. Pour y remédier, on fait le changement de variable $w = \dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ qui donne une bijection entre $\mathbb{H}$ et le disque-unité $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$. Les meilleurs coefficients s'obtiennent si on incorpore aussi le facteur d'automorphie qui correspond à ce changement de variables. On définit alors la suite des *coefficients de Taylor canoniques* de f dans le point $z_0 \in \mathbb{H}$ par la formule

$$\frac{1}{(1 - w)^k} f\left(\frac{z_0 - \bar{z}_0 w}{1 - w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n[f\,;\,z_0]\,\frac{w^n}{n!} \qquad (|w| < 1), \tag{4}$$

mais à équivalence près, deux suites $\{C_n\}$ et $\{C'_n\}$ étant considérées comme équivalentes s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^\times$ avec $C'_n = \alpha\,\beta^n\,C_n$ pour tout n. Les coefficients $C_n[f\,;\,z_0]$ sont des combinaisons explicites des dérivées $f^{(m)}(z_0)$ $(0 \le m \le n)$; on les considère à équivalence près parce qu'on pourrait tout aussi bien considérer l'isomorphisme $z \mapsto \beta w$ entre $\mathbb{H}$ et un disque de rayon $|\beta|$ et aussi parce que la classe d'équivalence de la suite $\{C_n[f\,;\,z_0]\}_{n\ge 0}$ ne dépend que de l'image de z_0 dans $\mathbb{H}/\Gamma$. Les coefficients canoniques ont alors deux propriétés primordiales :

- ils sont calculables par un algorithme élémentaire (« quasi-récurrence ») : on a $C_n[f\,;\,z_0] = P_n(0)$ où $\{P_n(t)\}$ est une suite de polynômes qui satisfait à une équation récursive du type $P_{n+1}(t) = AP_n(t) + BP'_n(t) + CP_{n-1}(t)$ où A, B et C sont des polynômes en n et t ;

- si f est algébrique (c'est-à-dire, à coefficients de Fourier dans $\bar{\mathbb{Q}}$) et z_0 est un « point CM » (= racine d'une équation quadratique sur $\mathbb{Q}$), alors les coefficients canoniques sont algébriques à équivalence près : il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^\times$ tels que $\alpha\,\beta^n C_n[f\,;\,z_0] \in \bar{\mathbb{Q}}$ pour tout n.

Par exemple, les coefficients canoniques (à équivalence près) de $E_4(z)$ en $z = i$ sont les entiers $\{1, 0, 20, 0, 360, 0, 25920, ...\} = \{P_n(0)\}$ où les $P_n(t) \in \mathbb{Z}[t]$ sont donnés par $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$ et $P_{n+1}(t) = (n/2 + 1)\, t\, P_n(t) - (3t^2/2 - 24)\, P'_n(t) - n(n + 3)\, P_{n-1}(t)$ pour $n \geq 1$.

L'application la plus importante est le calcul des valeurs spéciales $L(\psi, n)$ $(0 < n < k)$ de la *série L de Hecke* $L(\psi, s) = \sum \psi(\mathrm{a})/N(\mathrm{a})^s$ associée à un « grössencharakter » ψ de poids $k - 1$ (= fonction multiplicative sur les idéaux d'un corps quadratique imaginaire satisfaisant à $\psi((\lambda)) = \lambda^{k-1}$ pour tout λ congru à 1 modulo un idéal fixé). Cette valeur (pour $n \geq k/2$) s'écrit de fonction explicite comme combinaison linéaire finie de valeurs $C_{k-n-1}[f\,;\, z_0]$ où f est une série d'Eisenstein de poids $2n - k + 1$ et z_0 un point CM. Les valeurs spéciales des séries L de Hecke jouent un rôle dans la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (dans le cas de multiplication complexe) et on obtient ainsi des applications à des problèmes d'analyse diophantienne classiques. Par exemple, un problème posé par Sylvester vers 1850 est de savoir quels sont les nombres premiers p qui s'expriment comme $x^3 + y^3$ $(x, y \in \mathbb{Q})$; modulo la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer on trouve (Villegas-Zagier) que pour p de la forme $9n + 1$, le seul cas difficile, ceci sera le cas si et seulement si $p|Q_n(0)$, où $\{Q_n(t)\}$ est une suite de polynômes à coefficients entiers satisfaisant à une récurrence analogue à celle donnée ci-dessus, et cette condition est nécessaire sans aucune conjecture.

Une autre application provient d'un résultat, également due à Villegas-Zagier, qui dit que dans certains cas les coefficients canoniques $C_n[\Theta\,;\, z_0]$ pour une série thêta Θ de poids 1 dans un point CM z_0 seront les *carrés* des coefficients canoniques $C_n[\theta\,;\, z_1]$ d'une autre série thêta θ de poids 1/2 dans un autre point CM z_1. Cela implique le fait — qu'on avait formulé longtemps avant comme conjecture sur la base des calculs numériques — que les valeurs centrales $L(\psi, k/2)$ sont, à un facteur connu près, des carrés. (Dans le cas $k = 2$, cet énoncé serait une conséquence de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, le carré en question étant l'ordre du groupe de Shafarevich-Tate Ш). On obtient aussi le fait surprenant qu'il existe des paires de suites de polynômes $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$, satisfaisant tous les deux à des récurrences comme ci-dessus, avec $Q_n(0) = P_n(0)^2$ pour tout n, bien qu'il n'y ait pas d'autre lien entre les polynômes P_n et Q_n.

3. Équations différentielles linéaires et formes modulaires

Comme déjà mentionné dans le résumé du cours de l'année passée, les formes modulaires satisfont non seulement à une équation différentielle non-linéaire de degré 3 (§ 1.), mais aussi à une équation différentielle *linéaire* à coefficients algébriques, si on les exprime comme fonction de $t(z)$ au lieu de z, $t(z)$ étant une fonction modulaire quelconque. Ce fait classique joue un rôle dans beaucoup de questions intéressantes en mathématiques et physique. Un exemple frappant qui a été mentionné dans le dernier résumé de cours est l'interprétation modulaire, découverte par Beukers, des récurrences utilisées par Apéry dans sa démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. Dans le cours de cette année, on a donné d'autres exemples, liés à la « symétrie miroir » et au calcul des valeurs supersingulières de l'invariant modulaire j en caractéristique p, qui ne seront pas décrits ici. On a également discuté des calculs numériques qui suggèrent une caractérisation intrinsèque dans certains cas des équations différentielles associées aux formes modulaires. L'équation différentielle d'Apéry pour le cas de $\zeta(2)$ est liée à la récurrence

$$(n+1)^2 A_{n+1} = (11n^2 + 11n + 3)\, A_n + n^2 A_{n-1} \qquad (n \geq 0\,; \quad A_0 = 1)$$

qui a la propriété surprenante d'avoir une solution avec $A_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n (et non seulement $n!^2 A_n \in \mathbb{Z}$ comme la récurrence l'implique). On a étudié la récurrence plus générale

$$(n+1)^2 A_{n+1} = (an^2 + an + b)\, A_n - cn^2 A_{n-1} \qquad (n \geq 0\,; \quad A_0 = 1) \tag{5}$$

pour une centaine de millions de valeurs des paramètres $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ et on a trouvé qu'il n'y avait parmi eux que sept cas non-dégénérés (c'est-à-dire avec $c(a^2 - 4c) \neq 0$) ayant la même propriété d'intégralité et qu'ils provenaient tous des formes modulaires (plus précisément, des équations de Picard-Fuchs associées à certains fibrés en courbes elliptiques sur $\mathbb{P}^1$). Inversement, en utilisant un résultat de Beauville on peut démontrer que ces sept cas sont les seules récurrences du type (5) qui viennent des formes modulaires. Les résultats expérimentaux cités soutiennent donc l'hypothèse que ce n'est que dans le cas modulaire que le phénomène d'intégralité peut se produire. C'est un cas spécial d'une conjecture générale due à Grothendieck, Dwork, Bombieri, ... décrivant les équations différentielles provenant de la géométrie algébrique et dont le calcul évoqué ici fournit donc une corroboration expérimentale assez étendue.

Dans une direction légèrement différente, on peut donner une interprétation modulaire de la formule célèbre de Cardy dans la théorie de percolation (Kleban-Zagier). Cette formule donne la probabilité de percolation à travers un rectangle R — disons, de droite à gauche, et par rapport à un réseau en carrés de taille tendant vers 0 — comme une fonction hypergéométrique du birapport (rapport anharmonique) de ses quatre sommets. Le lien entre formes modulaires et équations différentielles implique alors une formule pour cette même probabilité, exprimée maintenant comme fonction du quotient r des longueurs des côtés de R, en termes modulaires : elle vaut $C \int_r^\infty \eta(it)^4 dt$, où $\eta(z)$ est la fonction êta de Dedekind et $C' = 2^{7/3}\pi^2/\sqrt{3}\Gamma(1/3)^3$. On trouve aussi à l'aide de la théorie des formes modulaires une caractérisation très simple de cette fonction : c'est la seule fonction de la forme $P(r) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{-2\pi(n+\alpha)r}$ avec $a_n \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ ayant la propriété $P(r) + P(1/r) = 1$. La dernière propriété étant facile pour la probabilité dont il s'agit, cette observation fournirait une preuve très simple de la formule de Cardy si on pouvait trouver une raison *a priori* pour laquelle la probabilité en question possèderait un développement en série du type indiqué, un fait qui dans l'analyse de Cardy est lié à la théorie des champs conformes.

4. Crochets de Rankin-Cohen et structures algébriques

La formule (2) implique immédiatement que si on a deux formes modulaires f et g de poids k et l, alors le « crochet » $[f, g]_1 = kfg' - lf'g$ est une forme modulaire de poids $k + l + 2$; plus généralement, il existe pour tout $n \geq 0$ une combinaison linéaire $[f, g]_n$ des produits $f^{(r)}g^{(n-r)}$ qui est modulaire de poids $k + l + 2n$. Ces « crochets de Rankin-Cohen », qui ont déjé été mentionnés brièvement dans le résumé du cours de l'année 2000-2001, sont une structure supplémentaire dans l'espace des formes modulaires qui est l'une des manifestations les plus importantes de l'interaction entre les formes modulaires et la différentiation. Dans le cours on en a discuté plusieurs aspects, en particulier les relations avec les formes modulaires de Hilbert (application de Doi-Naganuma) et de Siegel (théorie des polynômes sphériques généralisés développée conjointement avec T. Ibukiyama), et aussi les liens avec les opérateurs pseudo-différentiels et les algèbres vertex dont nous donnons quelques indications ici.

Par « opérateur pseudo-différentiel » (une terminologie plus correcte serait : symbole d'un tel opérateur) on entend une somme formelle $F = \sum_{n\geq 0} f_n(z)D^{-n}$, où D est l'opérateur d/dz, avec multiplication donnée par la règle de Leibniz. Si les f_n sont des fonctions holomorphes dans $\mathbb{H}$, alors le groupe Γ opère sur ces objets et on peut considérer l'anneau $\psi(\Gamma)$ des opérateurs pseudo-différentiels Γ-invariants. Si un tel F a un développement de la forme $\sum_{n\geq k} f_n(z)D^{-n}$, alors on voit facilement que le premier coefficient $f_k(z)$ est une forme modulaire de poids $2k$ sur Γ. On a donc une filtration $\psi(\Gamma) = \psi(\Gamma)_{\geq 0} \supseteq \psi(\Gamma)_{\geq 1} \supseteq \ldots$ avec $\psi(\Gamma)_{\geq k}/\psi(\Gamma)_{\geq k+1} \hookrightarrow M_{2k}(\Gamma)$, et on démontre par une construction explicite que cette dernière application est un isomorphisme, c'est-à-dire que chaque $f(z) \in M_{2k}(\Gamma)$ est le coefficient initial d'un opérateur pseudo-différentiel Γ-invariant. (On prend pour $f_n(z)$ un certain multiple de la dérivée $f^{(n-k)}(z)$.) La multiplication dans l'anneau $\psi(\Gamma)$ induit alors une multiplication non-commutative dans l'espace $\mathscr{M} = \prod_{k=0}^{\infty} M_{2k}(\Gamma)$. On peut varier cette construction et obtenir une collection infinie de multiplications sur $\mathscr{M}$ avec une structure algébrique sous-jacente assez intéressante. Ces multiplications s'expriment toutes à l'aide des crochets de Rankin-Cohen par une formule de la forme $f * g = \sum_{n\geq 0} c_n\, [f, g]_n$, où les c_n sont des coefficients numériques qui ne dépendent que des poids de f et g et qui ont des propriétés combinatoires assez intéressantes.

On peut, plus généralement, considérer la structure algébrique abstraite donnée par un espace vectoriel gradué $R = \oplus R_k$ muni de crochets $[\ ,\ ]_n : R_* \otimes R_* \to R_*$ de degré n ($n = 0, 1,\ldots$) qui satisfont à toutes les identités que possèdent les crochets de Rankin-Cohen usuels. Ces objets, qu'on appelle *algèbres de Rankin-Cohen*, sont dans un certain sens analogues aux « algèbres vertex » étudiées par Kac, Borcherds, ... Plus concrètement, on peut construire pour deux algèbres de Rankin-Cohen R et R' une multiplication *associative* (et commutative) sur le « produit tensoriel diagonal » $R \tilde{\otimes} R' = \prod_k R_k \otimes R'_k$ donnée par la formule $(f \otimes f')(g \otimes g') = \sum_n \gamma_n(k, l)\, [f, g]_n \otimes [f', g]_n$, où les $\gamma_n(k, l)$ sont des coefficients numériques (mais assez compliqués) qui dans le cas modulaire proviennent du lien entre les formes modulaires usuelles et les formes modulaires de Siegel de degré 2. Si on choisit pour R' une certaine algèbre de Rankin-Cohen standard, on obtient de cette manière une application de la catégorie des algèbres de Rankin-Cohen dans la catégorie des algèbres associatives et commutatives munies d'une opération de l'algèbre de Lie sl_2 par des dérivations, et cette application s'avère être un isomorphisme de catégories. Une construction analogue montre l'équivalence dans un certain contexte de la catégorie des algèbres vertex et les algèbres de Lie munies d'une opération de sl_2 par des dérivations. (Travail en cours d'élaboration avec K. Nagatomo, Osaka).

D. Z.

Conférences invitées

Darmstadt, Allemagne, juillet 2001 : *Komplexe Multiplikation—eine alte Theorie mit neuen Anwendungen*. (Conférence spéciale pour étudiants.)

Oberwolfach, Allemagne, juillet 2001 : *Cubic forms, quadratic forms, and cubic rings*. (Conférence dans « Explicit methods in number theory ».)

Osaka, Japon, septembre 2001 : *Periods and the Birch-Swinnerton-Dyer conjecture*. (Séminaire, Université d'Osaka.)

Hakuba, Japon, septembre 2001 : *Periods of Maass wave forms*. (Conférence dans le Japanese-German Seminar « Explicit Structures of Modular Forms and Zeta Functions ».)

Vienne, septembre 2001 : *Perioden von Modulformen*. (Conférence plénière, Kongress der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft/Jahrestagung der Deutschen Mathematikervereinigung.)

Cambridge, Massachusetts, USA, octobre 2001 : *Counting Graphs*. (« Basic notions » séminaire pour étudiants, Harvard University.)

Boston, Massachusetts, USA, octobre 2001 : *A three-term functional equation and the spectral theory of* $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$. (Séminaire de Physique, Boston University.)

New York, USA, octobre 2001 : *Periods of modular forms—from quadratic polynomials to spectral theory*. (« Ritt Lectures » du Columbia University ; deux conférences.)

Hambourg, Allemagne, novembre 2001 : *Gauss, Modulformen und diophantische Gleichungen*. (Conférence plénière, Herbsttagung 2001 der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, « 200 Jahre *Disquisitiones Arithmeticae* oder C.F. Gauβ und die Königin der Mathematik ».)

Paris, novembre 2001 : *Autour de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer*. (Colloquium, Jussieu-Chevaleret.)

Zurich, Suisse, décembre 2001 : *Diophantische L-Werte* et *L-Werte und Perioden*. (« Hopf-Vorlesung » de l'ETH Zürich et deuxième conférence.)

Lyon, décembre 2001 : *The Selberg zeta function from the geometric, dynamic and arithmetic points of view*. (Conférence lors du doctorat honoris causa remis à Dennis Sullivan par l'ENS Lyon.)

Paris, janvier 2002 : *Énumération des arbres et graphes*. (Séminaire de Mathématiques Élémentaires et Récréatives, Institut Henri Poincaré.)

Bonn, mars 2002 : *Bäume zählen*. (Conférence populaire dans le cadre du « Tag der offenen Tür » de l'Institut Max Planck de Mathématiques.)

Siegen, Allemagne, avril 2002 : *Modulformen, Fastmodulformen und Topologie*. (Colloquium, Université de Siegen.)

Regensburg, Allemagne, mai 2002 : *New numerical verifications of Beilinson's Conjecture*. (Conférence dans le « International Conference on Arithmetic Geometry ».)

Stockholm, Suède, mai 2002 : *Modular forms and their applications*. (Special semester on Conformal Field Theory, Mittag-Leffler Institute.)

Oslo, Norvège, juin 2002 : *Modular forms and their derivatives*. (Conférence plénière, Abel Bicentennial Conference.)

Autres missions

Bonn, Allemagne, juin 2001 : Co-organisateur (avec Yu. Manin, G. Faltings et G. Harder) du « Mathematische Arbeitstagung 2001 » à l'Institut Max Planck de Mathématiques.

Oberwolfach, Allemagne, juillet 2001 : Co-organisateur (avec H. Cohen et H. Lenstra) du workshop « Explicit methods in number theory ».

Cambridge, Angleterre, octobre 2001 : Membre, Scientific Steering Committee, Newton Institute.

Paris, novembre 2001 : Membre du jury, thèse de François Martin (« Périodes des formes modulaires de poids 1 »), Université Paris 7.

Amsterdam, Pays-Bas, février 2002 : Membre, Adviescommissie (conseil scientifique) de l'Institut Korteweg de Vries.

Bordeaux, mars 2002 : Président, Comité d'Évaluation sur les trois laboratoires de Mathématiques de Bordeaux 1.

Bonn, juin 2002 : Co-organisateur (avec M. Marcolli et John Lewis) du workshop « Maass wave forms, Selberg zeta function, and spin chains » à l'Institut Max Planck de Mathématiques.

PUBLICATIONS

Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function. Topology **40** (2001) 945-960.

(avec F. Rodriguez Villegas et J. Voloch) Constructions of plane curves with many points. Acta Arithmetica **99** (2001) 85-96.

(avec E. Wirsing) Multiplicative functions with $\Delta f(n) \to 0$. Acta Arithmetica **C.1** (2001) 75-78.

(avec T. Sasamoto) On the existence of a phase transition for an exclusion process on a ring. J. Phys. A **34** (2001) 5033-5039.

(avec Y. Ohno) Multiple zeta values of fixed weight, depth and height. Indagationes mathematicae **12** (2001) 483-487.

Leçon inaugurale, Chaire de Théorie des Nombres. Collège de France, No. 161 (2002) 1-35.

New points of view on the Selberg zeta function. Proceedings of the Japanese-German Seminar « Explicit Structures of Modular Forms and Zeta Functions », Ryūshi-dō (2002), 1-10.

Summen von Quadratzahlen, Summen von Kubikzahlen. Jahrbuch 2001 der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina, Leopoldina **47** (2002) 407-413.

(avec M. Kontsevich) Shūki. *Sūgaku no saisentan : 21 seiki e no chōsen, Vol. 1*, Springer, Tokyo (2002) 74-125 [= traduction en japonais de l'article « Periods » paru dans *Mathematics Unlimited 2001 and Beyond*, Springer, 2001].

Traduction du japonais : On « easy » zeta functions (traduction de l'article « " Yasashii " dzeita kansū ni tsuite » de T. Ibukiyama et H. Saito). Suugaku Expositions **12** (2001) 191-204.