Théorie des nombres

M. Don ZAGIER, professeur

COURS : FORMES MODULAIRES ET REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS

Il y a deux connexions frappantes entre la théorie des formes modulaires et la théorie des représentations des groupes finis.

L'une des deux, connue sous le nom du « *moonshine* » (= alcool de contrebande ou idées farfelues) a commencé il y a 36 ans avec l'observation de John McKay que le nombre 196883, qui est la dimension de la représentation irréductible non-triviale la plus petite du groupe « Monstre », est en même temps 1 de moins que le premier coefficient de Fourier non-trivial de la fonction modulaire $j(\tau) = E_4(\tau)^3 / \Delta(\tau)$. Ceci a mené grâce aux travaux de Conway-Norton, Frenkel-Lepowsky-Meurman et Borcherds au développement d'une théorie très riche, liée aux algèbres vertex et à la théorie conforme des champs. Beaucoup plus récemment, en 2010, Eguchi, Ooguri et Tachikawa ont découvert une deuxième théorie « *moonshine* », reliant cette fois les coefficients d'une *fausse* forme modulaire avec les dimensions des représentations irréductibles d'un autre groupe simple sporadique, le groupe de Mathieu M_{24}. Cette deuxième théorie, développée principalement par Cheng, Duncan et Harvey, et connue maintenant comme « *umbral moonshine* », est très étroitement liée au sujet du cours de l'année 2012-2013, et les fausses formes modulaires spéciales de bas niveau qui ont joué un rôle dans la théorie développée par Dabholkar, Murthy et moi-même, et exposée dans ce cours, se sont avérées être presque exactement les mêmes que celles qui apparaissent dans le *umbral moonshine*.

Ce lien a été décrit brièvement dans le cours de cette année, mais le sujet principal était la deuxième connexion entre les deux domaines mentionnés, où il s'agit des liens entre les représentations des groupes symétriques et les formes quasimodulaires, et surtout d'un très beau théorème de Bloch et Okounkov qui généralise un résultat antérieur de Kaneko et moi-même, et dont on a donné dans le cours une exposition et une nouvelle démonstration, ainsi que des extensions liées à des problèmes provenant de la théorie des surfaces plates. On en donnera un résumé ici.

Rappels sur les représentations des groupes finis

La première partie du cours était consacrée à une exposition de la théorie des représentations des groupes finis, très connue bien sûr, mais présentée ici avec quelques compléments non-standard. Soit G un groupe fini, $\mathfrak{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison $C \subseteq G$, et $\mathfrak{R}$ l'ensemble des représentations irréductibles non-isomorphes de G, numérotées $\{V_i\}_{i\in I}$ où V_i est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'une action $\pi_i : G \to GL(V_i)$ de G. Pour $i \in I$ et $C \in \mathfrak{C}$ on a le caractère $\chi_i(C)$, défini comme la trace de la matrice $\pi_i(g)$ pour un $g \in C$ quelconque. Il est aisé de voir (lemme de Schur) que $\mathrm{Hom}_G(V_j, V_i)$ s'identifie à $\mathbb{C}$ si $i = j$ et s'annule sinon. En appliquant l'identité générale $|G|^{-1}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(g,V) = \dim(V^G)$ à l'espace vectoriel $V = V_i \otimes V_j^*$ $(i,j \in I)$, on en déduit la « première relation d'orthogonalité » $\sum_{C\in\mathfrak{C}} |C|\chi_i(C)\overline{\chi}_j(C) = |G|\delta_{ij}$.

D'autre part, chaque représentation V de G de dimension finie est somme directe de représentations irréductibles, comme on le voit par induction sur dim V en décomposant V toujours comme la somme d'une sous-représentation et de son complément orthogonal par rapport à un produit scalaire hermitien. Il s'ensuit qu'on a un isomorphisme G-équivariant canonique $V \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_G(V,V_i),V_i)$, où l'application $V \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_G(V,V_i),V_i)$ est donnée par $v \mapsto (\phi \mapsto \phi(v))$, puisque ceci est vrai pour $V = V_i$ par le lemme de Schur. On en déduit un isomorphisme G-équivariant $V \cong \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G],V)$ donné par $v \mapsto ([g] \mapsto gv)$. Si on applique ce résultat à l'espace $V = \mathbb{C}[G]$, on obtient un isomorphisme canonique et $(G\times G)$-équivariant d'algèbres

$$\mathbb{C}[G] \;\cong\; \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_i,V_i) \;=\; \bigoplus_{i\in I} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i), \qquad [g] \mapsto (\pi_i(g))_{i\in I} \quad . \tag{1}$$

Cette identité implique tous les résultats standards de la théorie. En comparant les dimensions des deux côtés on trouve $|G| = \sum_{i\in I} d_i^2$, où $d_i = \chi_i(1) = \dim V_i$, et en comparant les dimensions des centres on trouve $|\mathfrak{R}| = |\mathfrak{C}|$, puisque une base pour $Z(\mathbb{C}[G])$ est donnée par les éléments $e_C = \sum_{g\in C}[g]$ $(C \in \mathfrak{C})$ et le centre de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ est de dimension 1. En remarquant que l'inverse à gauche d'une matrice carrée est aussi un inverse à droite, on déduit la « deuxième relation d'orthogonalité » $|G|^{-1}\sum_{i\in I}\chi_i(C)\overline{\chi}_i(C') = |C|^{-1}\,\delta_{C,C'}\,(C,C' \in \mathfrak{C})$ de la première. (On la voit également en calculant des deux côtés de (1) la trace de $(g,\, g') \in C\times C'$.)

Une conséquence de (1) particulièrement importante pour nous est la *formule de Frobenius*, qui donne pour tout $k > 0$ et toutes classes $C_1,\ldots,C_k \in \mathfrak{C}$ la valeur du nombre $N(C_1,\ldots,C_k)$ des k-tuples $(c_1,\ldots,c_k) \in C_1\times\cdots\times C_k$ avec $c_1\cdots c_k = 1$. En effet, l'identité (1) donne $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{i\in I} d_i\cdot[V_i]$ comme représentation de G. D'autre part, l'image de l'élément central $e_C \in \mathbb{C}[G]$ par π_i est un multiple scalaire $f_i(C)$ de l'identité pour tout $i \in I$ et $C \in \mathfrak{C}$ par le lemme de Schur, et en calculant la trace des deux côtés de $\sum_{g\in C}\pi_i(g) = f_i(C)\cdot 1_{V_i}$ on trouve $f_i(C) = |C|\chi_i(C)/d_i$. Le calcul $|G|\,N(C_1,\ldots,C_k) = \mathrm{Tr}(e_{C_1}\cdots e_{C_k},\mathbb{C}[G]) = \sum_{i\in I} f_i(C_1)\cdots f_i(C_k)d_i^2$ donne alors

$$N(C_1,\ldots,C_k) = \frac{|C_1|\cdots|C_k|}{|G|}\sum_{i\in I}\frac{\chi_i(C_1)\cdots\chi_i(C_k)}{d_i^{k-2}} \quad . \tag{2}$$

Cette formule, qui se réduit pour $k = 2$ à la deuxième relation d'orthogonalité, donne pour $k = 3$ les constantes de structure de l'anneau abélien $\mathbb{Z}[G]$ par rapport à sa $\mathbb{Z}$-base $\{e_C\}_{C\in\mathfrak{C}}$, puisque pour $A, B \in \mathfrak{C}$ on a évidemment $e_A\, e_B = \sum_{C\in\mathfrak{C}} N(A, B, C^{-1})\, e_C$.

Revêtements des surfaces de Riemann et formule de Frobenius généralisée

Le nombre $N(C_1, \dots, C_k)$ calculé par la formule de Frobenius peut s'écrire comme le nombre d'homomorphismes $\rho : F_{k-1} \to G$ avec $\rho(\xi_j) \in C_j$ pour tout j, où F_{k-1} est le groupe libre de rang $k - 1$ dans la présentation $\langle \xi_1,\dots,\xi_k \mid \xi_1 \cdots \xi_k = 1\rangle$. Ce groupe s'identifie au groupe fondamental $\pi_1(S^2 \setminus \{P_1, \dots, P_k\})$ du complément de k points dans la 2-sphère, et le nombre $N(C_1, \dots, C_k)$ s'interprète comme le nombre de revêtements (correctement comptés) galoisiens de S^2 avec fibre F (un ensemble donné muni d'une action fidèle de G) avec groupe de Galois G, ramifiés seulement dans les points P_j et tels que l'opération sur une fibre fixée induite par la monodromie locale autour du point P_j appartient à la classe C_j pour tout j.

Si on remplace S^2 par une surface réelle (ou courbe complexe) $\sum_g$ de genre $g \geq 0$, le groupe F_{k-1} se remplace par $\pi_1(\Sigma_g \setminus \{P_1, \dots, P_k\})$, et le nombre $N_g(C_1, \dots, C_k)$ des revêtements ramifiés avec les mêmes propriétés que dans le cas S^2 est donné par le nombre des $(2g + n)$-tuples $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_k) \in G^{2g} \times C_1 \times \cdots \times C_k$ avec $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]\, c_1 \cdots c_k = 1$. Pour calculer ces nombres, il suffit de remarquer que $[a, b] = aa'$ avec $a' = ba^{-1}b^{-1}$ appartenant à la classe de conjugaison inverse de celle de a, et que pour $A \in \mathfrak{C}$ et $a \in A$ le nombre de b donnant chaque $a' \in A^{-1}$ est égal à $|G| / |A|$. Ceci donne

$$N_g(C_1, \dots, C_k) \sum_{A_1,\dots,A_g \in \mathfrak{C}} \frac{|G|}{|A_1|} \cdots \frac{|G|}{|A_g|} N(A_1, A_1^{-1}, \dots, A_g, A_g^{-1}, C_1, \dots, C_k),$$

et en substitutant dans cette identité la formule de Frobenius usuelle et la deuxième relation d'orthogonalité on obtient immédiatement la formule finale

$$\frac{N_g(C_1,\dots,C_k)}{|G|^{2g-1}} = \sum_{i\in I} \frac{f_i(C_1) \cdots f_i(C_k)}{d_i^{2g-2}} = |C_1| \cdots |C_k| \sum_{i\in I} \frac{\chi_i(C_1) \cdots \chi_i(C_k)}{d_i^{k+2g-2}}\ . \quad (3)$$

Elle n'est guère plus difficile que la formule pour le cas $g = 0$, mais beaucoup moins connue.

Représentations du groupe symétrique

On spécialise maintenant ces résultats au cas particulier $G = \mathfrak{S}_n$, le groupe symétrique d'ordre n, pour lequel on notera $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{R}$ par $\mathfrak{C}_n$ et $\mathfrak{R}_n$. La théorie pour ce groupe a plusieurs propriétés spéciales par rapport au cas général :

(i) Les valeurs des caractères $\chi_i(C)$ et des nombres $f_i(C) = |C|\, \chi_i(C)/d_i$ sont des entiers rationnels et non seulement des entiers algébriques comme dans le cas général ;

(ii) Chaque représentation irréductible V de G est munie d'une base qui est canonique à multiplication par des facteurs scalaires près ;

(iii) On a non seulement $|\mathfrak{R}|=|\mathfrak{C}|$, mais une bijection canonique entre $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{C}$;
(iv) On a une construction explicite de toutes les représentations irréductibles de G.

Pour voir (i), on note que les valeurs $\chi_i(g) = \mathrm{Tr}(\pi_i(g))$ pour G général sont des sommes de racines d'unités (et donc des entiers algébriques) dont les conjugués de Galois sont simplement les valeurs de $\chi_i(g^m)$ avec $m \in \mathbb{Z}$ premier à l'ordre de G. Mais pour $G = \mathfrak{S}_n$ les éléments g et g^m appartiennent toujours à la même classe de conjugaison, puisque les permutations correspondantes ont des cycles avec les mêmes longueurs. Ceci implique que les nombres $\chi_i(g)$ sont invariants par Galois et donc rationnels. La propriété (ii) est une conséquence du fait que la restriction à $\mathfrak{S}_{n-1}$ de chaque représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ se décompose en une somme de représentations irréductibles distinctes (multiplicité 1), et en répètant cette opération pour les inclusions $\mathfrak{S}_n \supset \mathfrak{S}_{n-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{S}_1$ on obtient une décomposition canonique de chaque représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ comme somme directe de sous-espaces de dimension 1. Les propriétés (iii) et (iv) se démontrent en même temps en identifiant $\mathfrak{C}_n$ et $\mathfrak{R}_n$ de façon explicite avec l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des permutations de n. Pour $\mathfrak{C}_n$ ceci est évident : une classe de conjugaison de permutations $\sigma \in \mathfrak{C}_n$ correspond à la partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_\ell \geq 1)$ de n où les λ_j sont les longueurs des cycles de σ. Pour $\mathfrak{R}_n$ il faut construire des représentations irréductibles V_λ, deux-à-deux non-isomorphes, pour chaque $\lambda \in \mathcal{P}_n$. Dans le cours, on a expliqué en détail une telle construction qui remonte à B. van der Waerden et J. von Neumann, en suivant et simplifiant l'exposition donnée dans le livre *Invariant Theory, Old and New* de J. Dieudonné et J. Carrell. On donne ici la description de la représentation V_λ.

Soit Y_λ le *diagramme de Young* de λ, consistant en n cases ou cellules, reparties en ℓ lignes de longueurs décroissantes $\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell$. La représentation V_λ est construite comme une représentation concrète du groupe $\mathfrak{S}_\lambda$ des permutations de ces cases (et donc une représentation de $\mathfrak{S}_n$ seulement à isomorphisme près, puisque pour identifier $\mathfrak{S}_\lambda$ avec $\mathfrak{S}_n$ il faut numéroter les cases de Y_λ). On note par $\mathcal{A}_\lambda$ et $\mathcal{B}_\lambda$ les sous-groupes de $\mathfrak{S}_\lambda$ qui laissent invariantes les lignes et les colonnes de Y_λ. Visiblement $\mathcal{A}_\lambda \cap \mathcal{B}_\lambda = \{e\}$. On définit trois éléments $\mathcal{A}_\lambda$, $\mathcal{B}_\lambda$ et X_λ de l'algèbre de groupe $\mathcal{R}_\lambda = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_\lambda]$ par

$$A_\lambda = \sum_{a\in\mathcal{A}_\lambda} [a], \quad B_\lambda = \sum_{b\in\mathcal{B}_\lambda} \varepsilon(b)[b], \quad X_\lambda = A_\lambda B_\lambda = \sum_{(a,b)\in\mathcal{A}_\lambda\times\mathcal{B}_\lambda} \varepsilon(b)[ab],$$

où $\varepsilon(b)$ est le signe de la permutation b. Alors la représentation V_λ cherchée est donnée par $V_\lambda = \mathcal{R}_\lambda X_\lambda \subseteq \mathcal{R}_\lambda$. Pour démontrer qu'elles sont irréductibles et deux-à-deux non-isomorphes, on utilise deux fois un lemme de von Neumann non-évident mais relativement facile à démontrer, dont l'énoncé est comme il suit. Soient λ, $\mu \in \mathcal{P}_n$ avec $\lambda \geq \mu$ dans l'ordre lexicographique (c'est-à-dire ou bien $\lambda = \mu$ ou bien $\lambda_1 = \mu_1,\ldots,\lambda_{i-1} = \mu_{i-1}$ et $\lambda_i > \mu_i$ pour un certain i), et soit $\phi : Y_\lambda \to Y_\mu$ une bijection quelconque entre leurs diagrammes de Young. Alors on a, soit que $\mathcal{A}_\lambda \cap \phi^{-1}\,\mathcal{B}_\mu\phi$ contient une transposition (c'est-à-dire qu'il y a deux cases dans la même ligne de Y_λ dont les images par ϕ se trouvent dans la même colonne de Y_μ), soit $\lambda = \mu$ et $\phi^{-1} \in \mathcal{A}_\lambda\mathcal{B}_\lambda$.

Dans le cours on a discuté aussi des trois polynômes

$$\Phi_C(X) \in \langle 1, X, \ldots, X^{n-1}\rangle, \quad P_C(r) \in \langle 1, r, \ldots, r^{n-1}\rangle, \quad Q_C(k) \in \langle k, k^2, \ldots, k^n\rangle$$

qu'on peut associer à chaque classe de conjugaison $C \in \mathfrak{C}_n$, et qui se déterminent mutuellement par des transformations linéaires qu'on peut résumer par l'identité de fonctions génératrices

$$\Phi(X) = \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{n-1}{r}P(r)X^r = (1-X)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}Q(k)\,X^{k-1}.$$

Ces polynômes, que j'ai introduits en 1995 et dont j'ai parlé dans l'appendice du livre *Graphs on Surfaces and their Applications* de S. Lando et A. Zvonkin (Springer, 2004), ont plusieurs applications à des problèmes combinatoires liés aux groupes symétriques, par exemple :

• une démonstration extrêmement courte de mon théorème avec J. Harer donnant la valeur de la caractéristique d'Euler-Poincaré de l'espace des modules des courbes de genre g ;

• une démonstration simple de la formule de Goulden-Jackson qui donne la valeur des nombres de Frobenius $N(C_1,\dots,C_k)$ pour $G = \mathfrak{S}_n$ dans le cas où l'une des classes de conjugaison C_i est celle des permutations cycliques ;

• chaque élément pair $g \in \mathfrak{S}_n$ est un produit de deux permutations cycliques, et le nombre de ses représentations comme un tel produit est entre $\frac{2(n-1)!}{n+2}$ et $\frac{2(n-1)!}{n+\frac{19}{29}}$ si g est sans points fixes, les constantes 2 et $\frac{19}{29}$ dans les numérateurs de ces bornes étant les meilleures possibles. Je renvoie pour les détails au livre cité, en ne donnant ici que les définitions des polynômes :

1. $\Phi_C(X)$ est le polynôme caractéristique $\det(1 - g\,X,\,R_1)$ d'un élément $g \in C$ opérant sur la représentation irréductible standard $R_1 = \mathbb{C}^n/\mathbb{C}(1,\dots,1)$ de dimension $n-1$ de $\mathfrak{S}_n$. Si $C \in \mathfrak{C}_n$ correspond à la partition $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_\ell) \in \mathcal{P}_n$, ce polynôme est donné par

$$\Phi_C(X) = \frac{(1-X^{\lambda_1})\cdots(1-X^{\lambda_\ell})}{1-X}.$$

2. Soit χ_r $(r = 0,\dots,n-1)$ le caractère de la représentation irréductible $\wedge^r(R_1)$ de $\mathfrak{S}_n$. On définit $P_C(r)$ comme le polynôme unique de degré $\le n-1$ tel que

$$P_C(r) = \frac{\chi_r(C)}{\chi_r(1)} = \frac{\chi_r(C)}{\binom{n-1}{r}} \quad (0 \le r \le n-1).$$

3. Pour $g \in \mathfrak{S}_n$ soit $\ell(g)$ le nombre de cycles de g, de façon que $\ell(g) = \ell$ si la classe de conjugaison de g correspond à la partition $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)$ de n. Soit σ_0 l'élément cyclique $(12\,\dots\,n)$ de $\mathfrak{S}_n$. Alors le troisième polynôme $Q_C(k)$ est donné par

$$Q_C(k) = \frac{1}{|C|}\sum_{g\in C} k^{\,\ell(g\sigma_0)}.$$

Comme exemple numérique, si $n = 6$ et C correspond à la permutation $\lambda = (4, 1, 1)$ on a $\Phi_C(X) = (1-X)^2(1+X)(1+X^2)$, $P_C(r) = -(r-2)(r-3)(2r-5)/30$ et $Q_C(k) = k^2(k^2+5)/6$.

Revêtements ramifiés des tores et formes quasimodulaires

Dans la théorie de la « symétrie miroir », très importante dans la géométrie algébrique et la physique théorique actuelles, on pose la question de compter (dans un sens très précis) le nombre des applications holomorphes d'une courbe complexe de genre g dans une variété de Calabi-Yau X telles que l'image de la classe fondamentale de la courbe soit un élément donné de $H_2(X)$. Pour les applications en physique mathématique (théorie des cordes) on s'intéresse surtout au cas où X est de dimension 3, mais la question est intéressante en toute dimension. Si la dimension de X est égale à 1, ça revient au problème de compter les revêtements de degré donné d'une courbe de genre 1 par une courbe de genre donnée, et c'est dans ce contexte que les physiciens Dijkgraaf, Douglas et Rudd ont découvert une connexion inattendue avec les formes modulaires qui a été démontrée ensuite par Kaneko et moi-même :

Théorème. *La fonction génératrice F_g qui compte les revêtements génériquement ramifiés d'une surface de genre* 1 *par des surfaces de genre g est une forme quasimodulaire de poids* $6g - 6$ *sur* $SL(2,\mathbb{Z})$ *pour tout* $g > 1$.

Rappelons très brièvement les notions des formes modulaires et quasimodulaires. Soit Γ un sous-groupe Fuchsien de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et k un entier positif. Alors une forme modulaire de poids k sur Γ est une fonction f holomorphe et de croissance polynomiale dans le demi-plan de Poincaré $\mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \Im(\tau) > 0\}$ qui satisfait à l'équation de transformation $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathfrak{H}$ et toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$. Les formes quasimodulaires sont des fonctions holomorphes en $\mathfrak{H}$ qui satisfont à une propriété de transformation modulaire un peu plus générale qu'on n'a pas besoin de préciser ici (elle est donnée en détail dans les résumés de cours des années 2000-2001 et 2001-2002), puisqu'il suffit dans notre contexte de savoir que les anneaux M_* et $\widetilde{M}_*$ des formes modulaires et quasimodulaires pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sont donnés par $M_* = \mathbb{C}[Q,R]$ et $\widetilde{M}_* = \mathbb{C}[P,Q,R]$, où P, Q, R (notations de Ramanujan) sont les séries d'Eisenstein de poids 2, 4 et 6 définies par

$$P = 1 - 24\sum_{n\geq 1}\frac{n\,q^n}{1-q^n}, \quad Q = 1 + 240\sum_{n\geq 1}\frac{n^3 q^n}{1-q^n}, \quad R = 1 - 504\sum_{n\geq 1}\frac{n^5 q^n}{1-q^n},$$

où $q = e^{2i\pi\tau}$. Le théorème dit alors que F_g pour tout $g \geq 2$ est un polynôme de degré pondéré $6g - 6$ en P, Q et R, les premier cas étant

$$F_2(\tau) = \frac{5P^3 - 3PQ - 2R}{51840} = q^2 + 8q^3 + 30q^4 + 80q^5 + 180q^6 + \cdots.$$

Nous donnons maintenant la définition précise de F_g et une esquisse de la démonstration du théorème. Notons par $h(k,\, n)$ (resp. $h^0\,(k,\, n)$) le nombre des classes d'isomorphisme pondérées de revêtements (resp. revêtements connexes) de degré n d'une surface de Riemann X donnée de genre 1 ayant ramification générique au-dessus de k points donnés de X. Ici « pondéré » veut dire qu'on compte chaque revêtement avec une multiplicité égale à la réciproque du nombre de ses automorphismes sur X, et « générique » qu'exactement deux des n feuilles du revêtement se rejoignent au-dessus de chaque point de ramification. D'après la formule de Riemann-Hurwitz le genre des revêtements comptés par $h^0(k, n)$ ne dépend que de k (parce que le genre de X est égal à 1) et est donné par $k = 2g - 2$. On pose alors

$$F_g(\tau) = \sum_{n\geq 1} h^0(2g-2, n)\, q^n \qquad (q = e^{2i\pi\tau}).$$

D'après la discussion donnée ci-dessus de la relation entre les revêtements des surfaces et les nombres de Frobenius généralisés, on a $h(k, n) = N_1(C_1, \ldots, C_k)/n!$ avec $C_1 = \ldots = C_k = T$, la classe de conjugaison des transpositions dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. La formule de Frobenius généralisée (3) donne alors la formule

$$h(k, n) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} f_T(\lambda)^k,$$

où λ parcourt les partitions de n et où on a noté simplement par $f_T(\lambda)$ la valeur de la fonction $f_{V_\lambda}(T)$ associée à la représentation irréductible V_λ de $\mathfrak{S}_n$ correspondante à λ et à la classe T. Mais un argument standard donne la relation

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} h^0(k, n)\,\frac{X^k}{k!}\,q^n = \log\left(1+\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} h(k, n)\,\frac{X^k}{k!}\,q^n\right)$$

entre les nombres des revêtements connexes et arbitraires. On trouve donc

$$\sum_{g=1}^{\infty} F_g(\tau)\,\frac{X^{2g-2}}{(2g-2)!} = \log\left(1+\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{\lambda\in P_n} e^{f_T(\lambda)X}\right)q^n\right). \tag{4}$$

D'autre part, un calcul avec les « coordonnées de Frobenius » (définies plus bas) donne

$$1+\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{\lambda\in P_n} u^{f_T(\lambda)}\right)q^n = \text{coefficient de } \zeta^0 \text{dans } P(u,q,\zeta), \tag{5}$$

où la série formelle $P(u,q,\zeta) \in \mathbb{Z}[u^{\pm 1/2}, \zeta^{\pm 1}][[q^{1/2}]]$ est définie comme le produit

$$P(u,q,\zeta) = \prod_{m\in\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots\}} (1-u^{m^2/2}q^m\zeta)\,(1-u^{-m^2/2}q^m\zeta^{-1}). \tag{6}$$

La formule pour $F_g(\tau)$ obtenue en combinant les équations (4)–(6) est le résultat trouvé par Dijkgraaf et Douglas et le point de départ pour la démonstration de la quasimodularité des F_g donnée par Kaneko et moi-même, dont les deux pas principaux sont les suivants :

(i) Le coefficient de $X^j Z^l$ en $P(e^X, q, e^Z)$ est une forme quasimodulaire de poids $3j + l$ sur le sous-groupe de congruence $\Gamma^0(2)$ de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ pour tout $j, l \geq 0$. En effet, un calcul direct montre que le coefficient de $X^j Z^l$ en $\log P(e^X, q, e^Z)$ est un multiple de la $(2j)$-ième dérivée d'une série d'Eisenstein de poids $l - j$ sur $\Gamma^0(2)$ si $l > j$ et de la $(j + l - 1)$-ième dérivée d'une série d'Eisenstein de poids $j - 1 + 2$ sur $\Gamma^0(2)$ si $j \geq l$, et la n-ième dérivée d'une forme quasimodulaire de poids k est une forme quasimodulaire de poids $k + 2n$.

(ii) La fonction $P(u, q, \zeta)$ s'exprime comme $\sum_{r\in\mathbb{Z}}(-1)^r P_0(u, u^r q)u^{(4r^3-r)/24}q^{r^2/2}\zeta^r$ pour une certaine fonction $P_0(u, q)$. C'est une conséquence de l'équation fonctionelle $P(u,uq,u^{1/2}q\zeta) = -w^{-1/8}q^{-1/2}\zeta^{-1}P(u,q,\zeta)$ de la fonction P.

Une induction un peu compliquée montre à partir de ces deux énoncés que le coefficient de X^k en $P_0(e^X, q)$ est une forme quasimodulaire de poids $3k$ sur $\Gamma^0(2)$ pour tout $k \geq 0$, et le fait que ce coefficient appartient à $\mathbb{Q}[[q]]$ et non seulement à $\mathbb{Q}[[q^{1/2}]]$ permet d'en déduire qu'il est quasimodulaire pour le groupe plus grand $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Cela donne le théorème.

Le théorème de Bloch-Okounkov

Le théorème de Bloch-Okounkov est une généralisation merveilleuse du théorème ci-dessus, dont il a été motivé. On en expliquera l'énoncé ici et une démonstration très courte dans la section suivante.

Notons par $\mathcal{P} = \bigcup_n \mathcal{P}_n$ l'ensemble de toutes les partitions. Pour une fonction arbitraire $f : \mathcal{P} \to \mathbb{Q}$ on définit le « q-crochet » ou « q-moyenne » de f comme la série formelle

$$\langle f\rangle_q = \frac{\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} f(\lambda)q^{|\lambda|}}{\sum_{\lambda\in\mathcal{P}} q^{|\lambda|}} \in \mathbb{Q}[[q]]\,, \tag{7}$$

où $|\lambda| = n$ pour $\lambda \in \mathcal{P}_n$. Si f est de croissance polynomiale en $|\lambda|$, ce qui sera le cas pour toutes les fonctions que nous traitons, alors les séries dans le numérateur et dénominateur convergent pour tout $q \in \mathbb{C}$ de valeur absolue < 1 et nous pouvons considérer $\langle f\rangle_q$ comme une fonction holomorphe dans le demi-plan de Poincaré $\mathfrak{H}$ en posant $q = e^{2\pi i\tau}$ pour $\tau \in \mathfrak{H}$. Dans le langage de la physique statistique, on peut voir $\langle f\rangle_q$ comme l'espérance d'une observable f dans un système statistique dont les états sont indexés par les partitions et où l'état correspondant à $\lambda \in \mathcal{P}$ a l'énergie $|\lambda|$ et le poids $q^{|\lambda|}$; alors $2\pi\tau/i$ correspondrait à la réciproque de la température multipliée par la constante de Boltzmann, et le dénominateur dans (7) serait la function de partition de l'ensemble.

Dans ce langage, le résultat dont on a discuté dans la dernière section revient à dire que la q-moyenne $\langle f_T^k\rangle_q$ est une forme quasimodulaire de poids $3k$ sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ pour tout $k \geq 0$. La généralisation donnée par Bloch et Okounkov consiste à dire qu'il y a toute une suite de fonctions $Q_n : \mathcal{P} \to \mathbb{Q}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, dont les premières sont données par

$$Q_0(\lambda) = 1, \quad Q_1(\lambda) = 0, \quad Q_2(\lambda) = |\lambda| - \frac{1}{24}, \quad Q_3(\lambda) = f_T(\lambda) \qquad (\forall\lambda \in \mathcal{P}),$$

telle que $\langle f\rangle_q$ est une forme quasimodulaire sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ pour tout polynôme f dans les fonctions $Q_n(\lambda)$, le poids de $\langle f\rangle_q$ étant k si f est homogène de degré pondéré k (où on donne à Q_n le poids n).

Pour définir les fonctions Q_n, il faut introduire les *coordonnées de Frobenius* d'une partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathcal{P}$. Ce sont les nombres $(r; a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_r)$, où r est la longueur de la diagonale plus longue du diagramme de Young Y_λ de λ et a_i (resp. b_i) donne le nombre de cases de Y_λ à droite (resp. en dessous) de la case

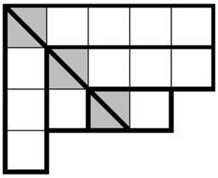
i-ième de cette diagonale. Alors les nombres $Q_k(\lambda)$ pour $k \geq 1$ sont définis par la formule

$$Q_k(\lambda) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{r} \left(\left(a_i + \frac{1}{2} \right)^{k-1} - \left(-b_i - \frac{1}{2} \right)^{k-1} \right) + \beta_k \ , \tag{8}$$

où les nombres rationnels $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -\frac{1}{24}$, … sont les coefficients de la série génératrice

$$\frac{z/2}{\sinh(z/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \ .$$

Un exemple est donné par le diagramme suivant pour $\lambda = (5,5,4,1) \in \mathcal{P}_{15}$.



Partition $\lambda = (5,5,4,1)$
Coordonnées de Frobenius (3; 4,3,1; 3,1,0)
$(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots) = (0, \frac{359}{24}, 10, \frac{176407}{5760}, \frac{205}{12}, \ldots)$

Cette définition à l'allure peu naturelle peut s'écrire de façon différente et plus jolie. On associe à $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq 0$ l'ensemble $X_\lambda = \{\lambda_j - j + \frac{1}{2} \mid j \geq 1\} \subset \mathbb{F}$, où $\mathbb{F} := \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ (« fermions »). On vérifie sans difficulté que l'ensemble X_λ est lié aux coordonnées de Frobenius par

$$\mathbb{F}^+ \cap X_\lambda = \left\{ a_r + \frac{1}{2}, \ldots, a_1 + \frac{1}{2} \right\}, \quad \mathbb{F}^- \smallsetminus X_\lambda = \left\{ -b_1 - \frac{1}{2}, \ldots, -b_r - \frac{1}{2} \right\} \tag{9}$$

et que l'application $\lambda \mapsto X_\lambda$ donne une bijection entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}^0$, où $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles $X \subset \mathbb{F}$ qui sont bornés en dessus et dont les compléments $\mathbb{F} \smallsetminus X$ sont bornés en dessous, et $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}^0 \subset \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ l'ensemble des X pour lesquels les ensembles finis $\mathbb{F}^+ \cap X$ et $\mathbb{F}^- \smallsetminus X$ ont la même cardinalité. À chaque ensemble $X \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ on associe la série génératrice formelle

$$w_X(T) = \sum_{x \in X} T^x \ \in T^{1/2} \mathbb{Z}[T, T^{-1}]] \, .$$

Cette série converge pour $T > 1$ et appartient à $\frac{T^{1/2}}{T-1} + T^{1/2}\ \mathbb{Z}[T^{-1}, T]$. Elle définit donc une fonction méromorphe $W_X(z)$ et une suite de coefficients rationnels $\{Q_k(X)\}_{k \geq 0}$ par

$$W_X(z) := w_X(e^z) =: \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(X) z^{k-1} \quad (0 < |z| < 2\pi) \ .$$

Le coefficient $Q_0(X)$ est toujours égal à 1, et $Q_1(X) = |\mathbb{F}^+ \cap X| - |\mathbb{F}^- \backslash X|$ est un entier qui s'annule si et seulement si $X \in \mathcal{X}_{\mathbb{F}}^0$. Pour $\lambda \in \mathcal{P}$ on pose $Q_k(\lambda) = Q_k(X_\lambda)$ et $W_\lambda(z) = W_{X_\lambda}(z) = \sum_{k \geq 0} Q_k(\lambda) z^{k-1}$. La relation (9) implique immédiatement l'égalité de ces nouveaux nombres avec la définition (8), puisque $\frac{T^{1/2}}{T-1}=\frac{z/2}{\sinh(z/2)}$ pour $T=e^z$.

Démonstration simple du théorème de Bloch-Okounkov

La série thêta classique de Jacobi est la série formelle $\theta(z)\in\mathbb{Q}[[q]]\,[[z]]$ définie par

$$\theta(z)=\sum_{\nu\in F}(-1)^{[\nu]}\,e^{\nu z}\,q^{\nu^2/2}\qquad(\mathbb{F}:=\mathbb{Z}+\frac{1}{2}).\tag{10}$$

C'est une série impaire avec $\theta'(0)=\eta(\tau)^3$ (η = fonction η de Dedekind) et on a

$$\frac{\theta(z)}{\theta'(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(\tau)z^{n+1}$$

avec $H_n\in\widetilde{M}_n$ pour tout $n\geq 0$, les premières valeurs étant $H_0=1$, $H_2=\frac{P}{24}$, $H_4=\frac{5P^2-2Q}{5760}$ et $H_6=\frac{35P^3-42PQ+16R}{2903040}$ (et bien sûr $H_n=0$ pour n impair). Nous notons par $\mathcal{R}$ la $\mathbb{Q}$-algèbre libre $\mathbb{Q}[Q_1,Q_2,\ldots]$, par Λ sa sous-algèbre libre $\mathbb{Q}[Q_2,Q_3,\ldots]$, et par ∂ la dérivation $\partial:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ définie sur les générateurs de $\mathcal{R}$ par $\partial(Q_k)=Q_{k-1}$ (avec $Q_0=1$). On considère chaque élément de $\mathcal{R}$ comme une fonction sur $\mathcal{P}$ en envoyant $Q_k\in\mathcal{R}$ à la fonction $\lambda\mapsto Q_k(\lambda)$. Avec ces notations, le théorème de Bloch-Okounkov dit qu'on a une application $\mathcal{R}\to\widetilde{M}_*$ d'espaces vectoriels gradués définie par $f\mapsto\langle f\rangle_q$. Puisque la dérivation ∂ diminue le poids d'un élément de $\mathcal{R}$, on a $\partial^N(f)=0$ pour chaque $f\in\mathcal{R}$ et chaque N suffisamment grand, et on peut donc définir $\langle\theta(\partial)f\rangle_q\in\mathbb{Q}[[q]]$ par linéarité pour chaque $f\in\mathcal{R}$.

Théorème. *On a $\langle\theta(\partial)g\rangle_q=0$ pour tout $g\in\Lambda$.*

Ce théorème implique presque immédiatement l'énoncé $f\in\mathcal{R}_k\Rightarrow\langle f\rangle_q\in\widetilde{M}_k$ de Bloch-Okounkov, puisqu'on montre sans peine que pour $k>0$ (le cas $k=0$ étant trivial) f se décompose comme la somme d'un élément de $Q_1\mathcal{R}_{k-1}$ (pour lequel la q-moyenne s'annule, puisque $Q_1(\lambda)=0$ pour tout λ) et d'un élément $\partial(g)$ avec $g\in\Lambda_{k+1}$, et donc en appliquant le théorème à g

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(\tau)\,\langle\partial^n(f)\rangle_q\;=\langle f\rangle_q+\frac{P}{24}\langle\partial^2(f)\rangle_q+\frac{5P^2-2Q}{5760}\,\langle\partial^4(f)\rangle_q+\cdots\quad,$$

ce qui donne le théorème par induction sur le poids puisque le poids $k-n$ de $\partial^n(f)$ est strictement inférieur à k pour $n>0$.

Pour démontrer le théorème, on utilise la bijection $\mathcal{P}\approx\mathcal{X}_{\mathbb{F}}^0$ décrite ci-dessus. Elle implique une autre bijection $\mathbb{F}\times\mathcal{P}\approx\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}$ définie par $(\nu,\lambda)\mapsto X=X_\lambda+\nu$, où l'ensemble $\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}$ est défini comme $\mathcal{X}_{\mathbb{F}}$ avec $\mathbb{F}$ remplacé par $\mathbb{Z}$. Sous cette bijection les invariants de X et de λ sont liés par $Q_1(X)=\nu$, $Q_2(X)=|\lambda|-\frac{1}{24}+\frac{\nu^2}{2}$ et plus généralement $f(X)=(e^{\nu\partial}f)(\lambda)$ pour tout $f\in\mathcal{R}$, comme on le voit aisément en notant que

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(X)\, z^{k-1} = w_{X_\lambda+\nu}(e^z) \;=\; e^{\nu z} W_\lambda(e^z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} Q_{k-j}(\lambda)\,\frac{\nu^j}{j!}\right) z^{k-1}$$

ou $Q_k(X) = (e^{\nu\partial} Q_k)(\lambda)$, ce qui implique le cas général puisque e^{∂} est un automorphisme et les Q_n des générateurs de $\mathcal{R}$. Alors les équations (7) et (10) donnent

$$\frac{\langle\theta(\partial)g\rangle_q}{\eta(\tau)} \;=\; \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{F}\\ \lambda\in\mathcal{P}}} (-1)^{[\nu]}\,(e^{\nu\partial}g)(\lambda) q^{|\lambda|-1/24+\nu^2/2} \;=\; \sum_{X\in\mathcal{X}_{\mathbb{Z}}} (-1)^{[Q_1(X)]} g(X)\, q^{Q_2(X)}$$

pour tout $g \in \mathcal{R}$, et cette expression s'annule pour $g \in \Lambda$ puisque l'involution $\mathcal{X}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{X}_{\mathbb{Z}}$ définie par

$$X \mapsto X^* = \begin{Bmatrix} X \setminus \{0\} & \text{si } 0 \in \mathrm{X} \\ X \cup \{0\} & \text{si } 0 \not\in \mathrm{X} \end{Bmatrix}$$

change $w_X(T)$ par ± 1 et change donc $Q_1(X)$ par ± 1 en laissant invariants tous les $Q_k(X)$ pour $k \geq 2$, de façon que les termes dans la somme finale s'annulent par paires.

Invariants des surfaces plates

Les recherches décrites dans le cours de cette année forment une partie d'un projet actuel en collaboration avec Martin Möller (université de Francfort) sur les volumes des espaces de modules de différentielles holomorphes sur les surfaces de Riemann et leurs applications dans la théorie des surfaces plates (calcul des constantes de Siegel-Veech). Cette connexion, qui a été expliquée dans le cours mais qui sera omise ici, aurait été le sujet de la suite du cours si on m'avait accordé la possibilité de donner une telle suite.

Cours à l'Institut Max-Planck de mathématiques en Allemagne

Du 15 avril jusqu'au 15 juillet, j'ai donné à l'Institut Max-Planck de mathématiques à Bonn un cours intitulé « Classical and higher spherical polynomials » dans lequel j'ai exposé la théorie classique des polynômes sphériques et la généralisation donnée par Ibukiyama et moi-même. Cette nouvelle théorie, qui avait été présentée dans une version préliminaire dans un cours antérieur au Collège de France (voir résumé 2006-2007), est maintenant complètement rédigée et a été soumise pour publication.

Conférences sur invitation

Berlin, Allemagne, octobre 2013 : *Multiple zeta values in mathematics and physics,* Distinguished lecture, KOSMOS Summer University 2013.

Bures-sur-Yvette, novembre 2013 : *Superstring amplitudes and multi-zeta values,* Séminaire de physique et mathématique, Institut des Hautes Études Scientifiques.

Bonn, Allemagne, décembre 2013 : *Lines on the Dwork quintic pencil and its higher degree analogues*, Séminaire, Max-Planck-Institut für Mathematik.

Bonn, Allemagne, janvier 2014 : *Ramanujans Erbe : Von Zahlentheorie und schwarzen Löchern*, « Caesarium » (conférence annuelle grand public), Forschungszentrum Caesar.

Noordwijkerhout, Pays-Bas, janvier 2014 : *Modulaire vormen, getaltheorie, monsters en zwarte gaten*, Conférence plénière, Nationale Wiskunde Dagen (activité pour professeurs de lycée).

Utrecht, Pays-Bas, février 2014 : *Higher spherical polynomials, Geometry and Algebra Seminar*, Universiteit Utrecht.

Bonn, Allemagne, février 2014 : *Modular embeddings of Teichmüller curves, Arithmetic Intersection theory and Shimura varieties*, Hausdorff Research Institute for Mathematics.

Heidelberg, Allemagne, février 2014 : *Multiple zeta values and string amplitudes*, Mathematisches Kolloquium, Universität Heidelberg.

Heidelberg, Allemagne, février 2014 : *Modular forms, finite groups, and physics*, Gemeinsames Mathematik-Physik Kolloquium, Universität Heidelberg.

Cologne, Allemagne, février 2014 : *Quasimodular forms and the holomorphic anomaly equation*, Aachen-Köln-Lille-Siegen Seminar on Automorphic Forms.

Trieste, Italie, février 2014 : *Lines on the Dwork quantic*, Algebra and number theory seminar, International Center for Theoretical Physics.

Trieste, Italie, février 2014 : *Higher rank zeta functions for curves over finite fields*, Algebra and number theory seminar, International Center for Theoretical Physics.

Lille, mars 2014 : *Higher spherical polynomials*, Conference on Automorphic Forms, Lie Algebras and String Theory, Université Lille.

Atlanta, Georgia, États-Unis, mars 2014 : *Real and finite multiple zeta values*, Colloquium, Georgia Institute of Technology.

Londres, Angleterre, avril 2014 : *From finite groups to modular forms*, Conférence plénière, British Mathematical Colloquium.

Moscou, Russie, mai 2014 : *Partitions and quasimodular forms*, Workshop on Combinatorics of moduli spaces, cluster algebras, and topological recursion, French-Russian Poncelet Mathematics Laboratory et Steklov Mathematical Institute.

Bures-sur-Yvette, juin 2014 : *Partitions, quasimodular forms, and Siegel-Veech constants*, Conference on Algebra, Geometry and Physics : in honor of Maxim Kontsevich, IHES.

Genève, Suisse, juin 2014 : *Kashaev invariants, Nahm sums, and modularity*, Conference on Geometry, Quantum Topology and Asymptotics.

Tübingen, Allemagne, juillet 2014 : *Differentialgleichungen, algebraische Geometrie und Zahlentheorie*, Alexander-von-Brill-Kolloquium (conférence annuelle), Universität Tübingen.

Trieste, Italie, juillet 2014 : *Finite multiple zeta values. II*, Algebra seminar, International Centre for Theoretical Physics.

Bonn, Allemagne, juillet 2014 : *Higher spherical functions and holonomic differential equations*, Max-Planck-Institut für Mathematik.

Lyon, août 2014 : Partitions (3 conférences), 2014 Modern Mathematics Summer School for Students.

Bonn, Allemagne, septembre 2014 : *Two proofs of the gamma conjecture for rank 1 Fano threefolds*, Workshop on Motivic Structures on Quantum Cohomology and Pencils of Calabi-Yau Motives, Max-Planck-Insitut für Mathematik.

Autres missions et activités

Bonn, novembre 2013 : Membre du jury, soutenance de thèse de mon élève doctorale Maryna Viazovska (« Modular Functions and Special Cycles »).

Bures-sur-Yvette, décembre 2013 : Membre du jury, habilitation de Francis Brown (« Périodes en arithmétique et théorie quantique des champs »), IHES.

Dublin, Irlande, mai 2014 : Réunion du Governing Board, School of Theoretical Physics.

Bonn, Allemagne, juillet 2014 : Participation au workshop « Dynamics and Numbers », Max-Planck-Institut für Mathematik.

Oberwolfach, Allemagne, août 2014 : Co-organisateur (avec P. Gunnells, W. Neumann et A. Sikora) du workshop « Low-dimensional topology and number theory ».

Publications et prépublications

Zagier D. (avec A. Malter et D. Schleicher), *New looks at old number theory*, Amer. Math. Monthly, **120,** 2013, 243-264.

Zagier D., *Lines on the Dwork quintic pencil and its higher degree analogues*, J. Differential Geometry, **97**, 2014, 177-189.

Zagier D. (avec M. Atiyah), *Friedrich Hirzebruch (1927-2012)*, Notices Amer. Math. Soc., **61,** 2014, 706-727.

Zagier D., A *Refinement of a Theorem of J.E. Littlewood*, Amer. Math. Monthly, **121**, 2014, 618.

Zagier D., *Curious and exotic identities for Bernoulli numbers*, Appendice au livre de T. Arakawa, M. Kaneko et T. Ibukiyama, *Bernoulli Numbers and Zeta Functions,* Springer Japan, Springer Monographs in Mathematics, 2014, 239-262.

Zagier D. (avec R. Bruggeman et J. Lewis), *Period Functions for Maass Wave Forms and Cohomology*, Memoirs of the AMS, 2015, 144 pages.

Zagier D. *Partitions, quasimodular forms, and the Bloch-Okounkov theorem*, *T*he Ramanujan Journal (Special Issue Dedicated to the Memory of Marvin Knopp), à paraître, 19 pages.

Zagier D. (avec A. Dabholkar et S. Murthy), *Quantum Black Holes, Wall Crossing, and Mock Modular Forms*, Cambridge Monographs in Mathematical Physics, à paraître, 151 pages, arXiv:1208.4074.

Zagier D. (avec V. Golyshev), *Proof of the gamma conjecture for Fano 3-folds of rank one*, Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk, Seriya Matermaticheskaya, à paraître, 19 pages

Zagier D. (avec L. Weng), *Higher rank zeta functions and Riemann hypothesis for elliptic curves*, Soumis pour publication, 19 pages.

Zagier D. (avec T. Ibukiyama), *Higher spherical polynomials*, Soumis pour publication, 97 pages.

Zagier D., *Genus 0 and genus 1 string amplitudes and multiple zeta values*, Prépublication, 12 pages.

Zagier D. (avec M. Möller), *Modular embeddings of Teichmüller curves*, Prépublication, 84 pages, arXiv:1503.05690.

Zagier D. (avec L. Weng), *Special uniformity of zeta functions : SL_n-zeta functions for curves over finite fields*, Prépublication, 15 pages.

Zagier D. (avec D. Chen et M. Möller), *Quasimodularity and large genus limits of Siegel-Veech constants*, Prépublication, 72 pages.

Zagier D. (avec N. Skoruppa et V. Gritsenko), *Theta blocks*, Prépublication, 25 pages.

Zagier D. (avec J. Stienstra), *Quasimodular forms, bimodular forms, and the holomorphic anomaly equation*, Prépublication, 24 pages.

Zagier D. (avec A. Popa), *An elementary proof of the Hurwitz-Kronecker class number relations*, Prépublication, 4 pages.

Zagier D. (avec S. Garoufalidis), *Quantum modularity of the Kashaev invariants of knots*, Prépublication, 10 pages.

Zagier D. (avec M. Kaneko), *Finite multiple zeta values*, Prépublication, 15 pages.

Zagier D. (avec D. Gaiotto), *A mock modular form coming from Liouville theory*, Prépublication, 10 pages.

Zagier D. (avec A. Popa), *An elementary proof of the Eichler-Selberg trace formula*, Prépublication, 8 pages.

Zagier D. (avec V. Golyshev), *Apéry numbers of fractional index*, Prépublication, 9 pages.