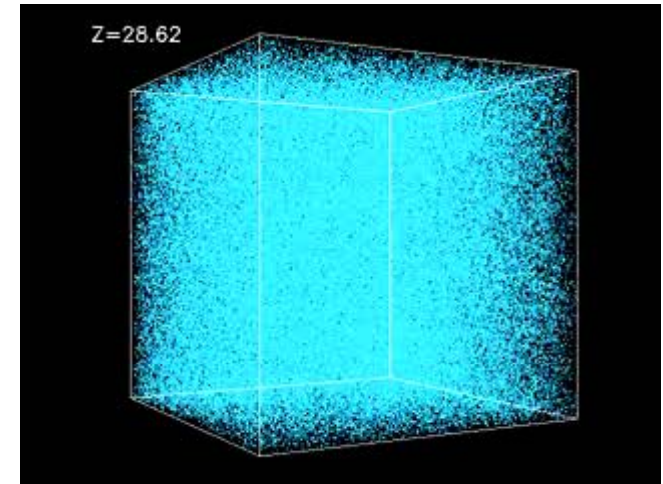
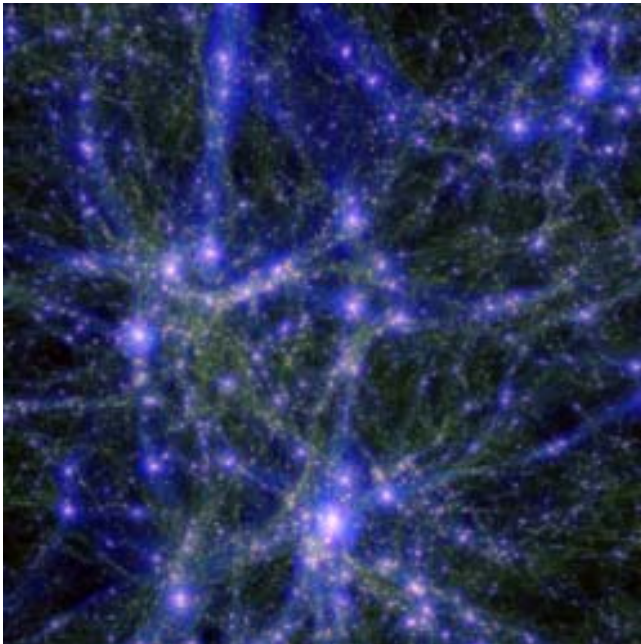




COLLÈGE  
DE FRANCE  
— 1530 —

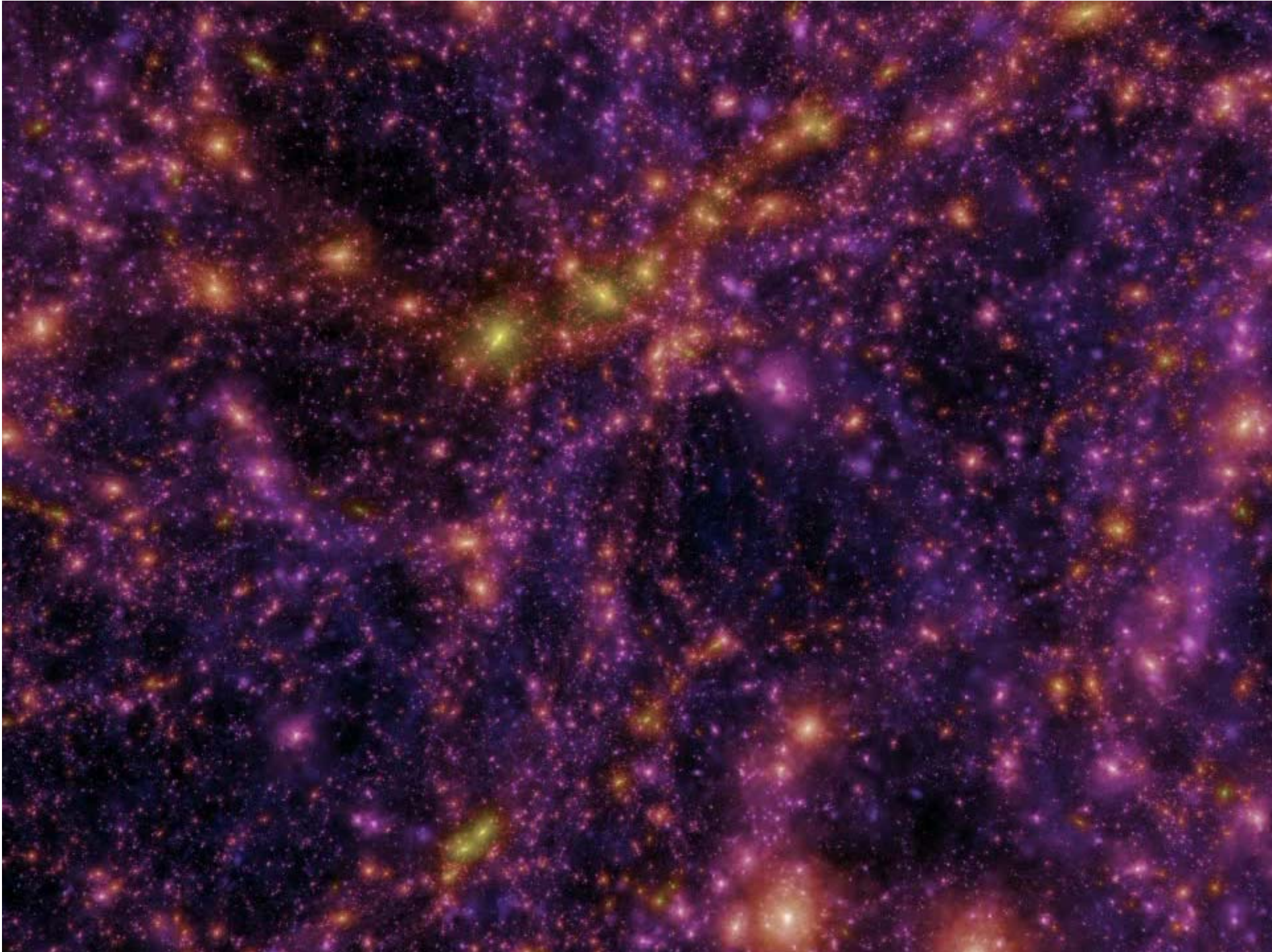


# Les simulations cosmologiques de matière noire



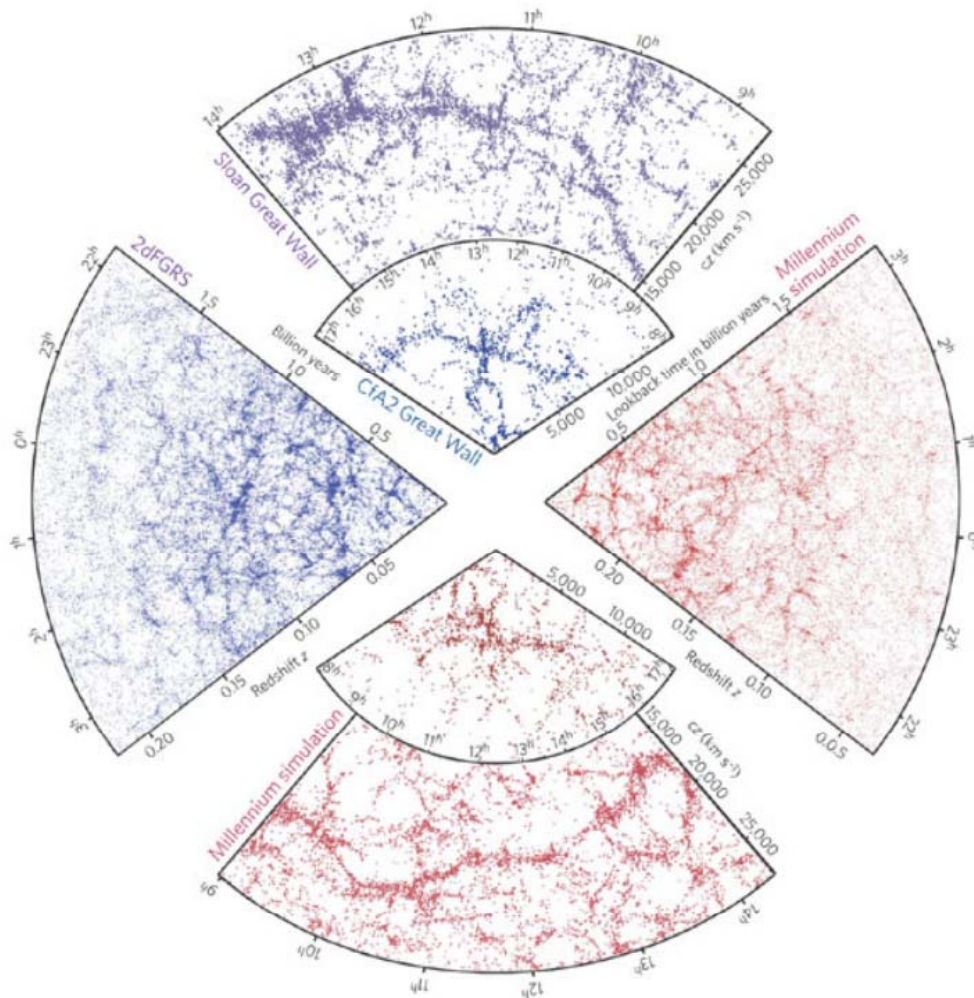
Françoise Combes



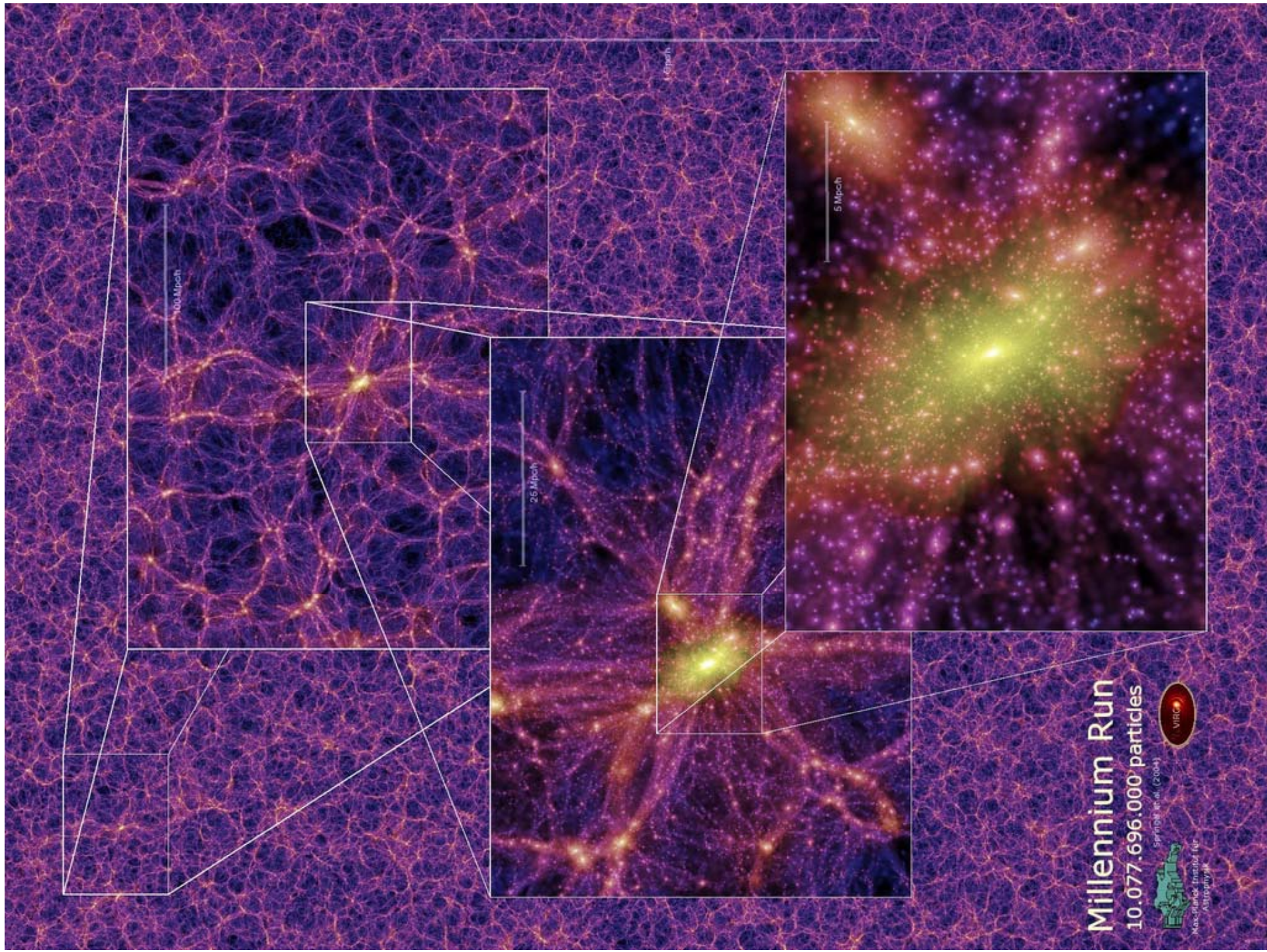


# Cartographies de galaxies

Versus  
Simulations  
CDM



Les simulations reproduisent bien les structures à grande échelle:  
Web cosmique, les filaments, les murs, grands murs,  
la structure des vides, la granularité des super-amas.



# Millennium Run

10,077,696,000 particles

Springer et al. (2004)



Max Planck Institute for  
Astrophysics



VIRGO

A visualization of the Millennium Simulation, showing a vast field of particles. The particles are represented as small, glowing points in a color gradient from purple to yellow. The distribution is highly irregular, with dense clusters and large voids, characteristic of a filamentary structure. A horizontal scale bar at the top left indicates a distance of 1 Gpc/h. The text 'Millennium Simulation' and '10,077,696,000 particles' is overlaid in the upper left quadrant. The coordinate '(z = 0)' is shown in the bottom left corner.

1 Gpc/h

Millennium Simulation

10,077,696,000 particles

( $z = 0$ )

# Simulations N-corps

Calculer l'interaction entre N corps

Méthode directe: temps **croît comme  $N^2$**

N'est possible qu'avec  $N=10^{4-5}$

Pour pouvoir aller jusqu'à  $N = 10^{10-11}$

Astuces: Transformées de **Fourier** rapides, ou code en arbre (Tree-code)

Temps de calcul **en  $N \log N$**

(*Hohl 1975*)

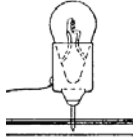
$$\phi(x, y) = G \iint \frac{\sigma(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dx' dy'$$

Le potentiel est la convolution de  $1/r$  par la densité

A chaque  $dt$ , on calcule la TF de la densité, puis on multiplie dans l'espace de Fourier, la TF( $1/r$ ) et al TF( $\rho$ )  $\rightarrow$  TF inverse

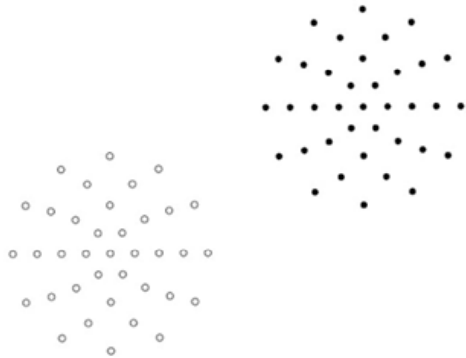
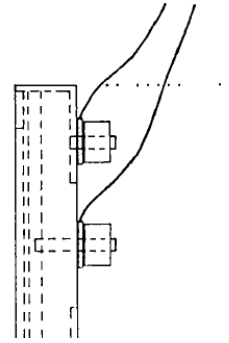
Softening  $1/(r^2 + a^2)$ , pour éviter la relaxation à 2 corps

$\rightarrow$  une idée de la résolution spatiale



# Simulation analogique

Réponse  
en cosinus



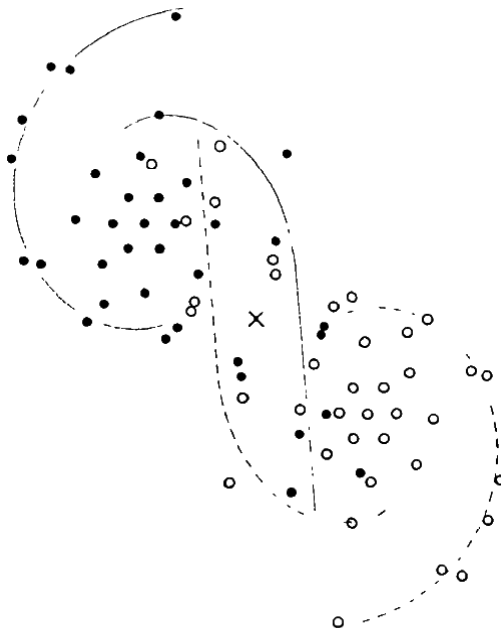
## Eric Holmberg (1941)

Analogie entre gravitation et lumière

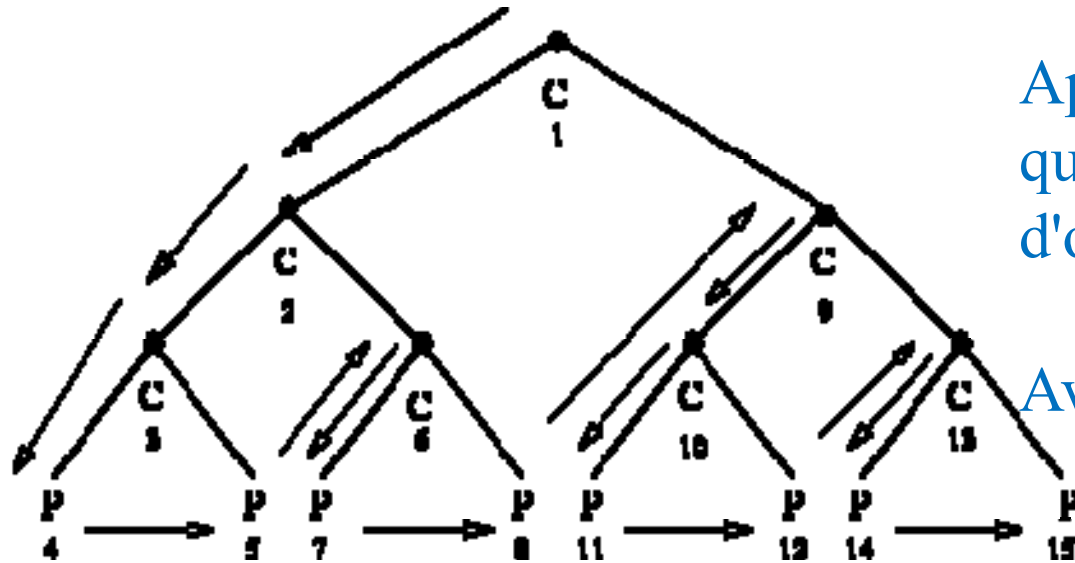
Interaction de deux galaxies composées de 37 points  
37 ampoules munies de cellules photo-électriques

Le flux lumineux varie en  $1/r^2$ , chaque ampoule  
reçoit sur deux axes orthogonaux un flux  
proportionnel à la composante  $F_x$  et  $F_y$  ( $dV/dt$ )

La nouvelle position de chaque particule (ampoule)  
est déduite des vecteurs vitesses

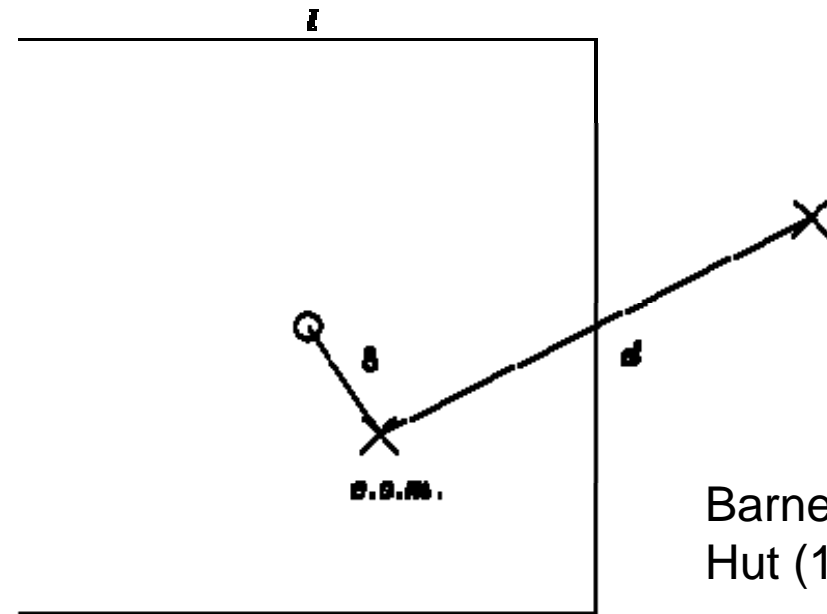
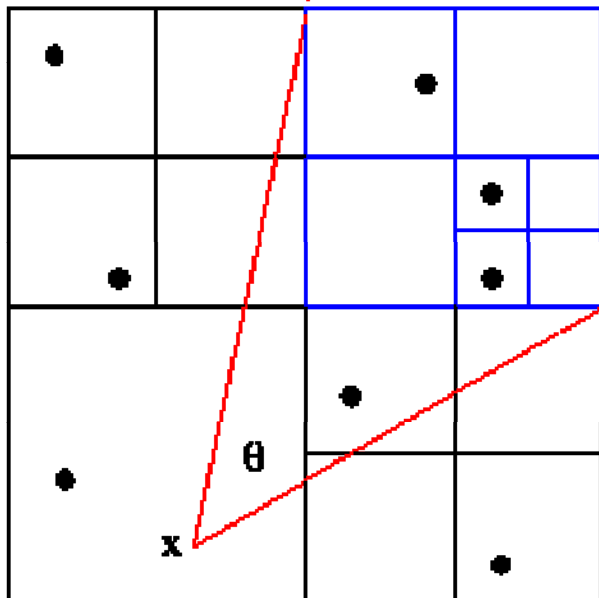


# Méthodes: Tree-code



Approx: monopole +  
quadrupole, selon critère  
d'ouverture

Avantage: pas de grille  
Résolution variable



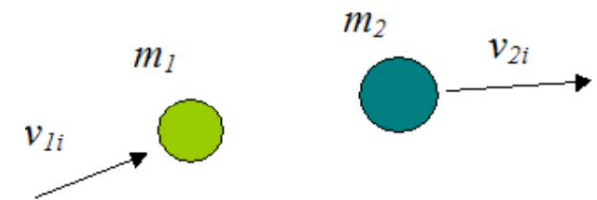
Barnes &  
Hut (1983)



# Hydrodynamique: collisions, SPH, AMR

Pour l'hydrodynamique du gaz, l'essentiel est une faible dissipation

Collisions entre particules ("sticky-particules")  
ou bien différences finies (code fluide, à grille)



Ou bien à résolution spatiale variable: **SPH**

**"Smoothed Particules Hydrodynamics"** (Lucy & Monaghan 1977)

Principe: fonction noyau (ou poids, weight  $W( r )$ )  
dont la taille est variable, et doit contenir un nbr ~fixe de voisins

On calcule la densité en moyennant sur les voisins (30-50 voisins)

et toutes les autres quantités et dérivées de même

# Technique SPH convolution

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \int f(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; h) d^3 r',$$

Avec noyau  $W(\mathbf{r})$  normalisé à 1, et à support borné

Evaluation de toute quantité:

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N f(\mathbf{r}_j) W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j; h) \frac{m_j}{\rho_j},$$

Ou dérivée 
$$\langle \nabla f(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j=1}^N f(\mathbf{r}_j) \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j; h) \frac{m_j}{\rho_j}.$$

Symétrisation des termes de pression, etc...

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij}$$

# AMR: Adaptive Mesh Refinement

## AMR: Méthode sur grille fixe, Eulérienne

Ne suit pas les particules

Gravité: **Transformées de Fourier**, PM (Particle-Mesh)

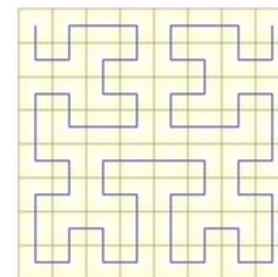
Ou bien **Code Multi-grille**

Résolution variable, s'adapte aux régions les plus denses

**Hydro:** Conditions de saut à vérifier pour tous les chocs

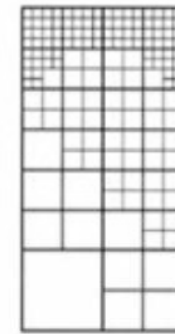
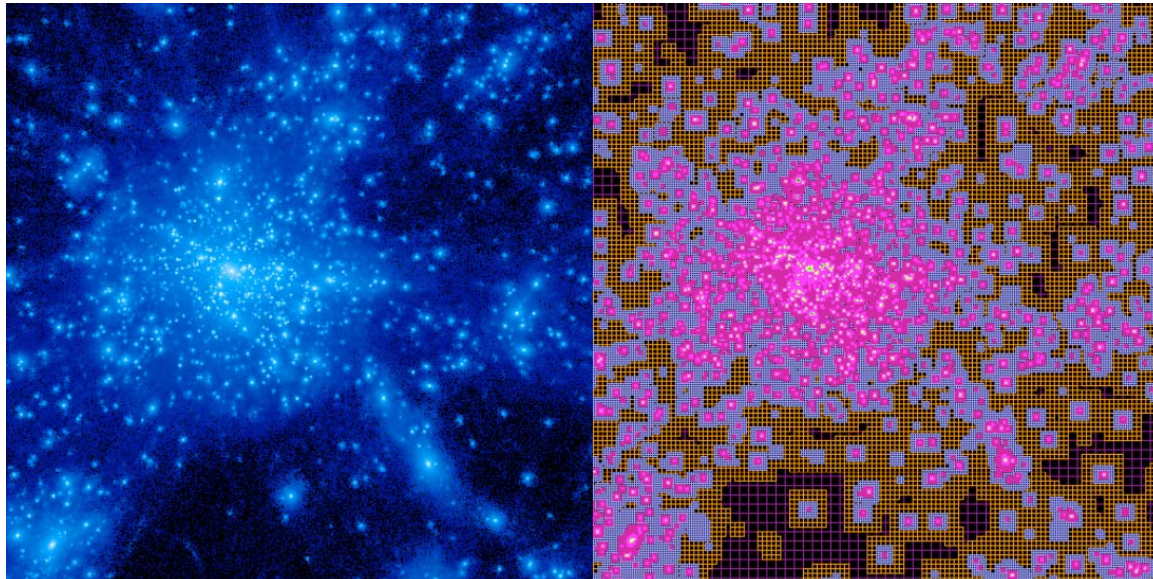
Suit beaucoup plus finement les ondes de choc

Difficile d'anticiper les mouvements supersoniques  
(non-invariance galiléenne)

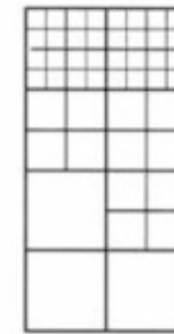


Parallélisation  
Peano-Hilbert

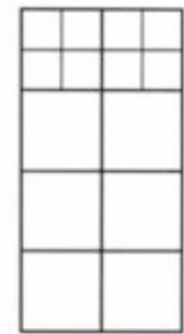
# Divers niveaux de raffinement



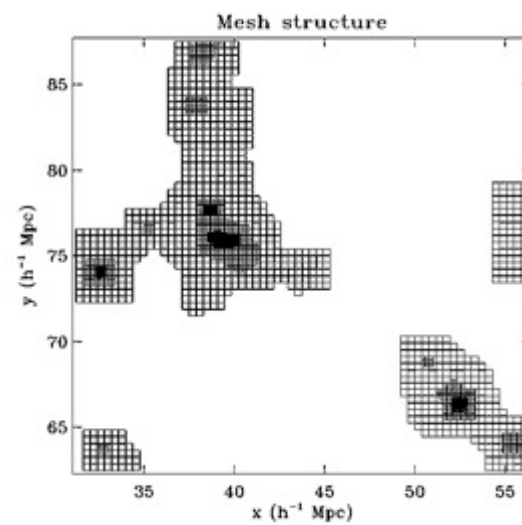
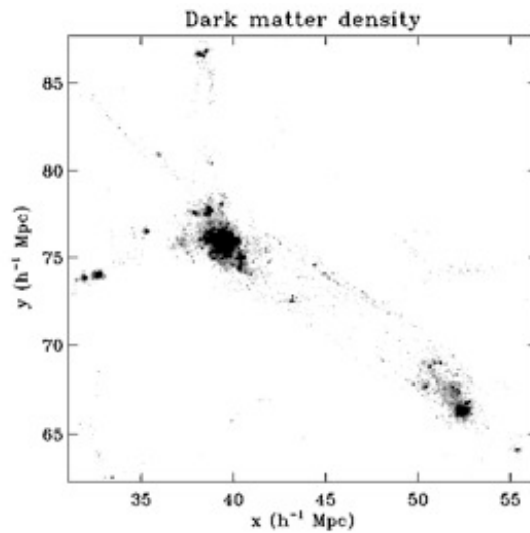
Level 3



Level 2



Level 1

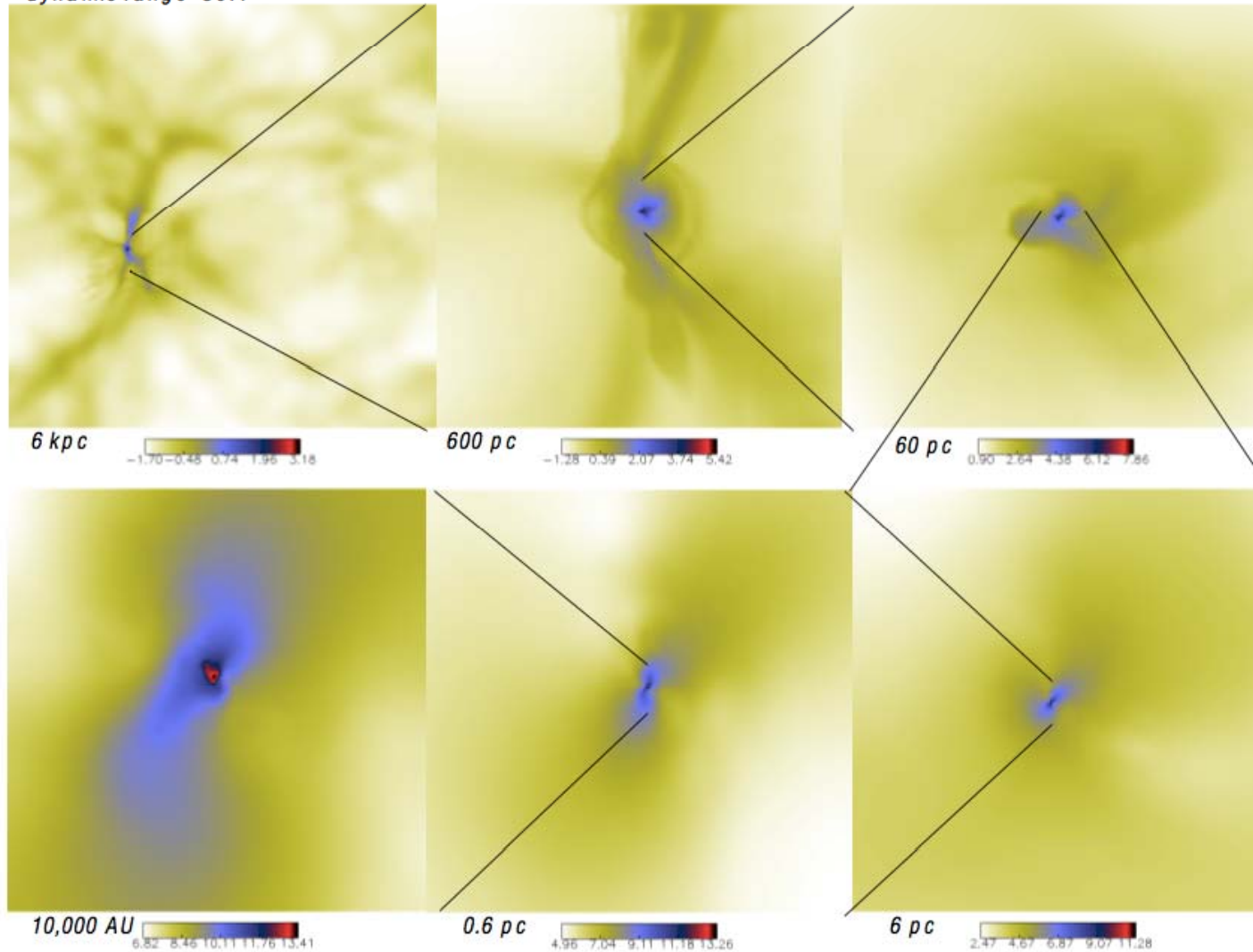


Jusqu'à 25 niveaux,  $2^{25} = 3 \cdot 10^7$

Grande dynamique d'échelle

# Zoom possibles, premières étoiles

$z=20$ ,  $R_{200}=90\text{ pc}$ ,  $M_V=4e5 M_{\text{sun}}$  **The First Star in the Universe**  
*dynamic range=3e7!*



© Abel, Bryan and Norman 1999

# Avantages (et problèmes) comparés

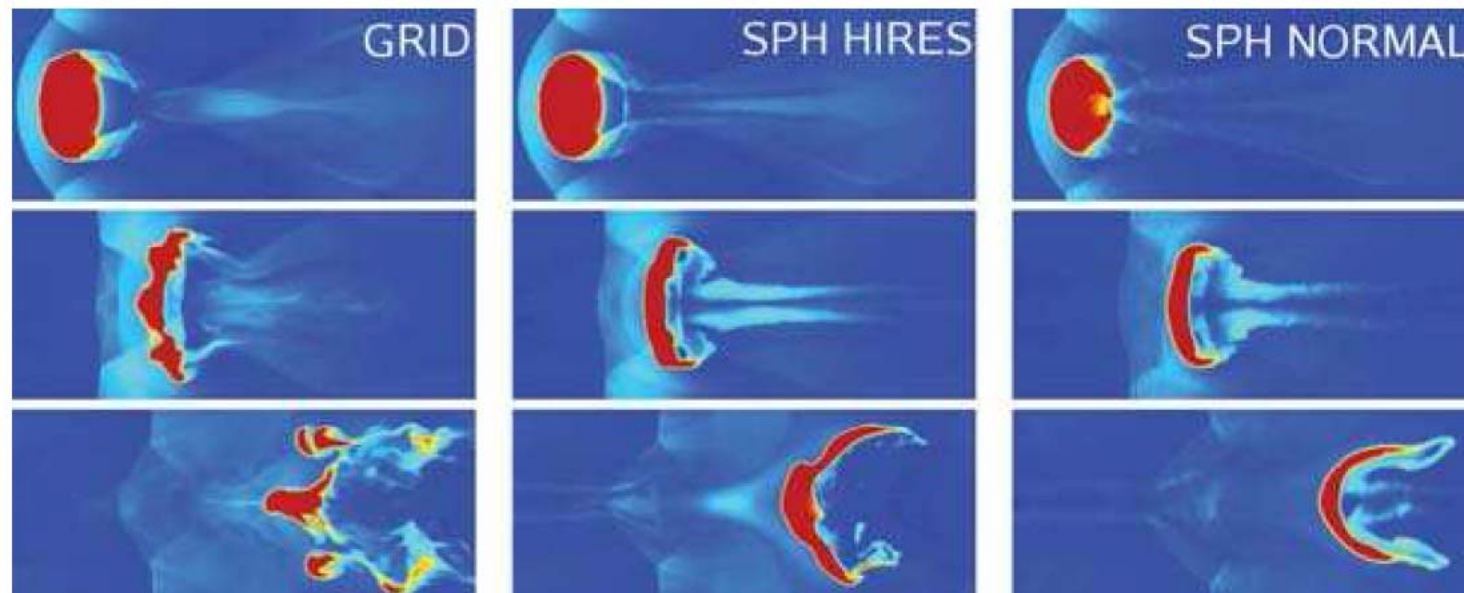
**SPH: méthode Lagrangienne, suit les particules, pas de grille**

Viscosité artificielle (étaler les chocs sur  $h$ = résolution spatiale)

Problèmes de caléfaction, tension de surface, rend impossible les échanges sur une taille de l'ordre de  $h$

**Instabilités de Kelvin-Helmoltz:** cisaillement à l'interface 2 fluides

Mouvement supersoniques fréquents



*Agertz et al  
2007*

# Maille mobile ou grille fixe (AMR)

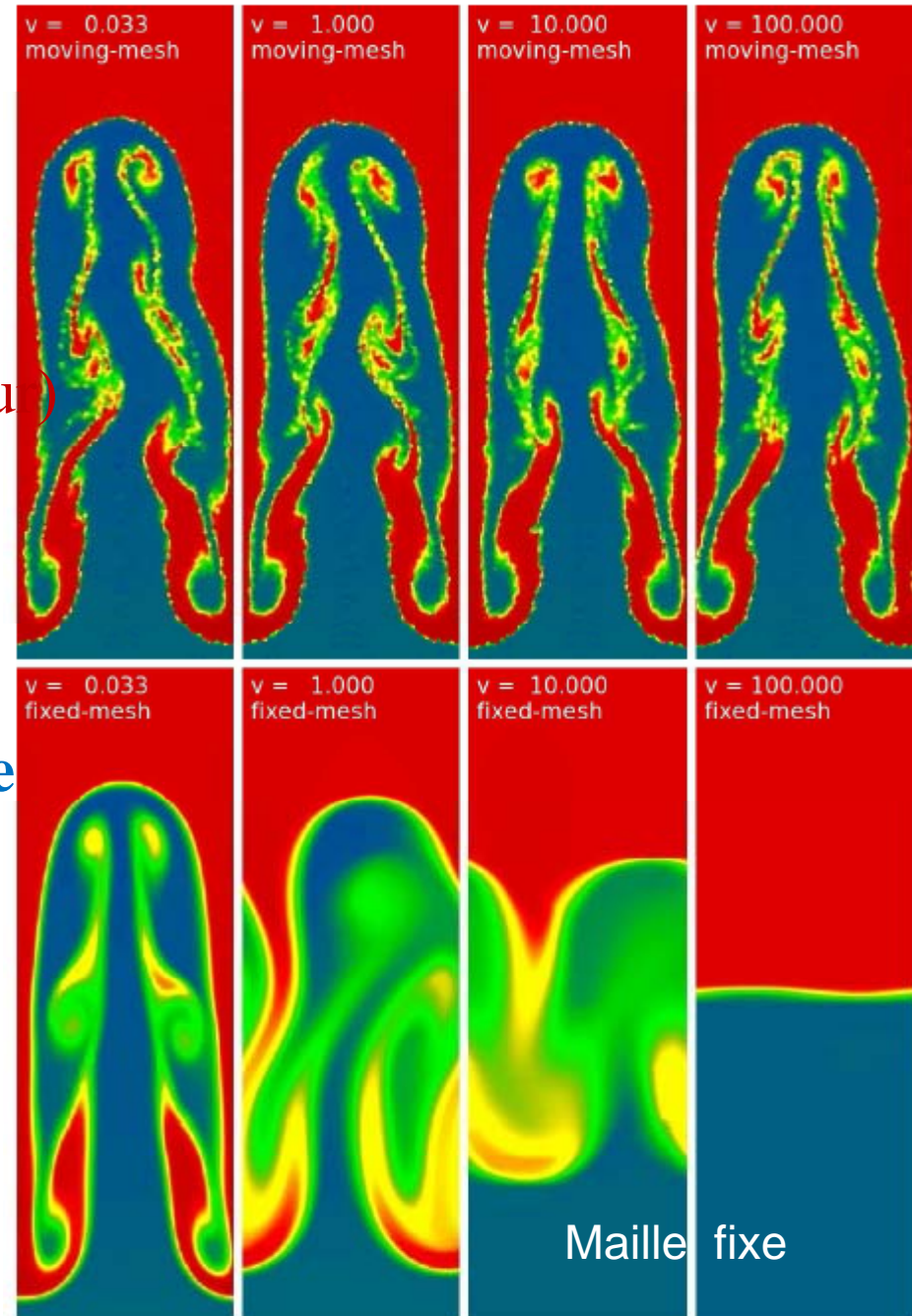
Instabilité de Rayleigh-Taylor  
Fluide plus dense au-dessus (pesanteur)  
Vitesses  $V_x$  du fluide

$V_x=0, 1, 10$  et  $100$

**Invariance galiléenne: le résultat ne doit pas dépendre de  $V_x$**

Avec une maille fixe (en bas)  
Les instabilités sont perdues à  $V > 1$

Maille mobile



# Problèmes résiduels SPH, AMR

**SPH:** Tension de surface, forces mal évaluées, chocs étalés

**AMR:** Directions préférentielles, peut conduire à des artefacts

Pas d'invariance galiléenne

Transitions brutales (sauts) aux frontières de raffinement

Les objets en mouvement demandent de plus en plus de raffinements

La structure en arbre (division par 8) lourd à gérer

Comment cumuler les avantages du Lagrangien et Eulérien?

→ **Grille non structurée**, mobile, comme AREPO

Volker Springel (2010) Tessellation de Voronoi

**Les cellules s'adaptent automatiquement au problème**



# Détails de la méthode AREPO

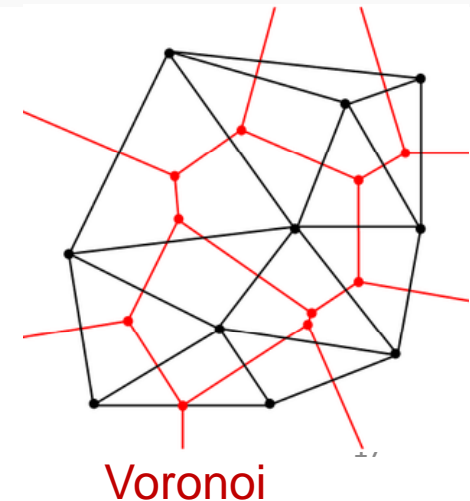
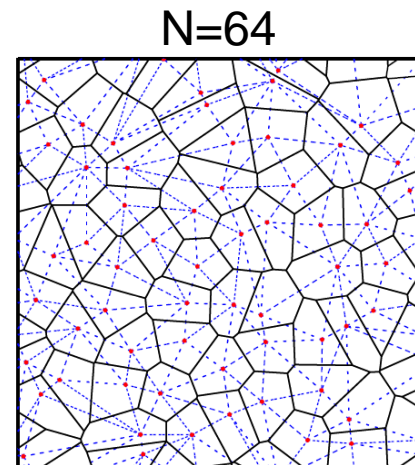
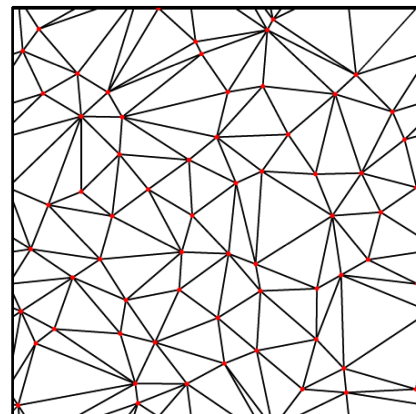
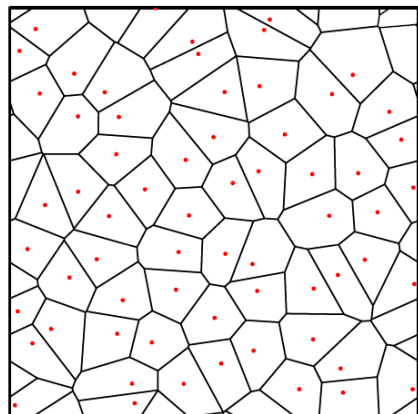
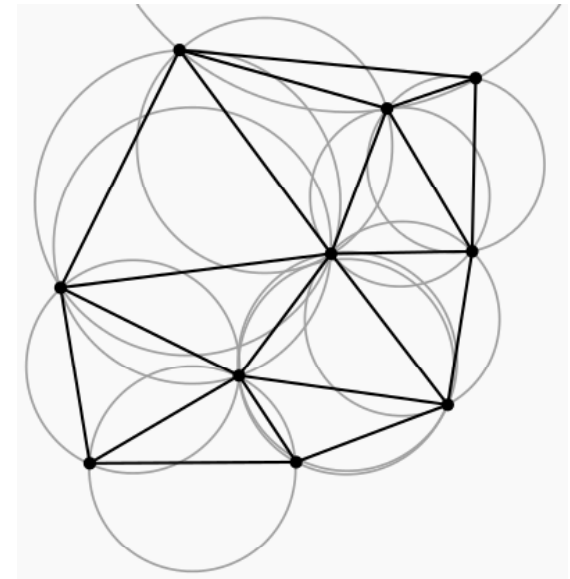
Des grilles mobiles dès 1970

Mais l'évolution distord les cellules, elles s'enroulent

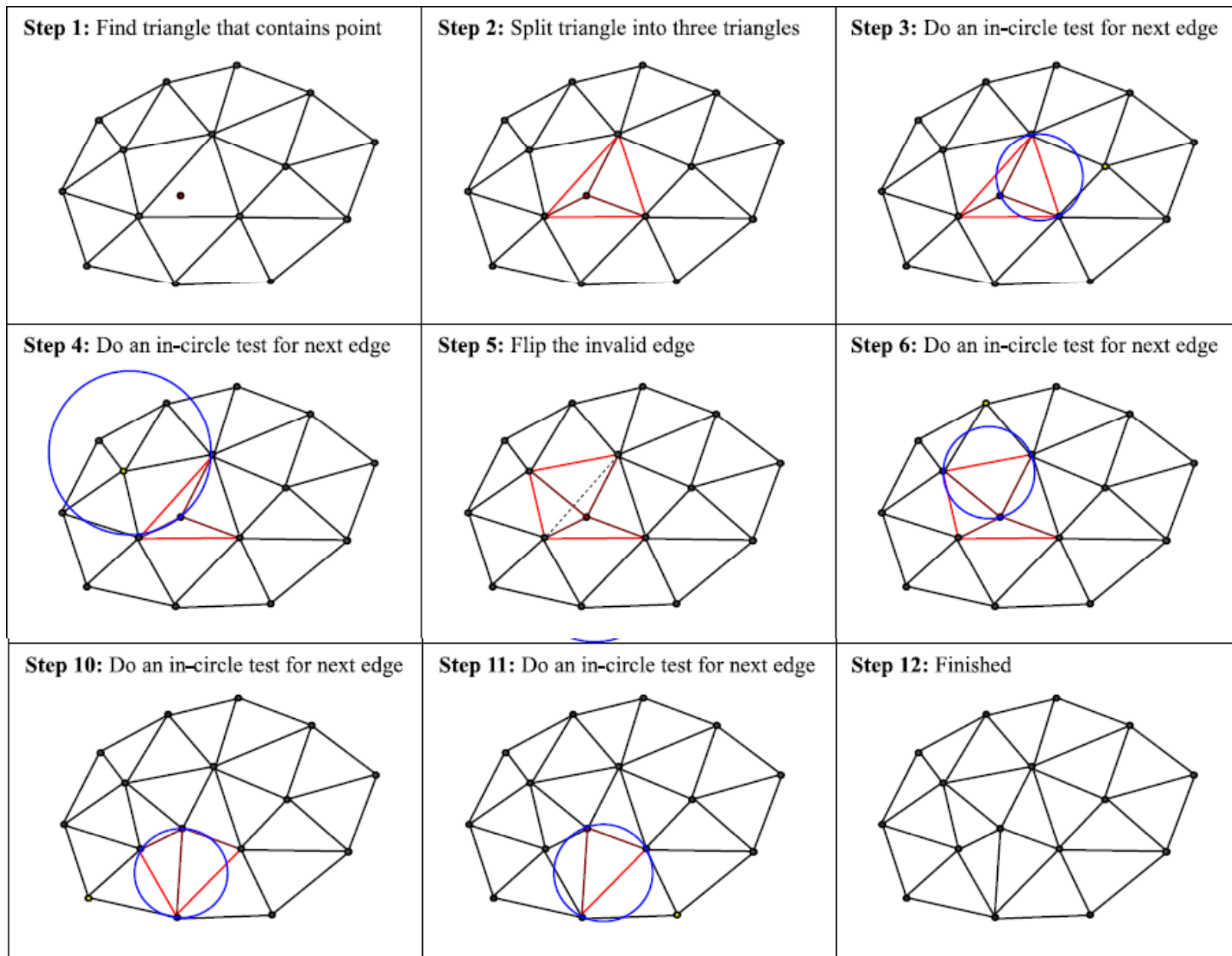
Re-grillage régulièrement, ou arrêt

→ Triangulation de Delaunay  $DT(P)$   
telle qu'aucun point de  $P$  n'est à l'intérieur  
du cercle circonscrit d'un des triangles de  $DT(P)$   
Evite ainsi les triangles allongés

→ Tessellation de Voronoi (centre des cercles  
et médiatrices)

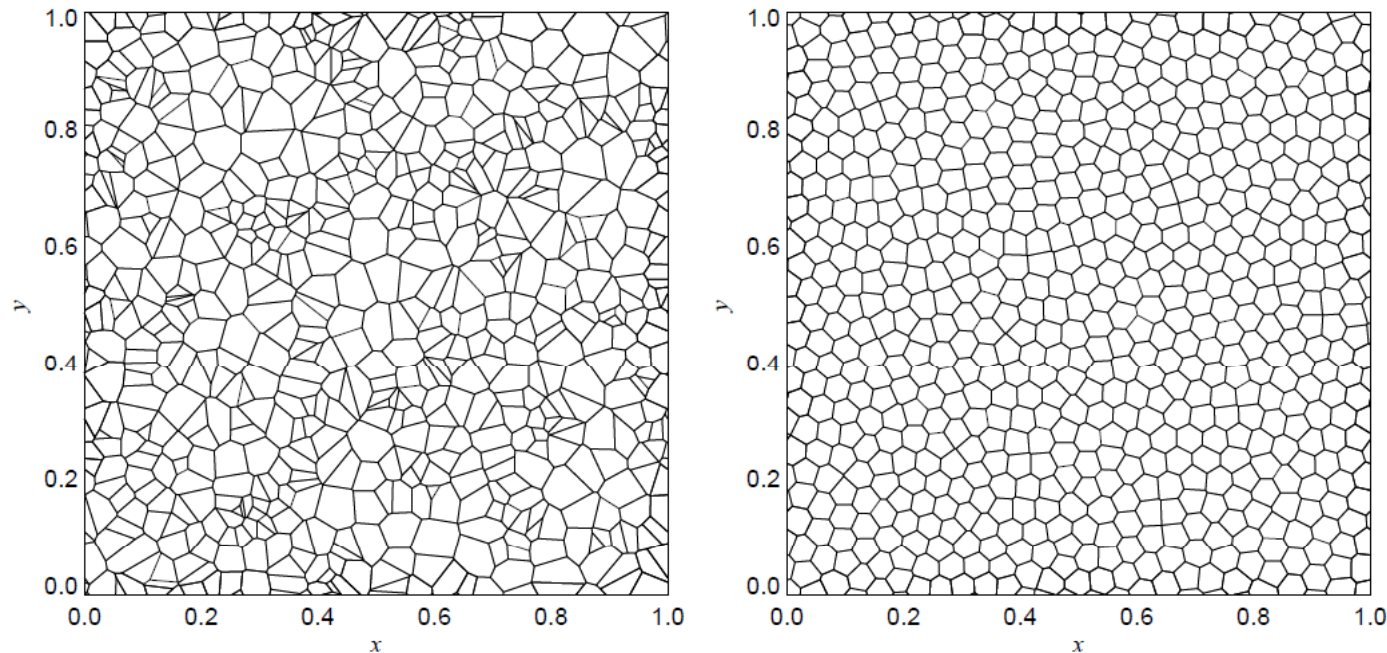


# Mise à jour de la tessellation



# Régularisation des cellules

N=625, distribution aléatoire de Poisson



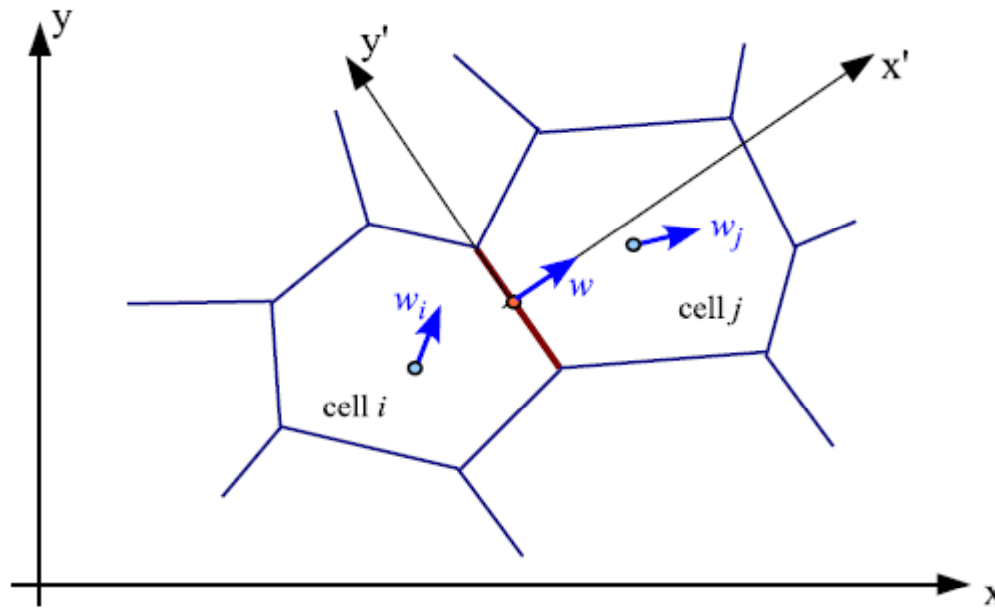
**Algorithme de Lloyd (1982)**, appliqué 50 fois

Et la tessellation de Voronoi recommencée

Chaque point de cellule est recentrée au centre de masse

→ Cellules plus rondes, structure en nid d'abeilles

# Détails des opérations

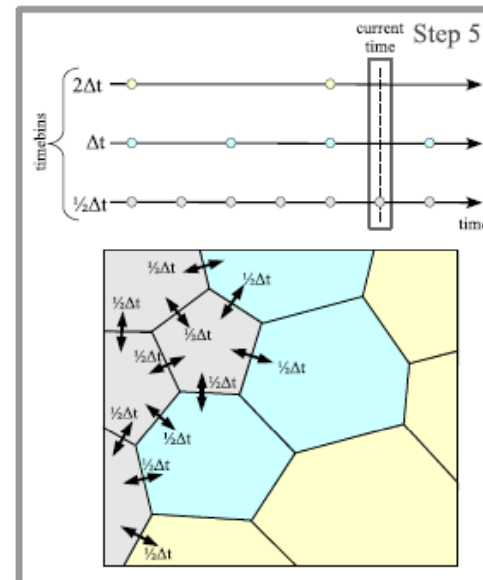
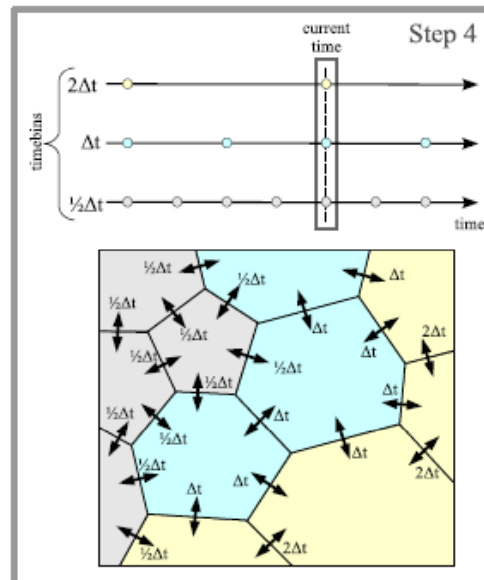
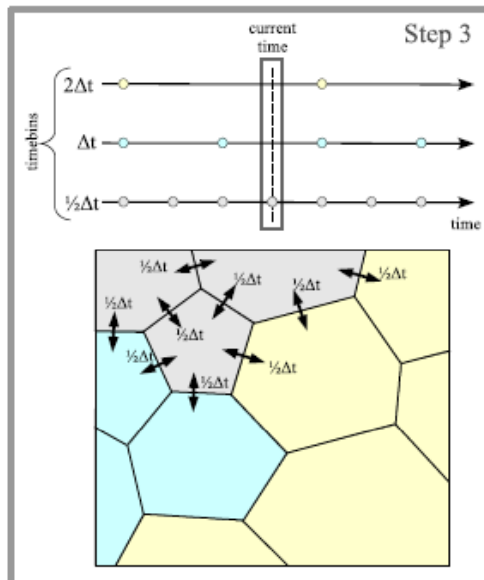
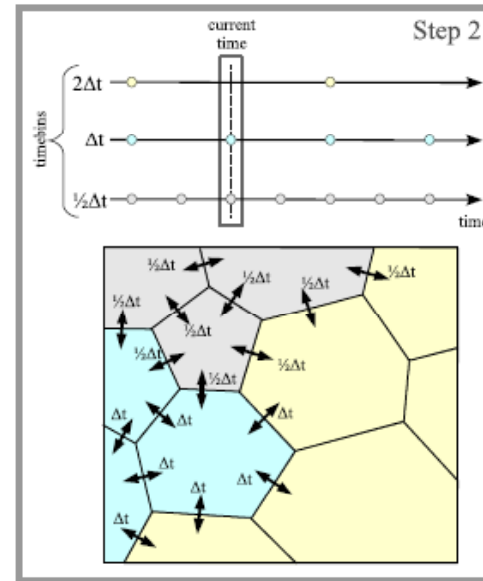
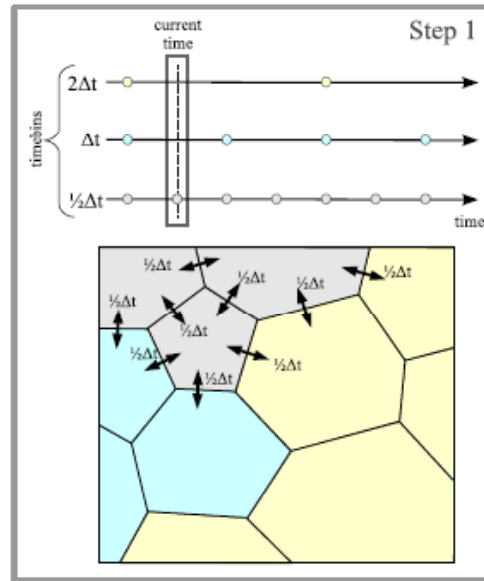
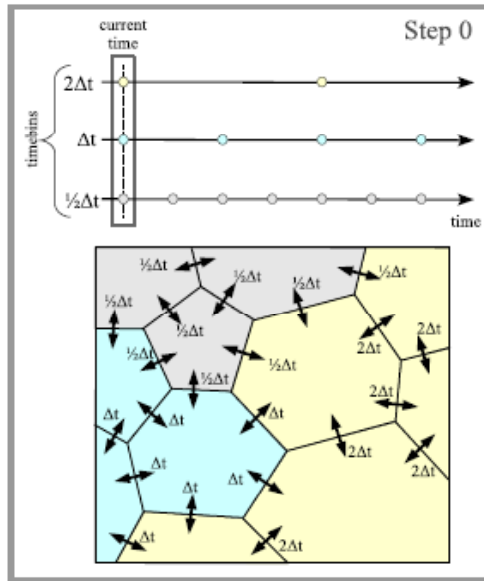


Flux de fluide et toutes grandeurs transférées

Le flux du fluide de chaque cellule (associé à chaque particule) est calculé dans le repère qui bouge avec la face, avec une vitesse  $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_i + \mathbf{w}_j)/2$

→ Généralisation 2D -3D

# Pas de temps variable



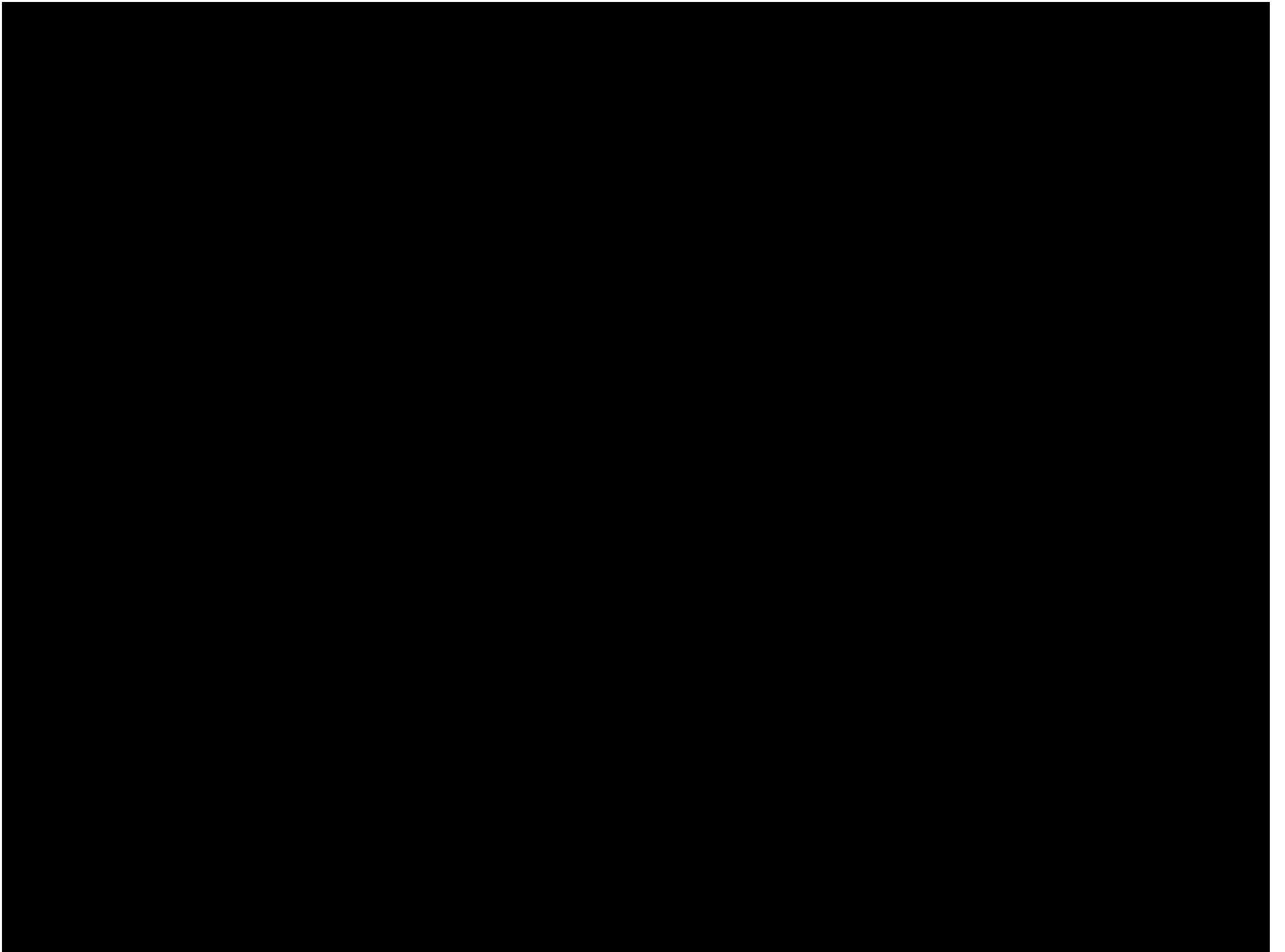
Interfaces avec  
3 dt différents

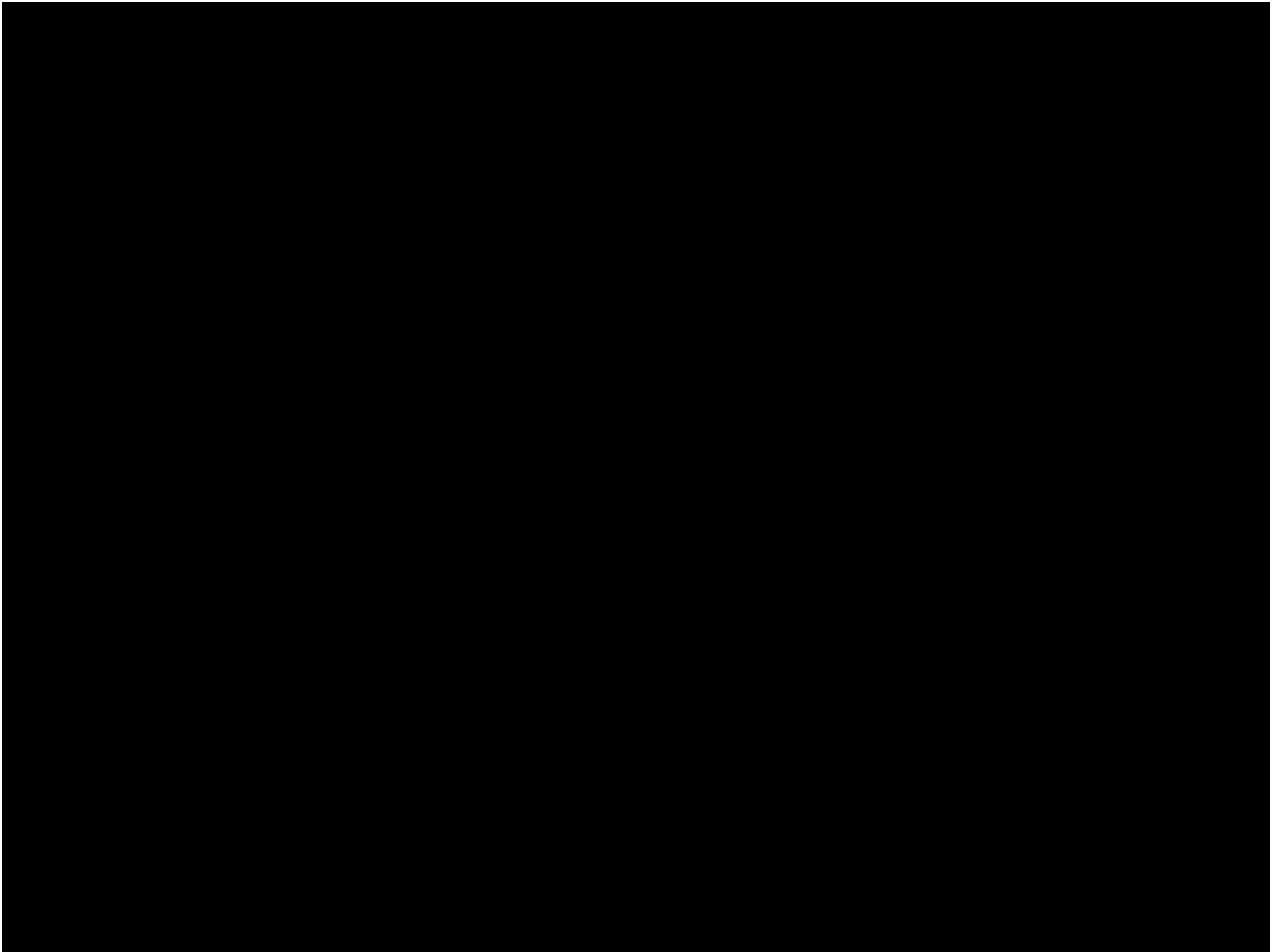
Les échanges  
se produisent  
sur dt le plus petit

Jaune 2dt

Bleu dt

Gris dt/2





# Millennium Run Simulation (Volker Springel et al. 2005)

- En 2005, la plus grande simulation Matière noire froide (> 10 milliards de particules)
- $m_p = 8.6 \times 10^8 M_\odot$
- Boîte de  $500 h^{-1} \text{ Mpc} \times 500 h^{-1} \text{ Mpc} \times 500 h^{-1} \text{ Mpc}$
- Résolution spatiale (force) de 5 kpc
- Plus de 20 millions de galaxies
- Les données sont rendues publiques
- Films disponibles sur

<http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/millennium/>



# Champ aléatoire gaussien

Le champ de fluctuations initiales  $\delta = \delta\rho/\rho$ , provenant de l'inflation est supposé gaussien

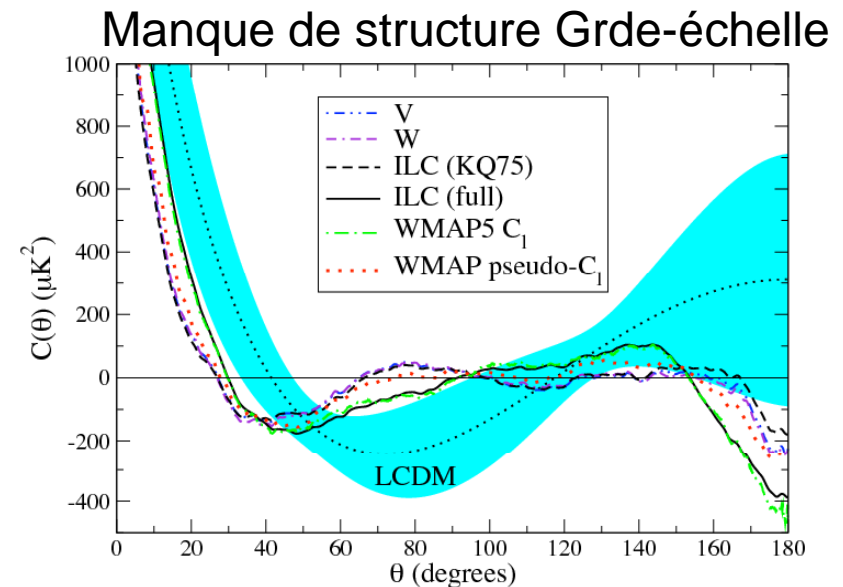
$$P(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)d\delta$$

Vérifié par les résultats de Planck (2014)

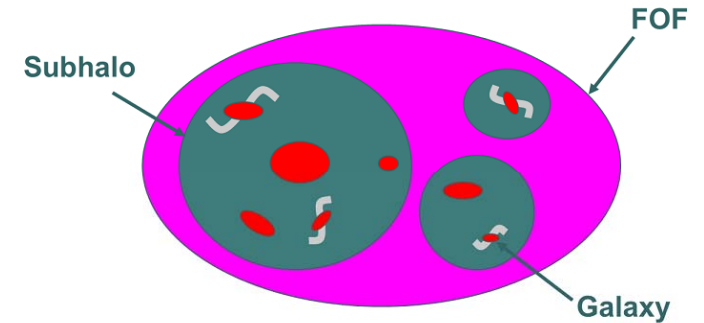
Avantage: Toutes les corrélations a N-points  $P(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  s'expriment en fonction de la corrélation à 2 points  $\xi(r) = \langle \delta_1 \delta_2 \rangle$

$\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle = \xi(0)$  variance

LCDM: isotropie, gaussianité, invariance d'échelle pour les fluctuations venant de l'inflation  
*Copi et al 2010, 2013*



# Approche semi-analytique



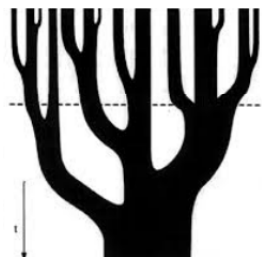
Modèle cosmologique  
Fluctuations (Planck)

Simulation N-corps



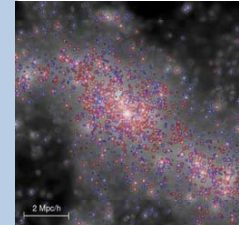
Evolution MN  
Millennium  
Par exemple

FOF "Friend of Friend"



Arbre de fusion des  
halos

Catalogues de galaxies:  
Comparaison avec les  
galaxies observées

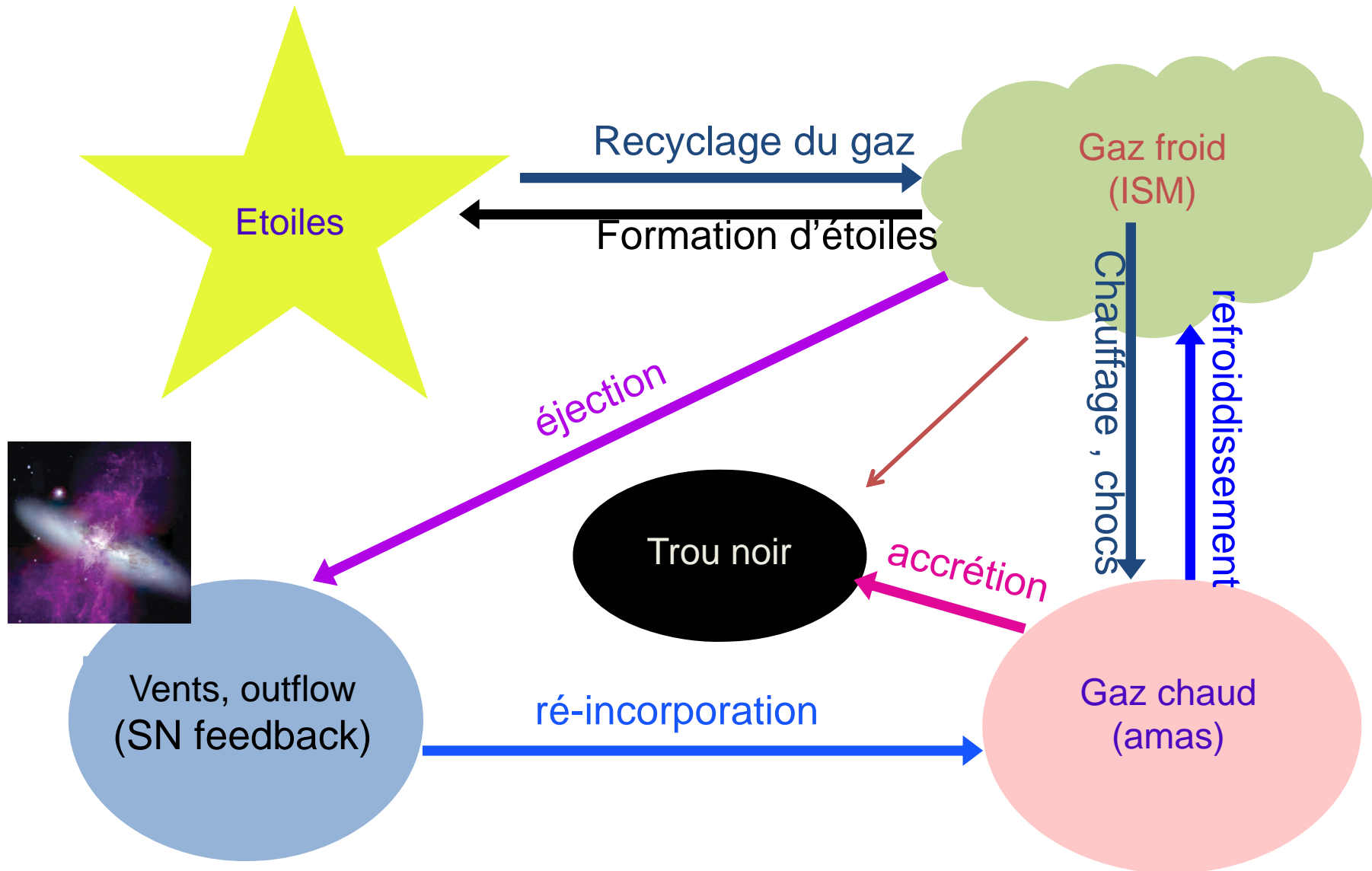


Synthèse de populations  
stellaires, extinction etc

Evolution des galaxies

Modèle de formation des  
galaxies

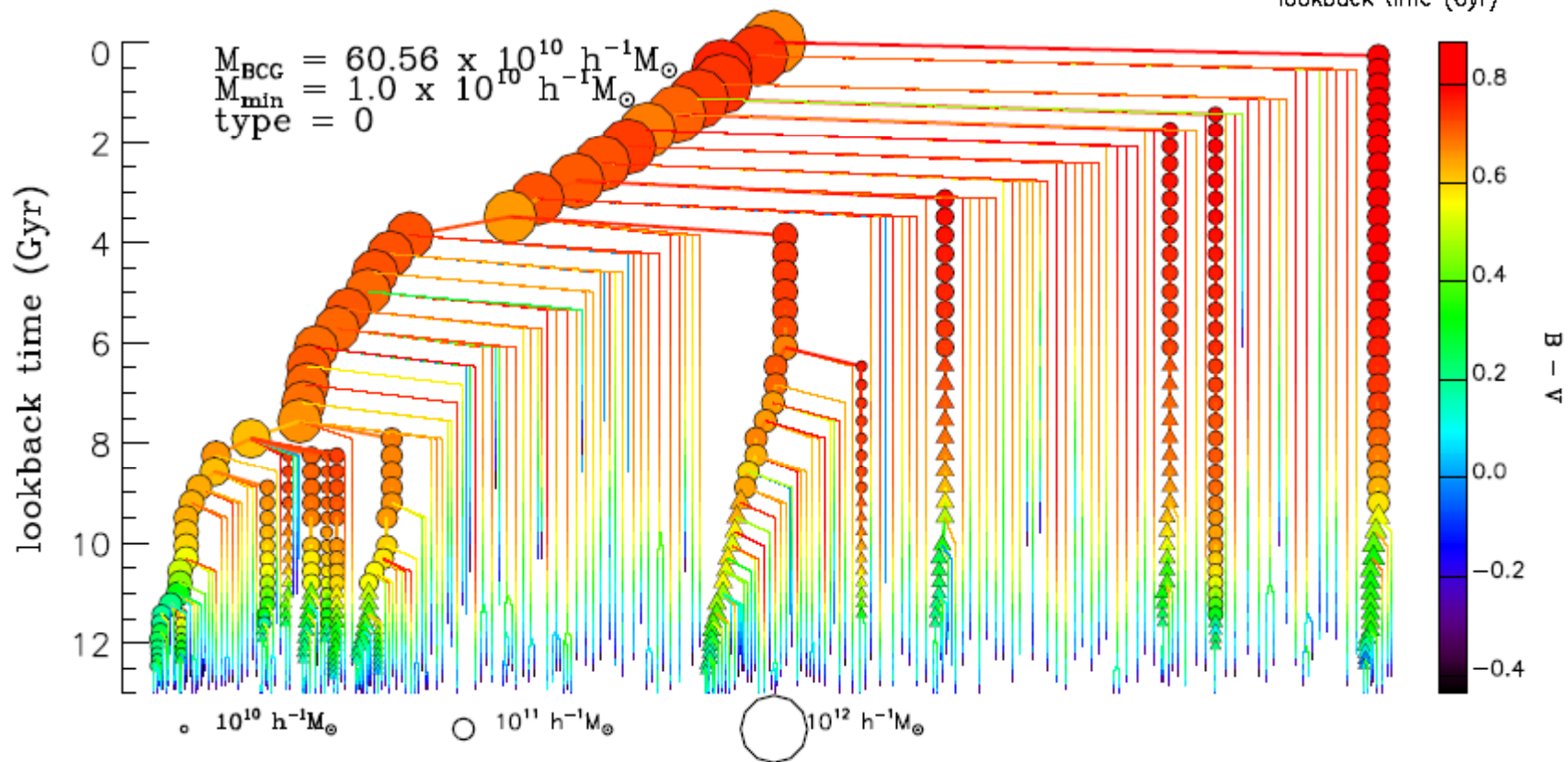
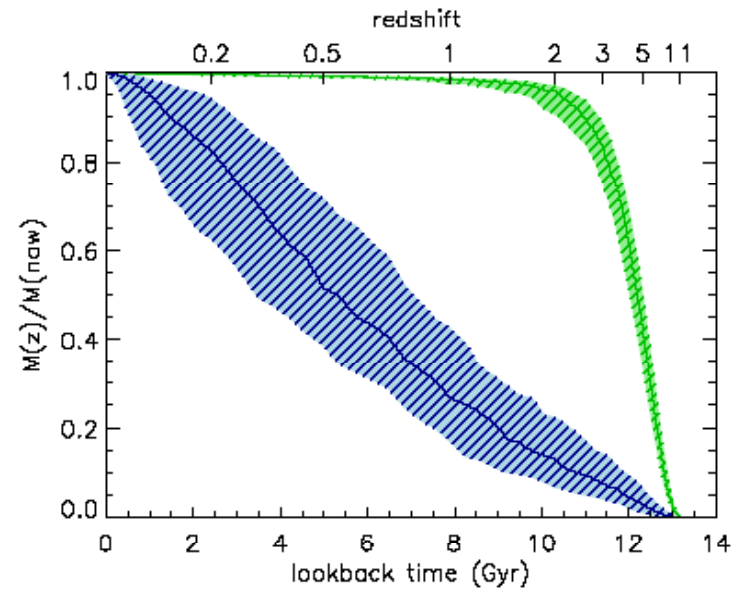
# Physique des baryons



# Formation hiérarchique

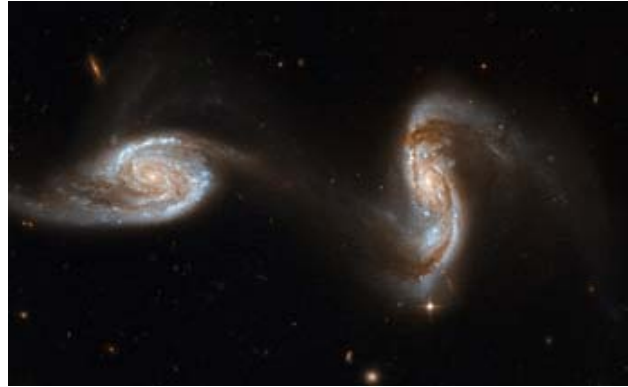
Pour les plus massives des galaxies  
50% des étoiles formées à  $z=5$ ;  
A partir de  $z=1$ , fusions seules  
Assemblage de la masse  $z=0.5$

*De Lucia & Blaizot 2007*

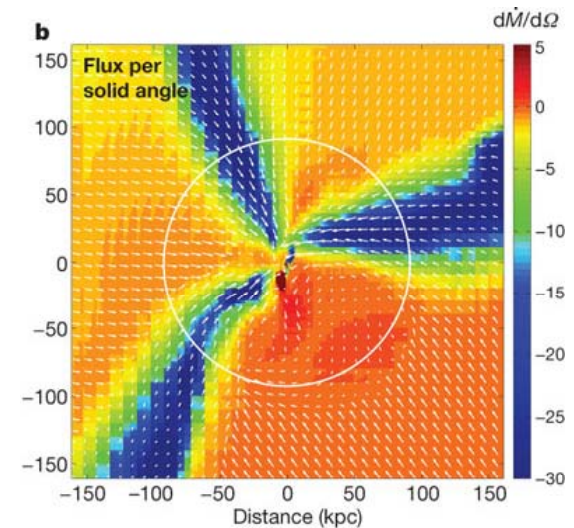


# Accrétion de masse par les galaxies

(1) Fusion de galaxies (\*, gaz)

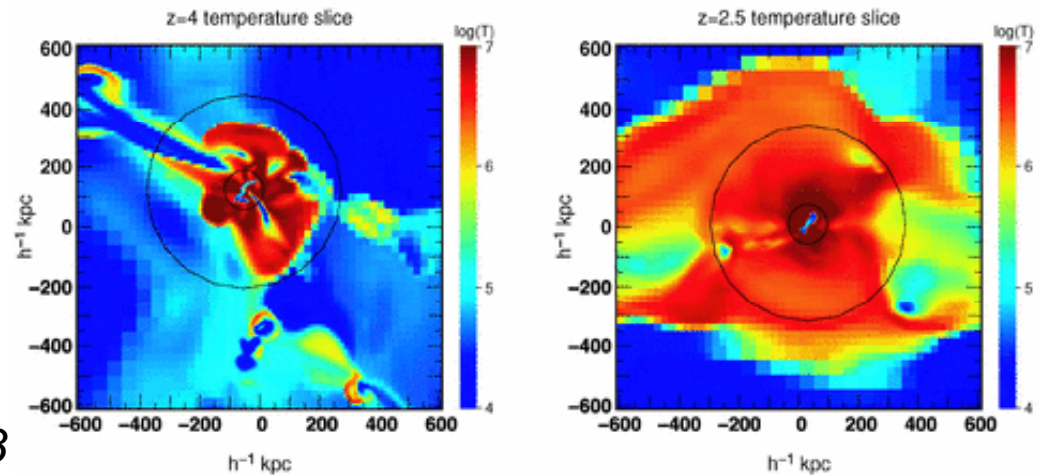


(2) Accrétion de gaz froid



*Dekel et al 2007*

(3) Accrétion de gaz chaud, pour  $M > M_{\text{crit}}$

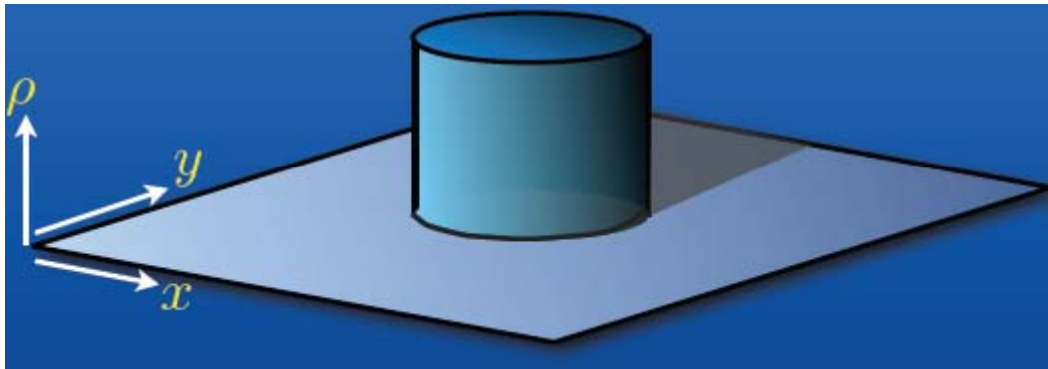


*Ocvirk et al 2008*

# Régime non-linéaire

Le développement des fluctuations est facile à suivre dans le régime linéaire  $\delta \ll 1$   $\delta$  croît comme  $a(t)$

Ensuite, en régime non-linéaire  $\delta > 1$ , uniquement des simulations numériques peuvent suivre le couplage entre les modes  
La gaussianité est alors brisée



On peut toutefois avoir une idée de l'évolution en supposant une perturbation en chapeau « Top-hat »  
→ Symétrie sphérique

# Effondrement du « Top-hat »

Epoque dominée par la matière, après l'équivalence

$$\delta \sim a(t) \sim t^{2/3} \quad \langle \rho \rangle \sim 1/t^2$$

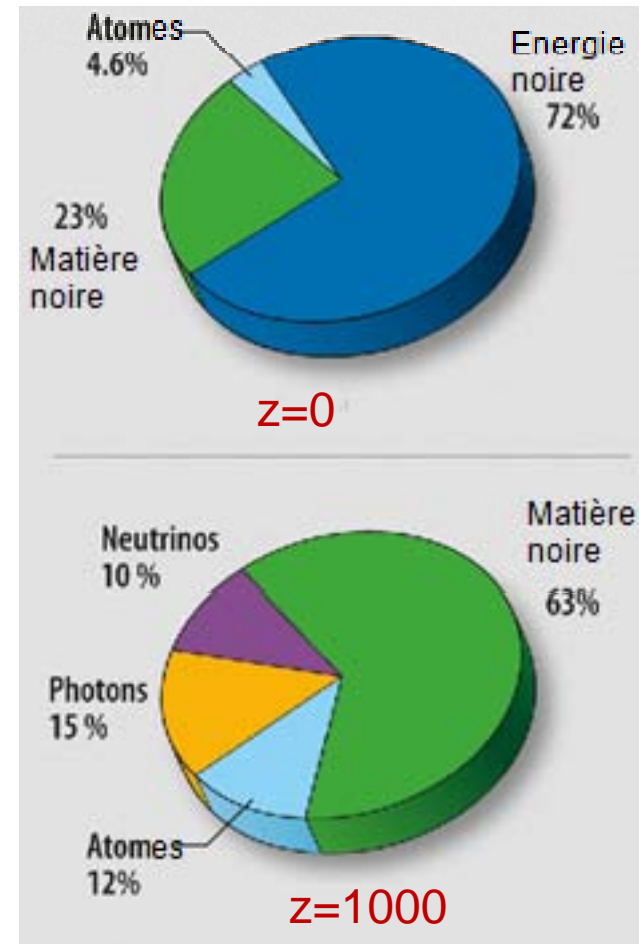
A cette époque, pas d'énergie noire

Supposons uniquement MN, sans collision

$$d^2r/dt^2 = - GM(r)/r^2$$

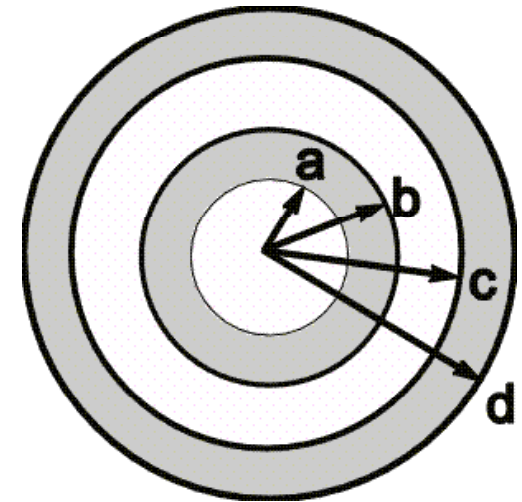
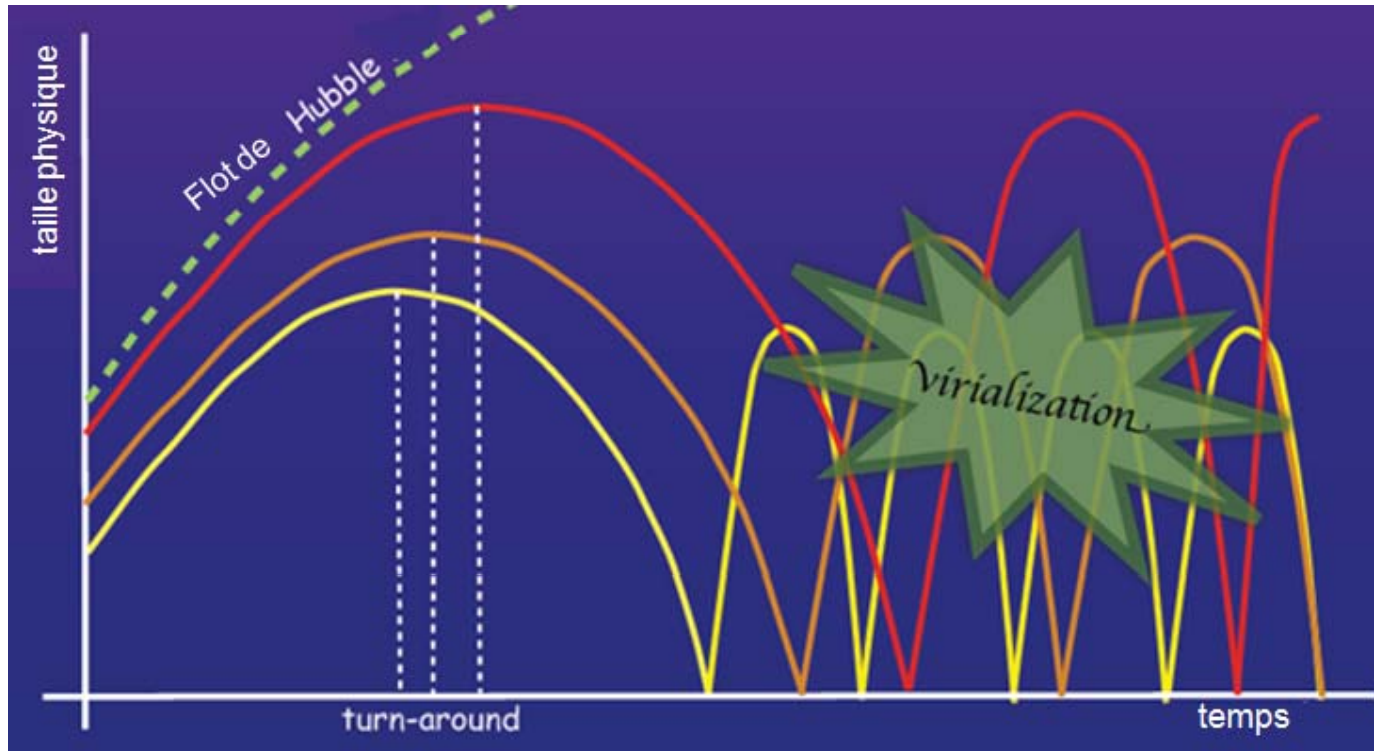
$$M(r) = 4/3 \pi r^3 \langle \rho \rangle (1+\delta)$$

Solution de l'effondrement sphérique des diverses coquilles



# Point du retour, virialisation

La coquille commence par continuer son expansion, jusqu'à un point maximum  $t_{\max}$ , ou le mouvement se retourne  
→ Point de virialisation:  $2 t_{\max}$





# Approximation de Zeldovich

Pour aller un plus loin dans le régime non-linéaire,  
On peut suivre les particules, prolonger leur trajectoire selon leur vitesse  
 $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{b}(t) \mathbf{f}(\mathbf{x})$  Vecteur  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow$  direction de la vitesse



Traitement exact à 1D,  
 $\rho/\rho_0 = r_0^3/r^3 = a(t)^{-3} V_0/V$   
 $V$  volume comobile

L'effondrement gravitationnel se précipite: Une inhomogénéité initiale va s'effondrer plus vite, la densité augmente, et le temps d'effondrement en  $\rho^{-1/2}$  s'accélère



# Approche semi-analytique

Pour les grandes structures, quasi-linéaires, peut-on extrapoler le spectre de masse?

Formule de Press-Schechter: gravité indépendante d'échelle

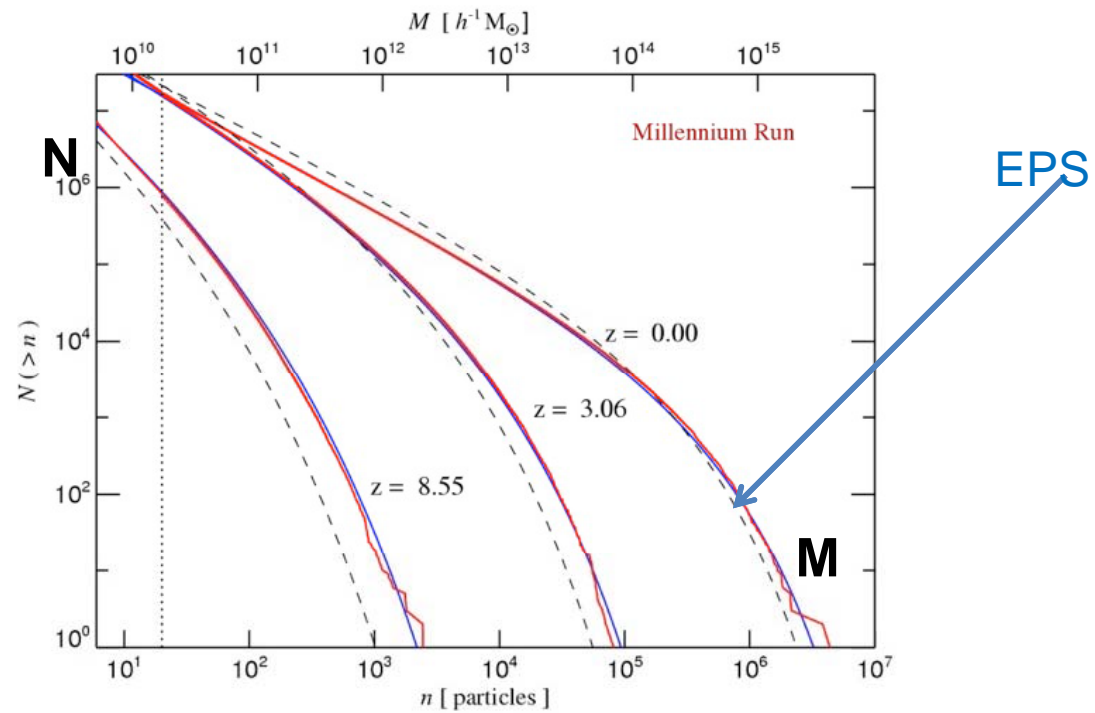
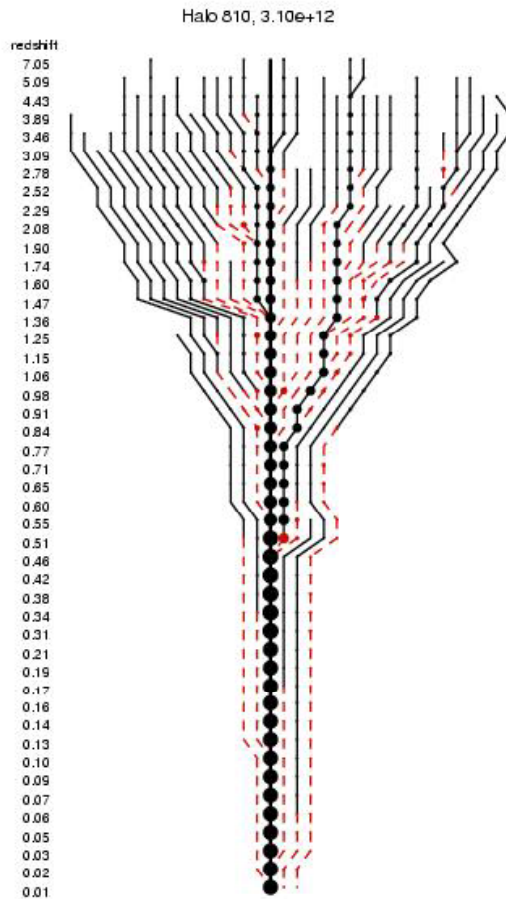
Arbres de fusion



Les fluctuations  $\delta(\mathbf{x})$   
Croissent linéairement  
 $\delta(\mathbf{x},t) = R(t) \delta_0(\mathbf{x})$

Celles qui dépassent le  
Seuil critique  $\delta_c$   
S'effondrent en halo

# Approche semi-analytique



Pour un champ de fluctuations aléatoires gaussien,  
Formule de Press-Schechter

$$\mathcal{P}(\delta_M > \delta_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_M} \int_{\delta_c}^{\infty} \exp\left[-\frac{\delta_M^2}{2\sigma_M^2}\right] d\delta_M = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{\delta_c}{2\sigma_M}\right]$$

# Profil de matière noire NFW

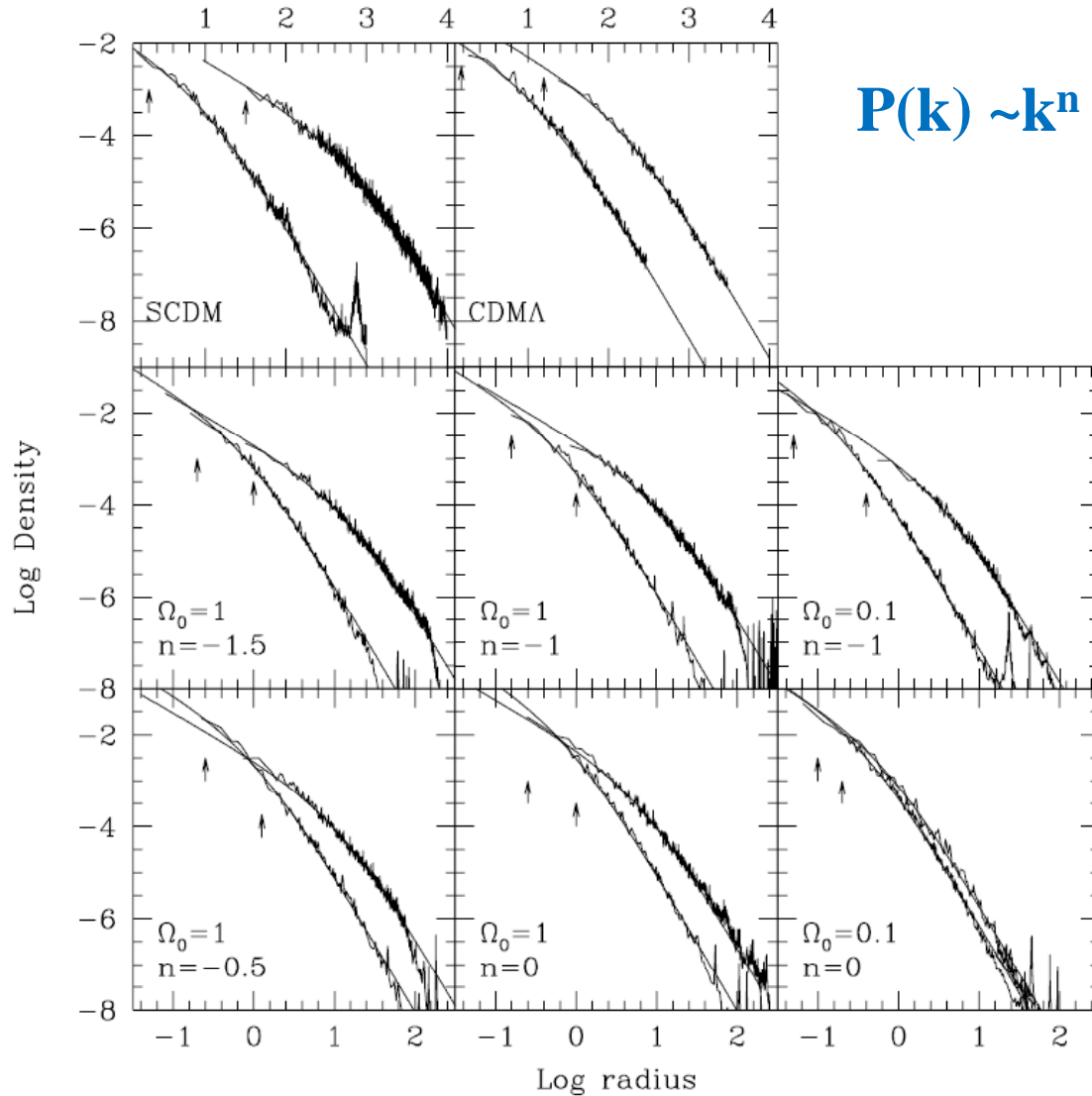
Les résultats des simulations  $\Lambda$ CDM montrent une loi de densité universelle pour les halos de MN  
→ Profils NFW (Navarro, Frenk & White 1997)

**Deux lois de puissance**  $\rho \sim r^{-1}$  au centre, puis  $\rho \sim r^{-3}$  au bord

Les halos de petite masse sont plus denses au centre  
Ceci est dû à leur formation plus tôt dans l'univers

La densité moyenne d'un halo est proportionnelle à la densité moyenne de l'univers à sa formation

# Profil universel



2 paramètres  $M_{\text{vir}}$

Concentration  $c = r_{\text{vir}}/r_s$

$$\frac{\rho(r)}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{\delta_c}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}$$

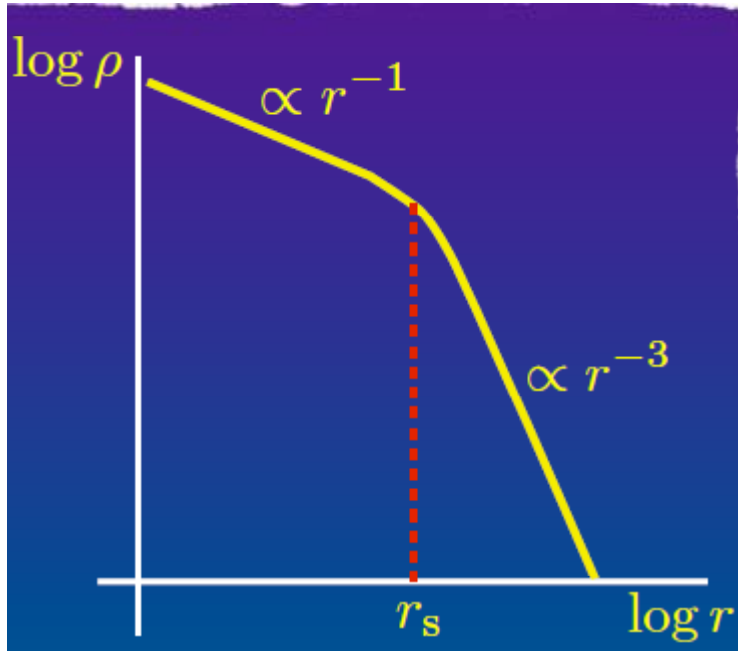
Comparaison halos légers et massifs

Les petits halos se forment plus tôt (plus denses)

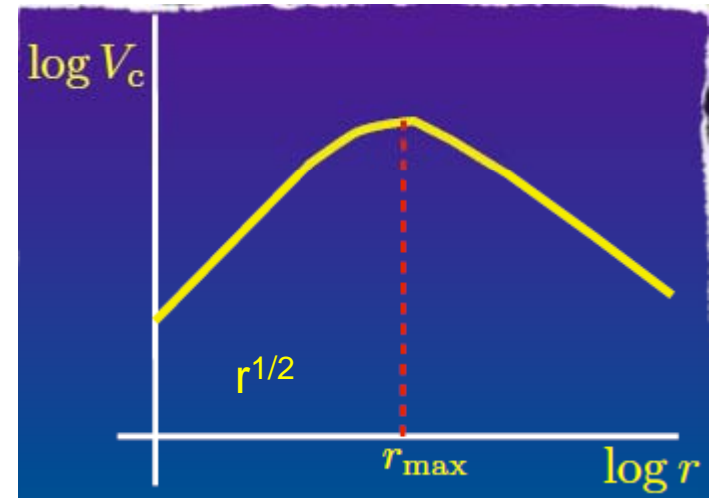
Flèches: résolution a  
Rayon de Viriel= 100 x a

*Navarro, Frenk & White (1997)*

# Vitesse de rotation du halo universel



$$V_c(r) = V_{vir} \sqrt{\frac{f(cx)}{xf(c)}}$$



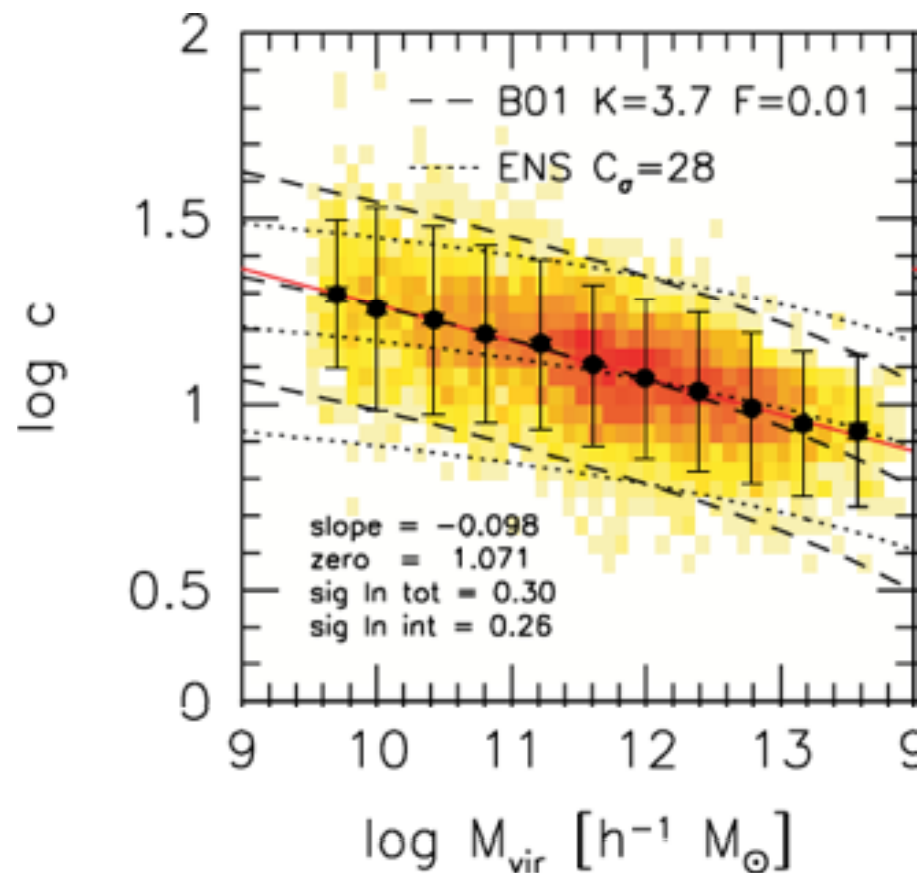
$$f(x) = \ln(1+x) + x/(1+x)$$

$V_c$  = vitesse circulaire

$$R_{max} = 2.163 r_s$$

$$c=10, V_{max} = 1.2 V_{vir}$$

# Anti-corrélation Masse-Concentration



Les petits halos sont plus concentrés

Avec une forte dispersion

Au début, relaxation violente

→ NFW  $c \sim 4$

Puis accretion plus lente qui  
accroît masse et taille du halo  
du centre vers le bord

$C=r_{\text{vir}}/r_s$  augmente

# Questions fondamentales

Pourquoi existe-t-il des galaxies, avec les tailles et masses observées?

Pourquoi sont-elles regroupées en amas et super-amas?

Quelle est l'origine de cette hiérarchie?

La réponse est en grande partie dans la nature de la matière noire, le nombre et la masse des particules.

**MN chaude, neutrinos:** Les masses qui se forment sont de  $10^{15}M_{\odot}$ , puis leur fragmentation devrait produire les galaxies → pas assez de petites structures

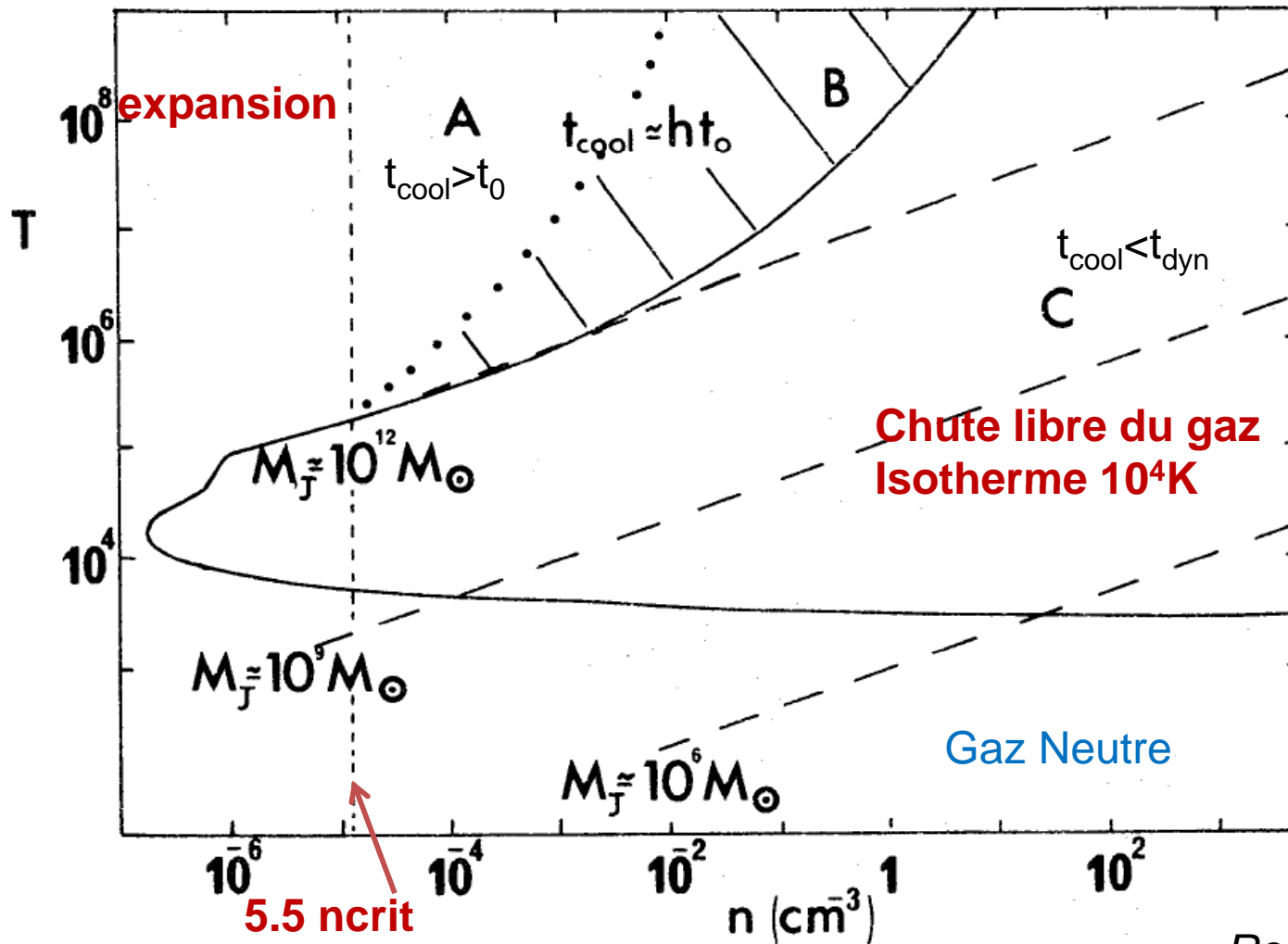
**MN froide, particules plus massives:** se découplent bien plus tôt que les neutrinos, sont moins nombreuses en nombre  
→ Meilleur accord avec les observations

**Mais il s'agit des halos noirs, pas des galaxies!**



# Influence du temps de refroidissement

Valeurs relatives de  $t_{cool} \sim T/(n\Lambda(T))$  et  $t_{dyn} \sim n^{-1/2}$



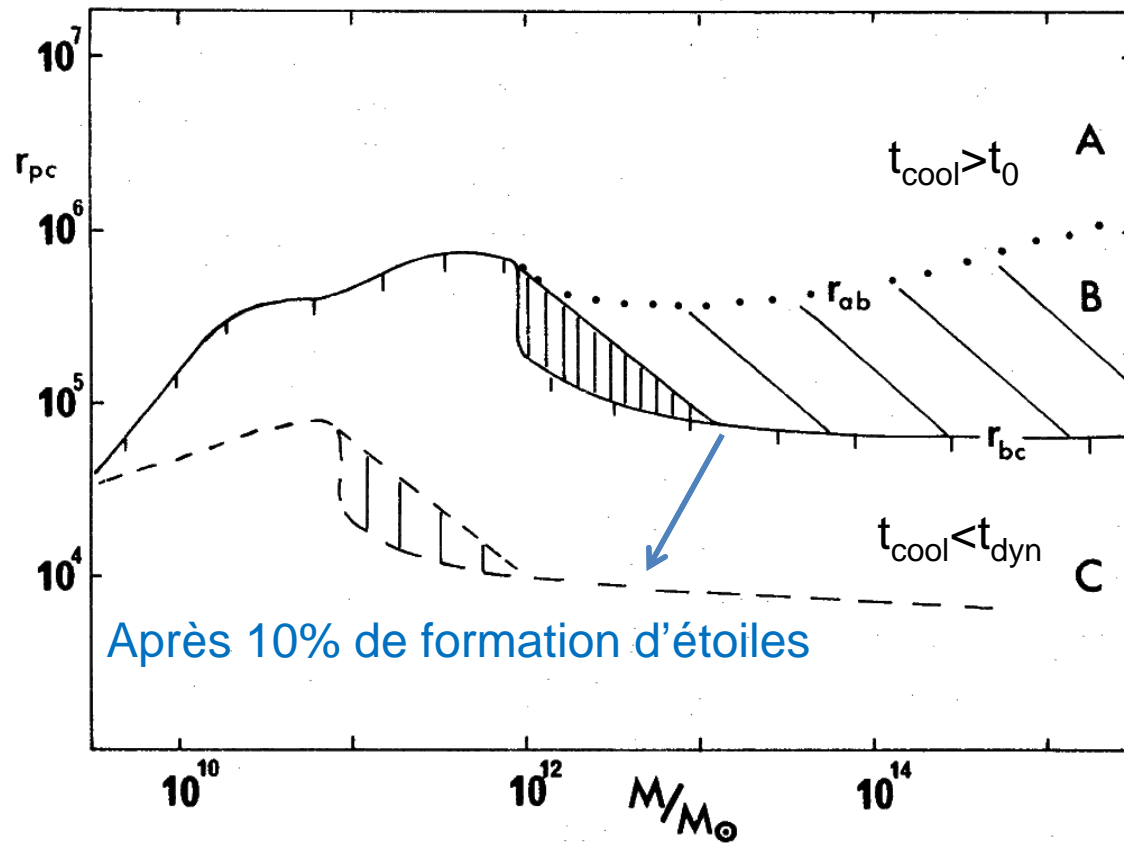
**Courbe pleine**  
 **$t_{cool}=t_{dyn}$**

Gaz H, He  
Masse de Jeans  
 $M_J$  courbes  
 $T \sim n^{1/3}$   
**Lieu des nuages**  
**à l'équilibre**

**B nuages quasi-**  
**statiques**

# Tailles et masses des structures

## Influence des processus élémentaires



Rayons définis par

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho r^3$$

$$r_{bc} \sim 75 \text{kpc}$$

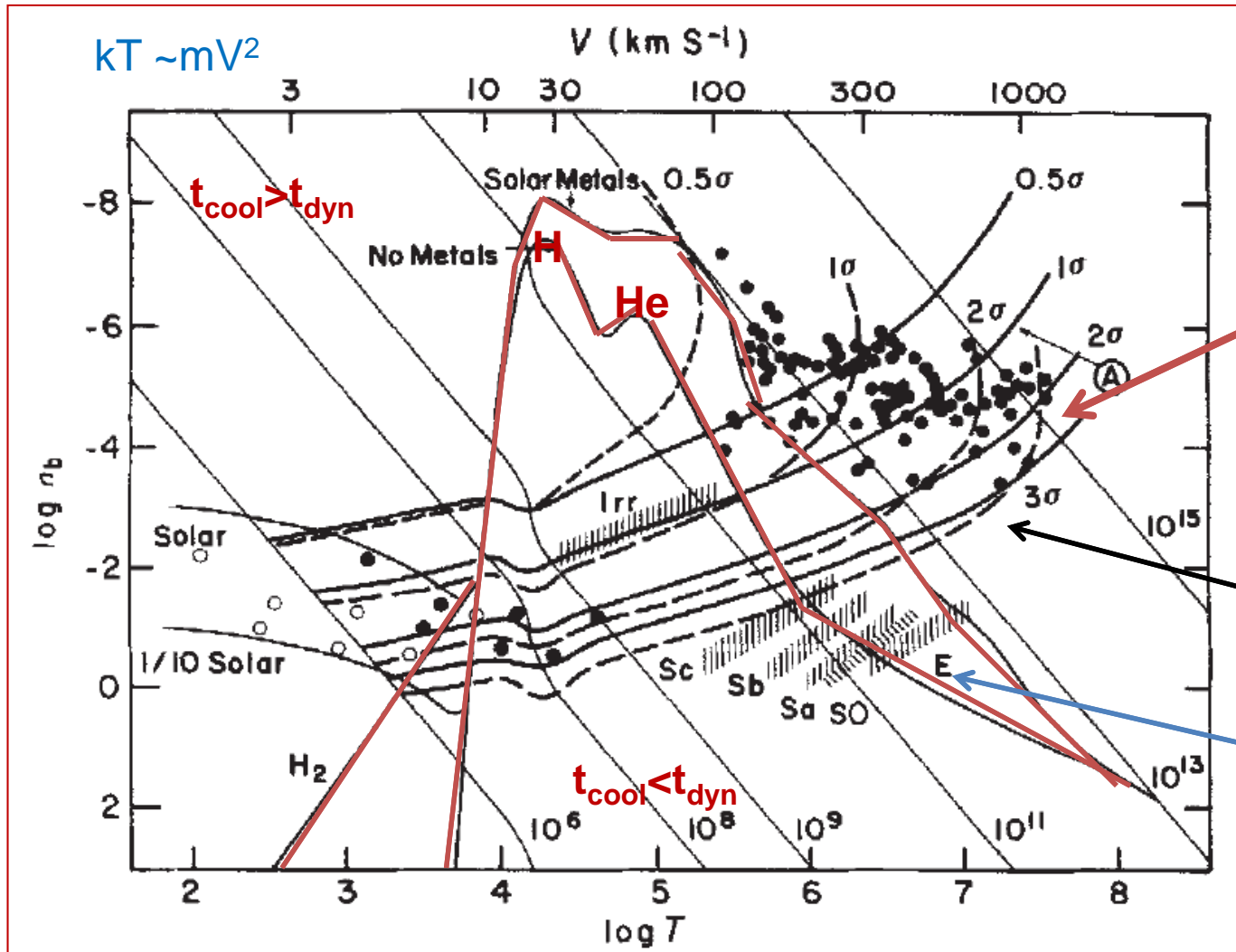
Les masses  $10^{10}$ - $10^{12} M_{\odot}$

S'effondrent à l'époque de la virialisation

**Pourrait expliquer le domaine de masses des galaxies**

Petites galaxies pourraient se former plus tard

# L'effondrement des baryons



$$M_{\text{vir}} = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$$

$$V^2 = GM_{\text{vir}} / R_{\text{vir}}$$

**Groupes,  
Amas**

Courbes de  
fluctuations de  
densité à  $x\sigma$

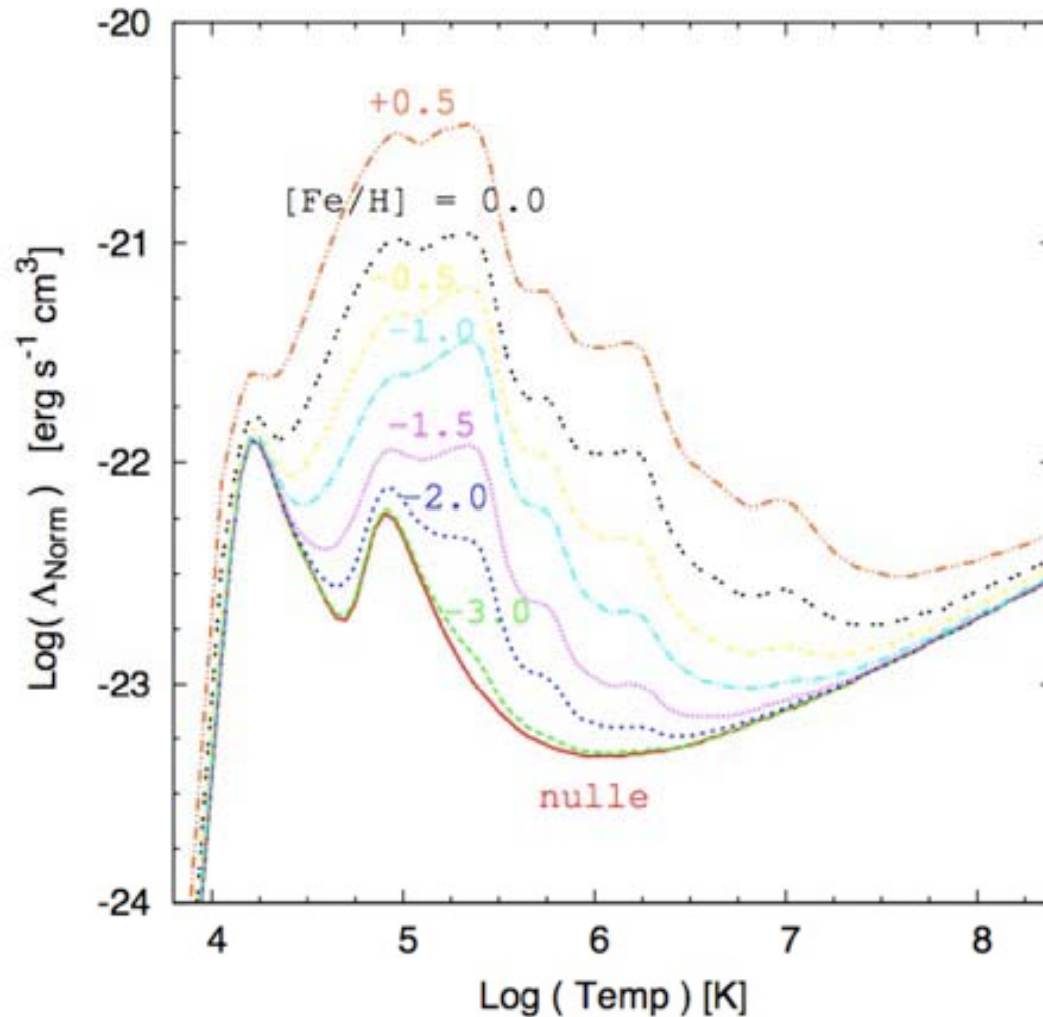
**Galaxies**

Température de Viriel de la structure

Blumenthal et al 1984<sup>43</sup>

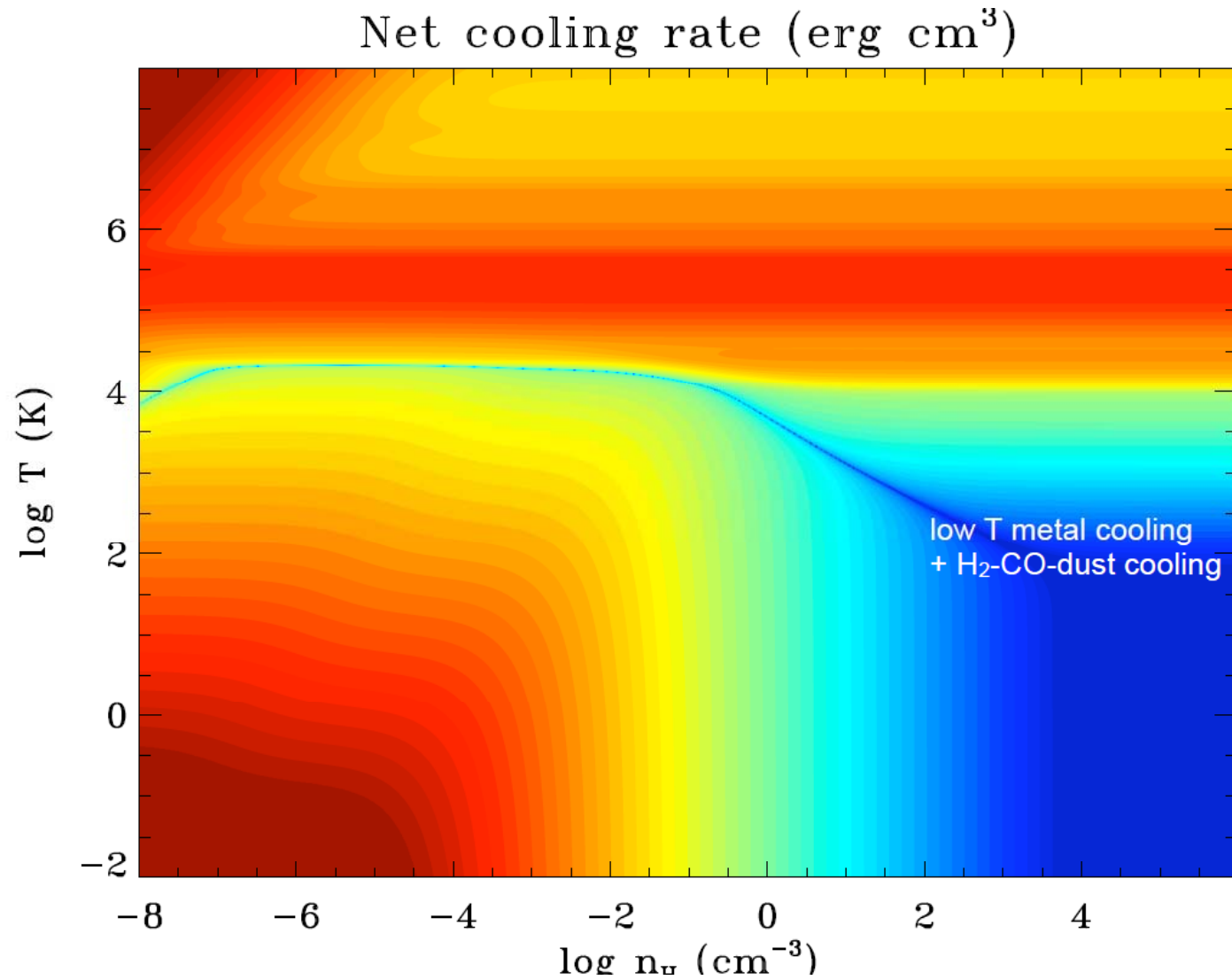
# Chauffage-refroidissement du gaz

Dépend densité, Température, et aussi métallicité

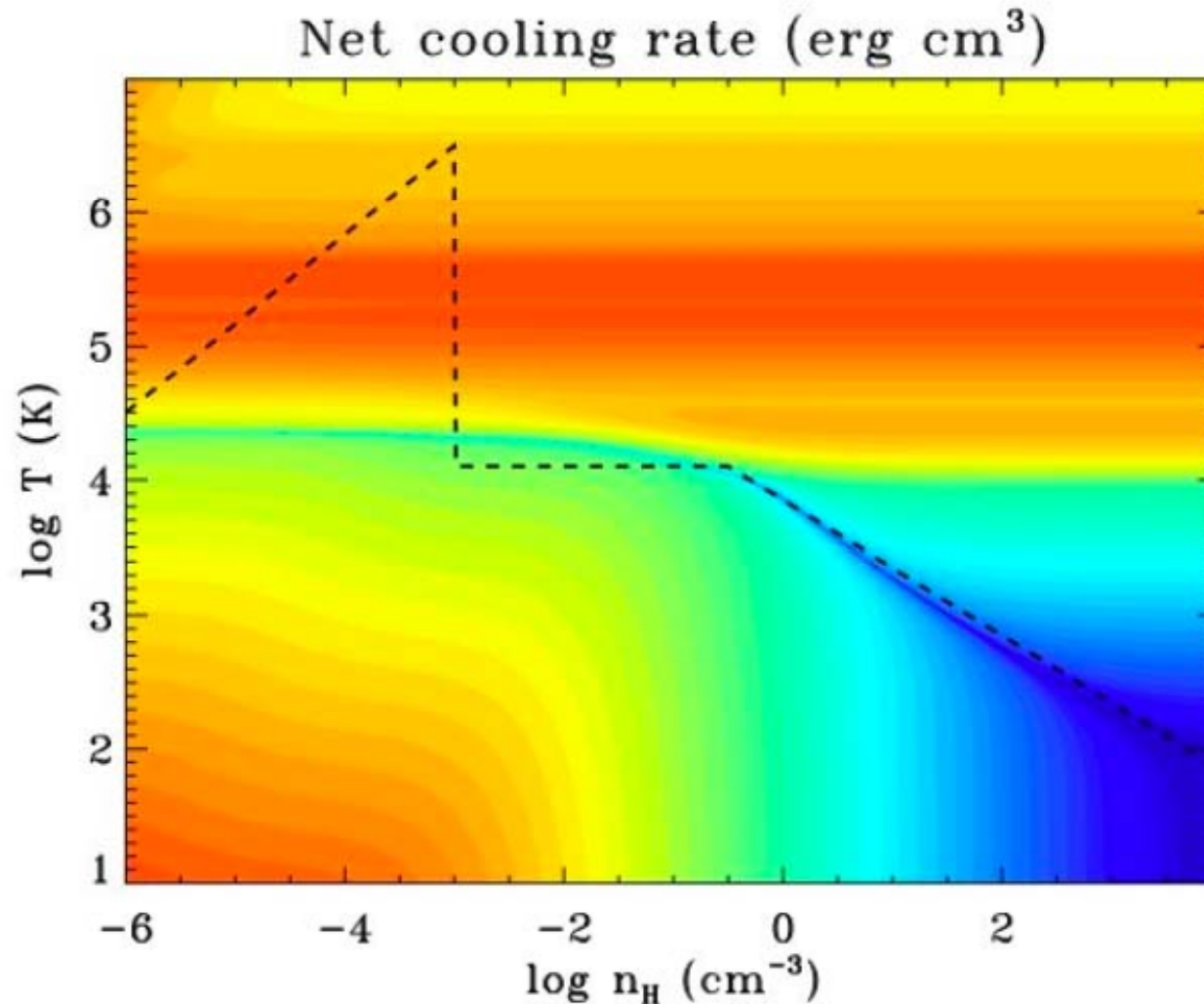


Processus complexes  
Formation d'étoiles  
Rejet des éléments lourds  
Formation de la poussière

# Equation d'état du gaz



# Pression artificielle, température plancher



Pour ne pas voir la  
longueur de Jeans  
tomber  $< h$

→ Ajout de  $T_{\min}$   
ou pression min

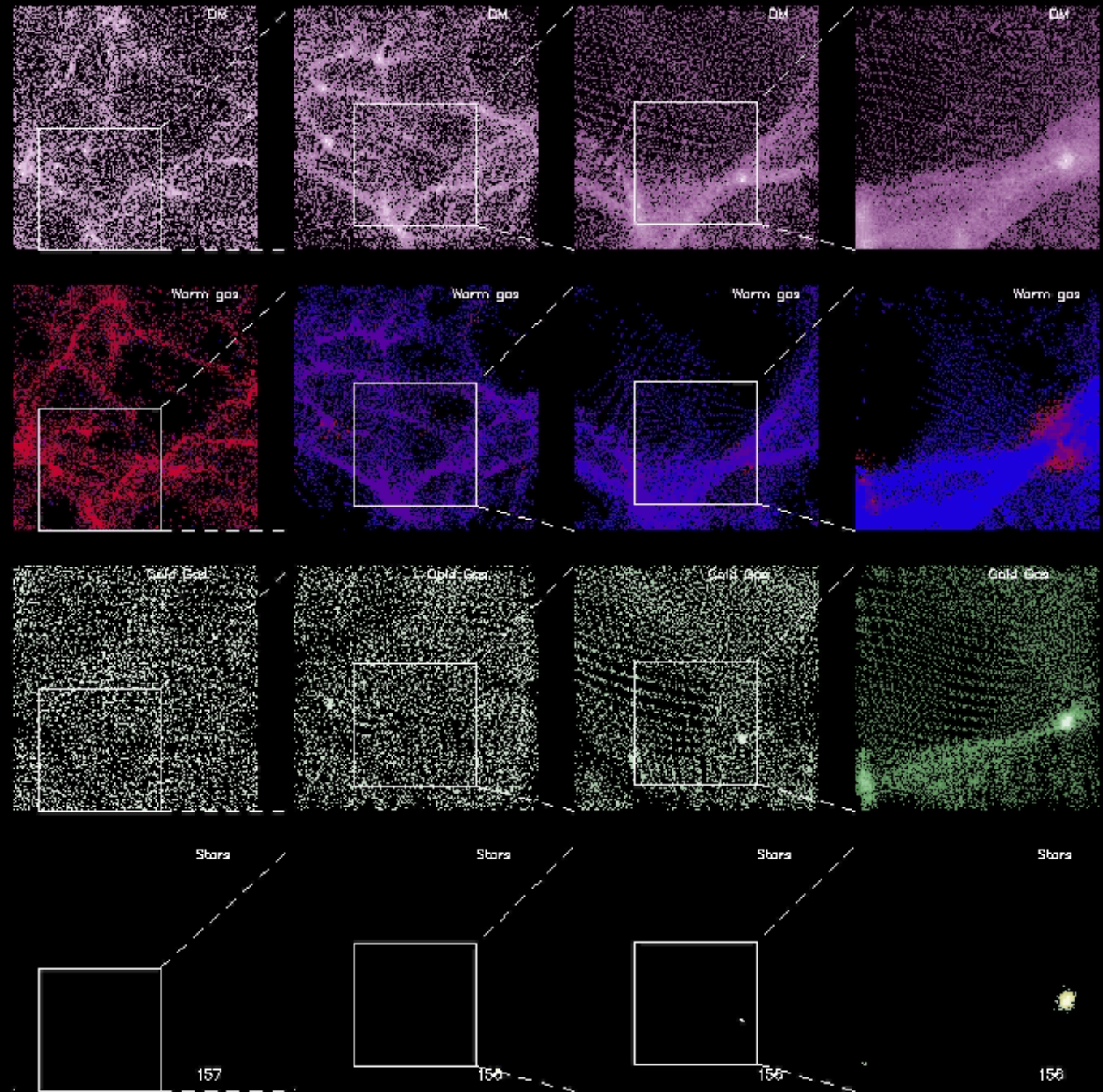
Cela revient à créer  
une longueur de  
Jeans minimum

Et aussi  $M_J$  min

4 « phases »

4 Niveaux de Zoom  
de 20 à 2.5 Mpc.

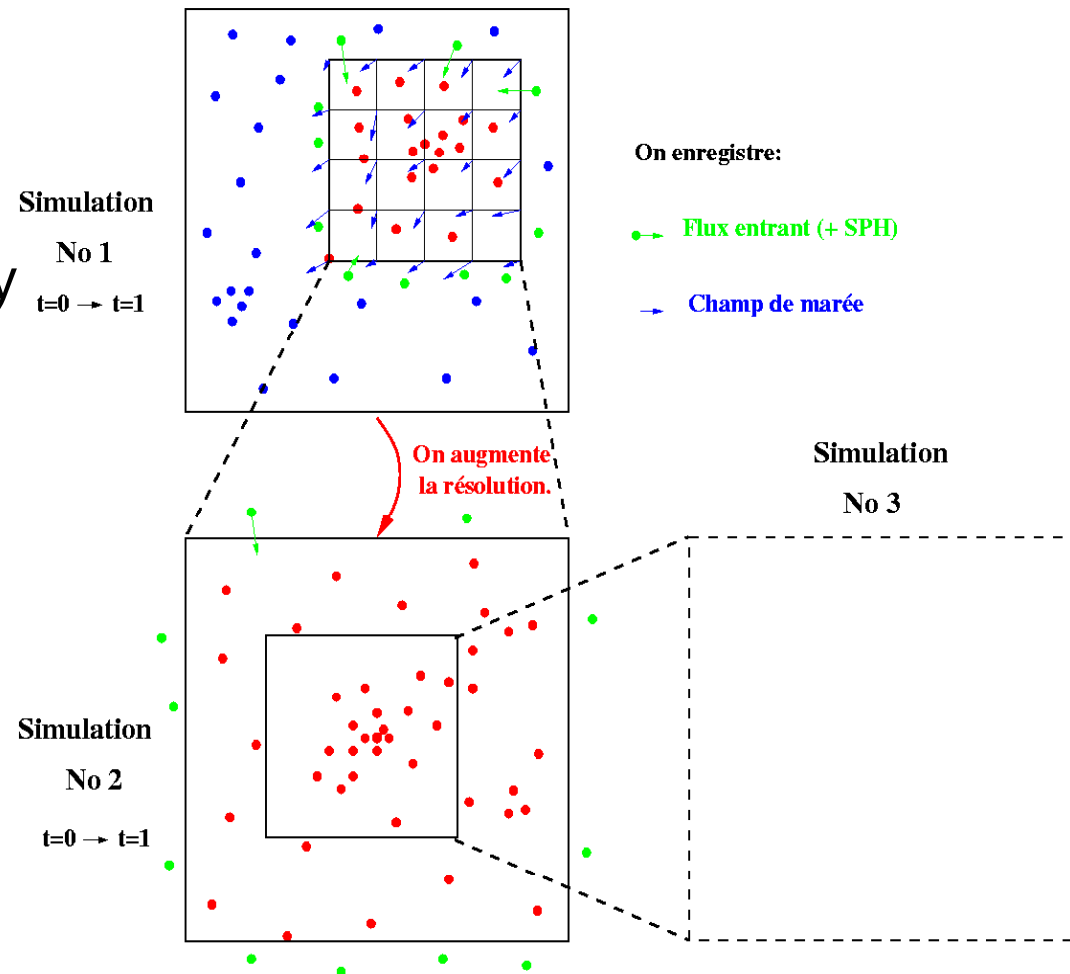
$z = 3$ . (de  $z=10$ .)



# Technique *Multi-zoom*

## Objectif:

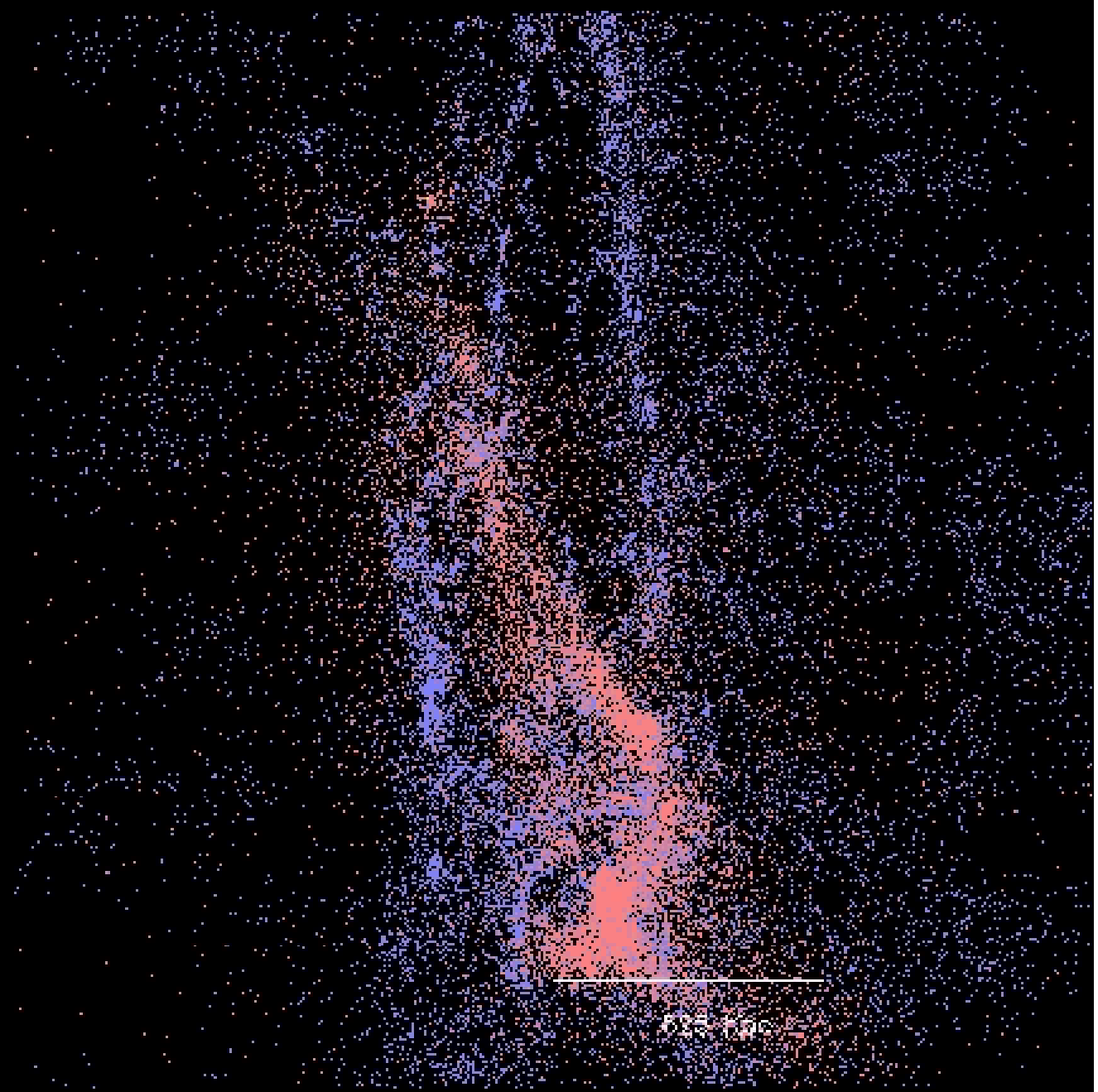
- Evolution d'une galaxy (0.1 to 10 kpc)
- Accrétion du gaz (10 Mpc)





# Galaxies et Filaments

Multi-zoom



*(Semelin & Combes 2003)*

# Aquarius: Essai de reproduire la Voie lactée

Avec Tree-SPH (Gadget) Simulations de matière noire seulement  
*Springel et al 2008*

Mais avec une plus grande résolution, avec une boîte plus petite  
que le Millenium (100Mpc)

Focalisée sur un halo comme celui de la Voie lactée

Contraste de densité  $10^6 \rightarrow$  non-linéarité

Résolution 20-60pc, 1-100 millions particules

**300 000 sous-halos, à l'intérieur du halo principal!**

Mais la masse comprise dans les sous-halos décroît avec le niveau

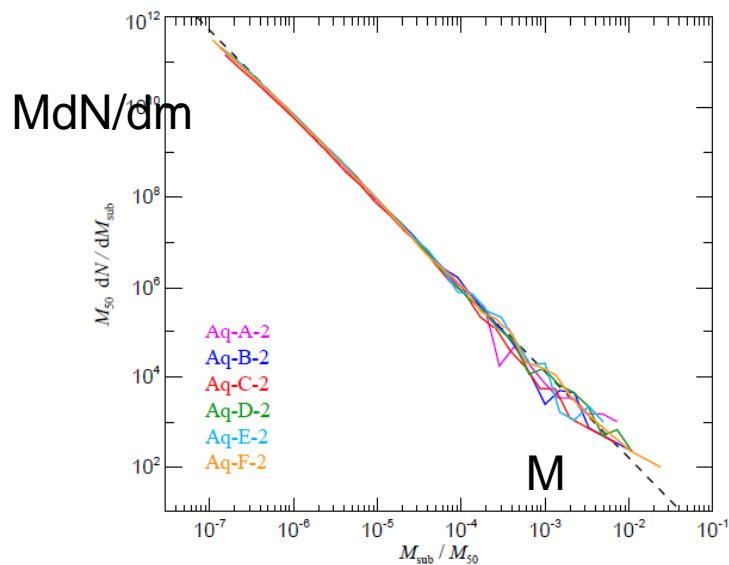
Au 4ème niveau, en dessous de 3% dans 100 kpc pour des  $M_{\text{terre}}$

Film de  $z=50$  à  $z=0$  Aq-E-2

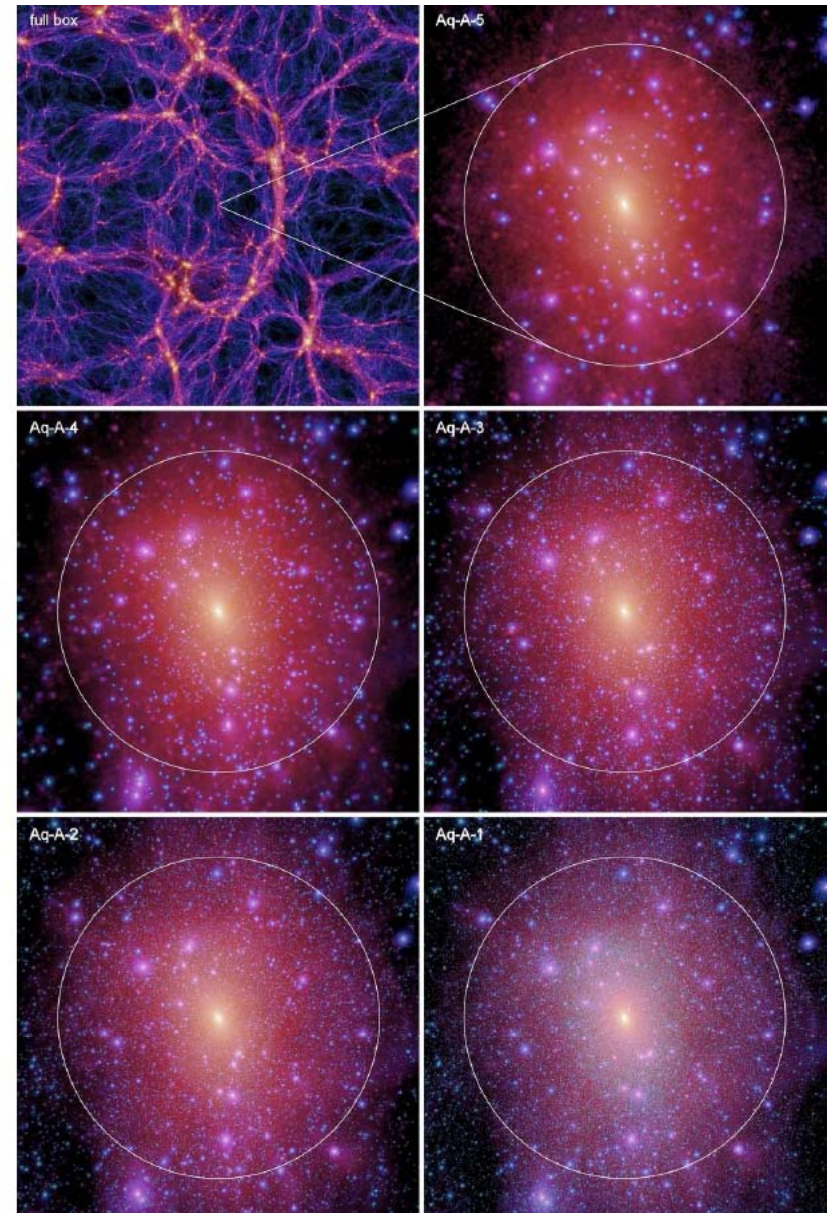
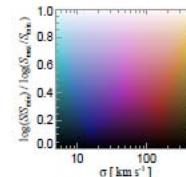
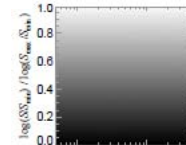
# Re-simulations, à plus haute résolution

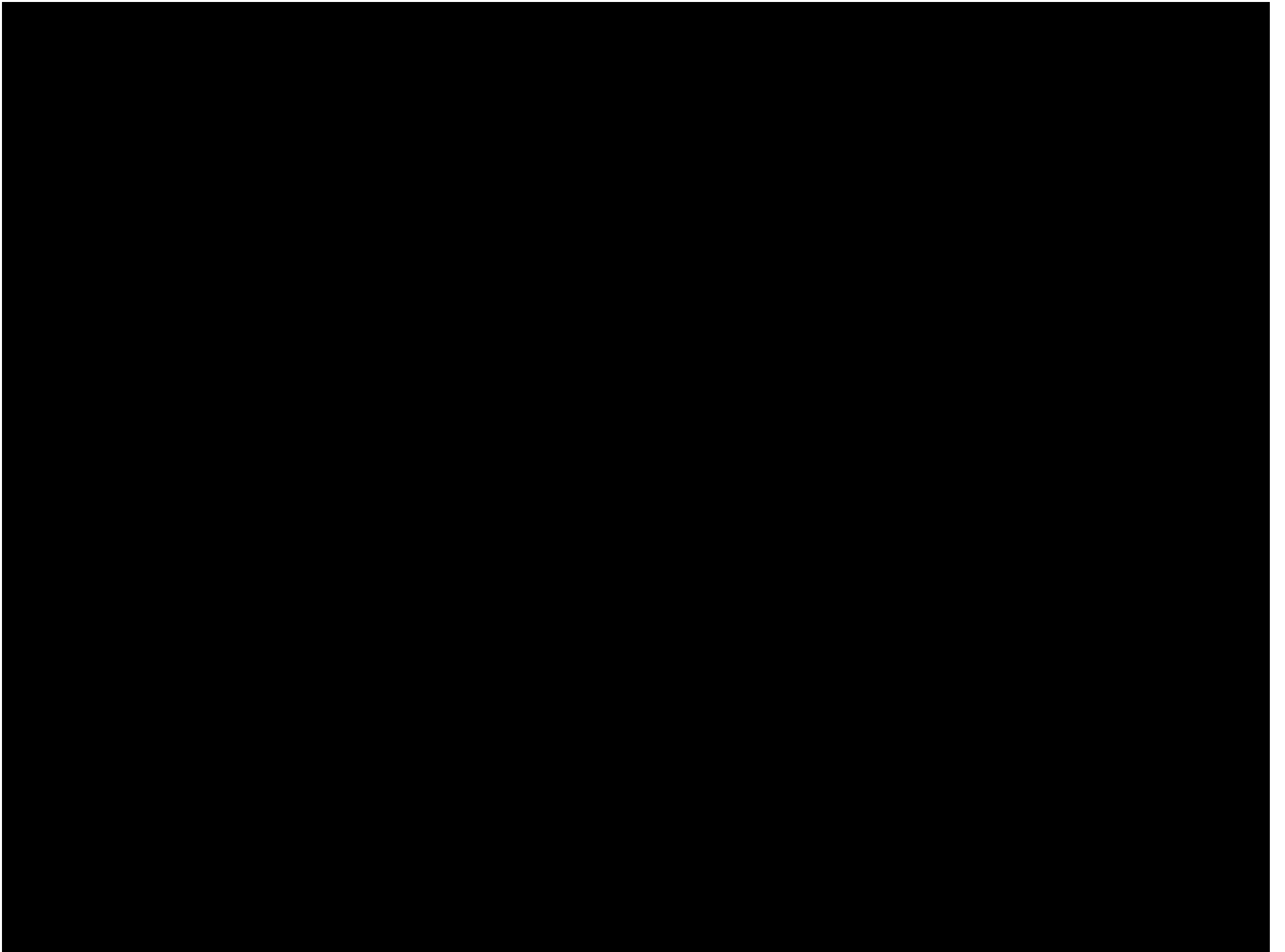
Plus de petites structures, halos noirs à haute résolution

Profil NFW cuspidé pente -1



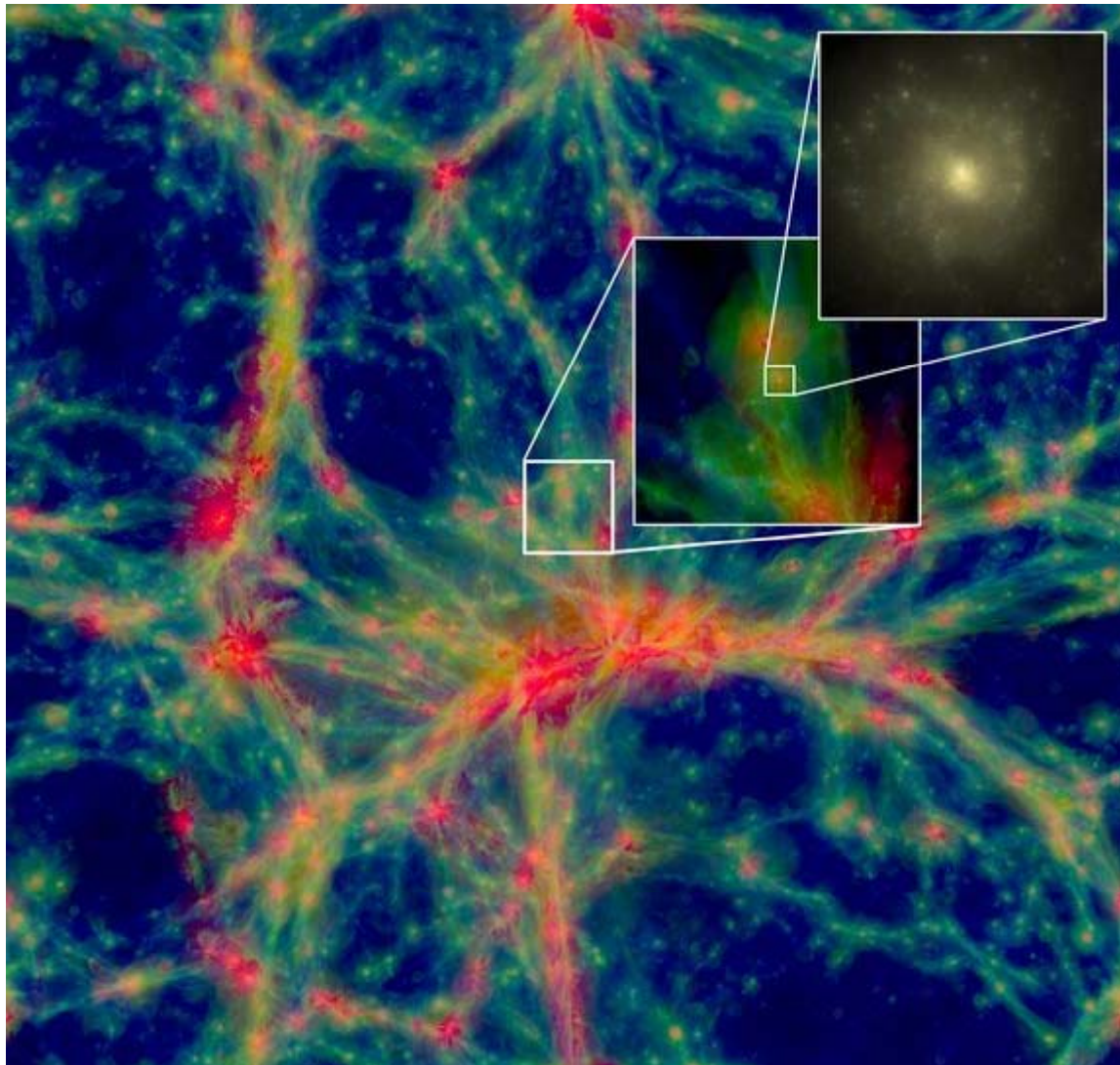
Intensité= densité<sup>2</sup>  
Couleur= dispersion de vitesse  
*Springel et al 2008*





# Simulation EAGLE, avec Hydro

Nouveaux processus de feedback, Supernove et AGN, plus réalistes



Spectre de masse des étoiles  
 $10^8$ - $10^{11}$ Mo, bien reproduit  
Après calibration de SF et  
feedback

Mass-Z relation  $M > 10^9$ Mo

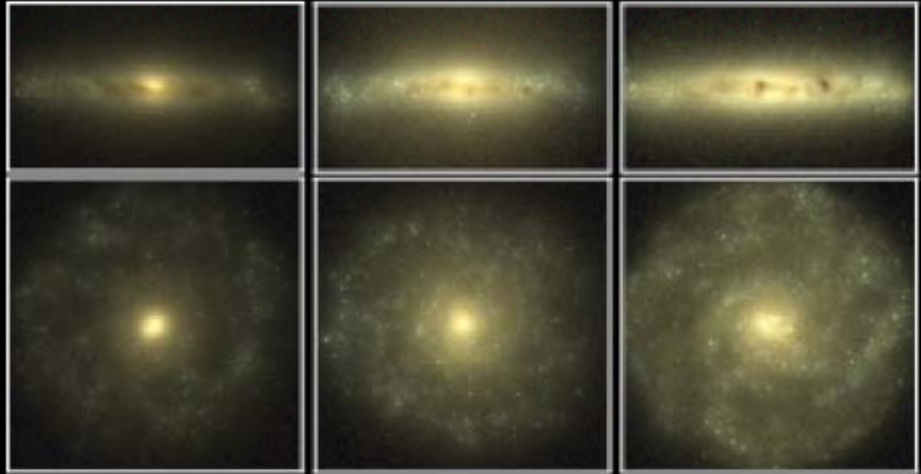
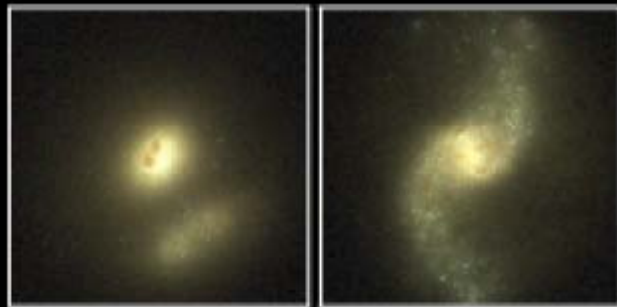
Fraction de gaz, T trop élevés

Code GADGET3 (SPH) avec  
recettes améliorées

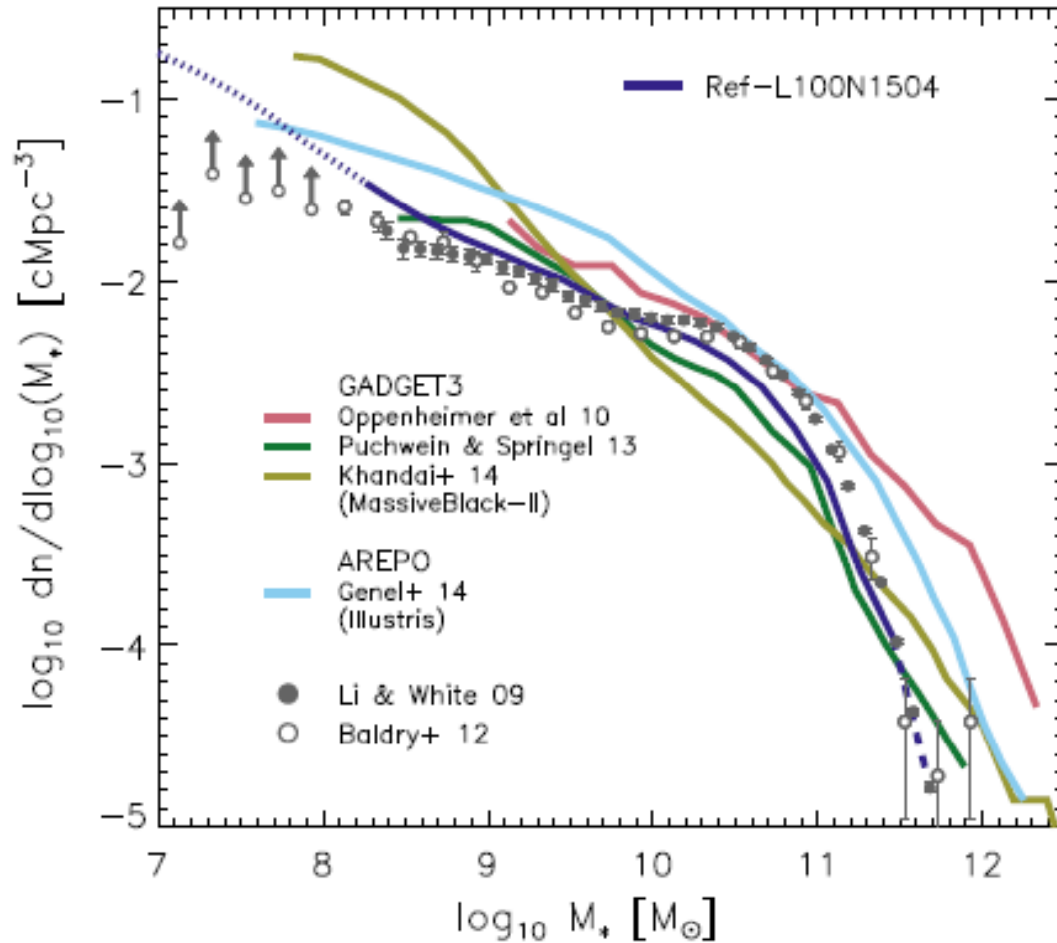
*Schaye et al 2015*

# Formation de galaxies spirales

Retraitement, avec effets de poussière



# Fonction de masse stellaire

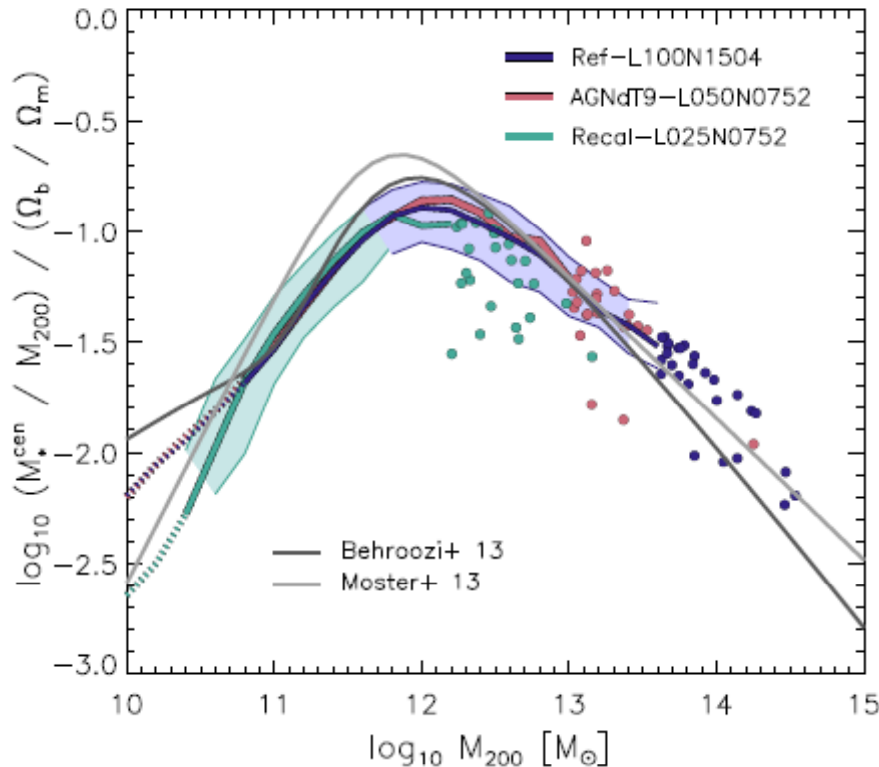


Comparaison entre  
toutes les simulations

Fonction de masse reproduite

Métallicité pas encore

# Fraction de baryons vs Mhalo



Correspond aux modèles  
de HAM  
« Halo Abundance Matching »

Pourtant, la taille des galaxies est  
Encore trop petite  
Problème de Moment angulaire

Refroidissement/chauffage  
Manque de résolution



# CONCLUSIONS

- Matière noire: simulations numériques multi-échelles  
Algorithmes adaptés  $8000^3 \sim 500$  milliards de particules
- Modèle hiérarchique
  - **Profil radial universel NFW**
  - Forme des halos 3D
  - **Moment angulaire**
- Modèles Semi-analytiques
  - Arbres de fusion**
  - Formalisme EPS Press-Schechter étendu
- **Comparaison observations: baryons**