Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe Yoccoz, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Fers à cheval non uniformément hyperboliques

Soit f un difféomorphisme lisse d'une surface M.

On suppose que f possède un ensemble basique K, non trivial et de type selle. Rappelons qu'on désigne ainsi une partie compacte, invariante par f et hyperbolique, non réduite à une orbite périodique, qui vérifie de plus :

— la restriction de f à K possède une orbite dense ;

— K est l'ensemble invariant maximal dans un voisinage de K ;

— K n'est ni un attracteur, ni un répulseur, c'est-à-dire que les ensembles stable $W^s(K)$ et instable $W^u(K)$ ne sont pas ouverts.

Le fer à cheval de Smale est l'archétype de cette situation.

Appelons s-bordant (resp. u-bordant) un point x de K tel qu'au voisinage de x, K soit situé d'un seul côté de la variété stable locale $W^s_{\mathrm{loc}}(x)$ (resp. de la variété instable locale $W^s_{\mathrm{loc}}(x)$). On sait que l'ensemble des points s-bordants est constitué de l'intersection de K avec les variétés stables d'un certain nombre fini d'orbites périodiques de f dans K ; de même pour l'ensemble des points u-bordants.

On dira alors que f se trouve en situation de bifurcation homocline générique si :

— il existe un point $q \in M - K$, un point périodique s-bordant p_s, et un point périodique u-bordant p_u, tels que les variétés stable $W^s(p_s)$ et instable $W^u(p_u)$ ont en q un contact quadratique ;

— le point q est isolé dans $W^s(K) \cap W^u(K)$; plus précisément, si $N > 0$ est un entier tel que $q \in f^{-N}(W^s_{\mathrm{loc}}(p_s)) \cap f^N(W^s_{\mathrm{loc}}(p_u))$, et x_s, x_u sont des points de K proches de p_s, p_u respectivement, alors $f^{-N}(W^s_{\mathrm{loc}}(x_s))$, et $f^N(W^u_{\mathrm{loc}}(x_u))$ ne peuvent se rencontrer au voisinage de q qu'en q;

— lorsque p_s, p_u appartiennent à la même orbite périodique, on impose de plus que la composante connexe de $W^s(p_s) - \{p_s\}$ et la composante connexe de $W^u(p_u) - \{p_u\}$ qui contiennent q rencontrent K.

Sous ces hypothèses considérons l'ensemble Λ_f union de K et de l'orbite de q. C'est un ensemble compact, invariant par f, qui est localement maximal: il existe un voisinage V de Λ_f tel que

$$\Lambda_f = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^{-n}(V).$$

Dans le groupe Diff(M) des difféomorphismes lisses de M, il existe dans un voisinage $\mathscr{U}$ de f une hypersurface lisse $\mathscr{U}_0$, séparant $\mathscr{U}$ en deux composantes $\mathscr{U}_+$, $\mathscr{U}_-$ telle que :

— tout difféomorphisme $g \in \mathscr{U}_0$ se trouve à nouveau en situation de bifurcation homocline générique, et on a

$$\Lambda_g := \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} g^{-n}(V) = K_g \cup \mathscr{O}(q_g)$$

où K_g est la continuation hyperbolique de K et q_g est le point de contact (quadratique) voisin de q entre les variétés stable et instable des continuations hyperboliques de p_s, p_u ;

— pour tout difféomorphisme $g \in \mathscr{U}_-$, l'ensemble maximal g-invariant Λ_g dans V est réduit à la continuation hyperbolique K_g de K.

Lorsque g appartient à $\mathscr{U}_+$, l'ensemble maximal g-invariant Λ_g dans l'ouvert V est encore compact, contient la continuation hyperbolique K_g de K mais aussi de nombreuses orbites supplémentaires de g.

Il s'agit de comprendre, au moins pour la plupart des difféomorphismes $g \in \mathscr{U}_+$, la géométrie de Λ_g.

On sait depuis les travaux de Palis et Takens que la dimension de Hausdorff de K joue un rôle crucial dans cette étude. Ces auteurs ont en effet montré que, lorsque la dimension de K est strictement inférieure à 1, l'ensemble Λ_g est hyperbolique (et même basique) pour la plupart des difféomorphismes $g \in \mathscr{U}_+$. Inversement, d'après Palis et moi-même, une telle propriété ne peut avoir lieu lorsque la dimension de K est strictement supérieure à 1 : les feuilletages stable et instable de K_g présentent alors en effet, pour une proportion significative de $g \in \mathscr{U}_+$, des points de tangence quadratique au voisinage de q qui interdisent à Λ_g d'être hyperbolique.

L'objectif du cours cette année était de commencer à rendre compte de travaux en cours de Palis et moi-même décrivant, pour la plupart des difféomorphismes de $\mathscr{U}_+$, la dynamique de g dans Λ_g, lorsque la dimension de K est strictement supérieure à 1. Nous montrons (sous une hypothèse supplémentaire qui sera évoquée plus loin) que l'ensemble Λ_g a des propriétés d'hyperbolicité non-uniforme, et est de type selle : on peut donc y penser comme un fer à cheval non-uniformément hyperbolique. Les dimensions des ensembles stable $W^s(\Lambda_g)$ et instable $W^u(\Lambda_g)$ sont en effet proches des dimensions initiales de $W^s(K)$, $W^u(K)$

respectivement. Qui plus est, nous construisons sur Λ_g une mesure invariante, dont les exposants de Lyapunoff ne sont pas nuls, et dont la désintégration sur une feuille instable typique est équivalente à une mesure de Hausdorff. La dynamique présente de nombreuses similarités avec celle de l'attracteur de Hénon, étudiée dans le cours de l'année précédente.

Choisissons une famille finie de rectangles $(R_a)_{a \in \mathscr{A}}$, indexée par un alphabet $\mathscr{A}$, induisant pour tout $g \in \mathscr{U}$ une partition de Markov de l'ensemble basique K_g. Notons $\mathscr{B}$ l'ensemble des couples $(a, a') \in \mathscr{A}^2$ tels que $f(R_a) \cap R_{a'} \neq \phi$; on a donc

$$K_g = \cap_{n \in \mathbf{Z}} g^{-n}(\cup_a R_a),$$

et la dynamique de g sur K_g est celle du sous-décalage Σ de type fini de $\mathscr{A}^{\mathbf{Z}}$ défini par $\mathscr{B}$.

Notons q_u (resp. q_s) l'unique point de l'orbite de q tel que $q_u \in \cup_a R_a$ mais $f(q_u) \notin \cup_a R_a$ (resp. $q_s \in \cup_a R_a$ mais $f^{-1}(q_s) \notin \cup_a R_a$). Lorsque $g \in \mathscr{U}_+$, les courbes $W^s(\mathscr{O}(p_s))$ et $W^u(\mathscr{O}(p_u))$ délimitent au voisinage de q_u (resp. q_s) une région lenticulaire L_u (resp. L_s). En notant N_0 l'entier > 1 tel que $f^{N_0}(q_u) = q_s$, on a $L_s = g^{N_0}(L_u)$, $L_s \cup L_u \subset \cup_a R_a$, mais $g^i(L_u) \cap (\cup_a R_a) = \phi$ pour $0 < i < N_0$. Il est facile de voir qu'on a :

$$\Lambda_g = \cap_{n \in \mathbf{Z}} g^{-n}(\cup_a R_a \cup_{0<i<N_0} g^i(L_u)).$$

La dynamique est donc constituée

— des applications de transition

$$g : g^{-1}(R_{a'}) \cap R_a \to R_{a'} \cap g(R_a),\ (a, a') \in \mathscr{B} \ ;$$

— de l'application $g^{N_0} : L_u \to L_s$, qui, couplée avec les précédentes, produit de sérieuses complications.

Il est utile d'introduire, dans chaque rectangle R_a, des coordonnées (x_a, y_a), de sorte que le champ de cônes canonique $\{|y_a| \leq |x_a|\}$ vérifie les propriétés usuelles garantissant l'hyperbolicité de K_g, la direction stable (resp. instable) étant essentiellement verticale (resp. horizontale). L'application de transition $(x_a, y_a) \mapsto (x'_{a'}, y'_{a'})$ peut alors être décrite implicitement par deux applications lisses $A_{aa'}$, $B_{aa'}$ vérifiant :

$$x_a = A_{aa'}(y_a, x'_{a'}),$$
$$y'_{a'} = B_{aa'}(y_a, x'_{a'}).$$

En d'autres termes, la restriction au graphe de l'application de transition de la projection $(x_a, y_a, x'_{a'}, y'_{a'}) \mapsto (y_a, x'_{a'})$ est un difféomorphisme. Par contre, la restriction au graphe de $g^{N_0} : L_u \to L_s$ de la projection $(x_u, y_u, x_s, y_s) \mapsto (y_u, x_s)$ présente une ligne de pli (on a désigné par (x_u, y_u) (resp. (x_s, y_s)) les coordonnées du rectangle qui contient L_u (resp. L_s)).

L'emploi de ces outils a été illustré dans le cadre beaucoup plus simple d'une bifurcation homocline associée à un point fixe hyperbolique ; on a ainsi retrouvé et précisé un résultat de Newhouse, Palis et Takens.

On a ensuite entrepris de décrire quelle doit être la dynamique des « bons » difféomorphismes $g \in \mathscr{U}^+$, qu'on appelle *réguliers* dans la suite.

Un rectangle régulier est une partie P d'un rectangle R_a, de la forme $\{\varphi_P^{s,-}(y_a) \leq x_a \leq \varphi_P^{s,+}(y_a)\}$ telle qu'il existe un entier $n \geq 0$ (l'*ordre* de P) pour lequel

— $g^n(P)$ est une partie d'un rectangle $R_{a'}$, de la forme $\{\varphi_P^{u,-}(x_{a'}) \leq y_{a'} \leq \varphi_P^{u,+}(x_{a'})\}$;

— l'application g^n / P vérifie la même condition de cône que les applications de transition élémentaires.

On peut alors décrire l'application $g_P := g^n / P$ implicitement par des applications lisses A_P, B_P. La distorsion de g_P est contrôlée par les dérivées partielles d'ordre 2 de A_P, B_P.

Une famille $\mathscr{R}$ de rectangles réguliers est dite admissible si

(a) les éléments d'ordre 0 sont les R_a, $a \in \mathscr{A}$, et ceux d'ordre 1 sont les $R_a \cap g^{-1}(R_{a'})$, $(a, a') \in \mathscr{B}$;

(b) les distorsions sont uniformément bornées ;

(c) on a la propriété de stabilité suivante : chaque fois que des rectangles P, $\tilde{P}$, $P' \in \mathscr{R}$ d'ordres respectifs n, $n+k$, $n+l$ vérifient $P' \subset P$, $g^k(\tilde{P}) \subset P$, l'intersection $\tilde{P}' = g^{-k}(P') \cap \tilde{P}$ est aussi un rectangle de $\mathscr{R}$, d'ordre $n+k+l$.

A l'ensemble basique K_g est associée la famille admissible minimale $\mathscr{R}_0$, paramétrée par les mots finis de Σ, constituée des rectangles P tels que g_P soit composée uniquement d'applications de transition (à l'exclusion de $g^{N_0}: L_u \to L_s$).

Considérons une famille admissible $\mathscr{R}$ de rectangles réguliers. Lorsque $(P_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement décroissante d'éléments de $\mathscr{R}$, l'intersection des P_n est une courbe lisse traversant l'un des $\mathscr{R}_a$ de façon essentiellement verticale (et sera un morceau de la variété stable d'un point de Λ_g). L'ensemble de ces courbes sera noté $\mathscr{R}^\infty$, et l'union de ces courbes sera notée $\tilde{\mathscr{R}}^\infty$.

L'ordre réduit $N(P)$ d'un rectangle P d'ordre $n(P) > 0$ est défini inductivement de la façon suivante : si $n(P) = 1$ (c'est-à-dire que P est l'un des $g^{-1}(R_{a'}) \cap R_a$), on a $N(P) = 1$; si $n(P) > 1$, on considère le plus petit rectangle $\tilde{P} \in \mathscr{R}$ qui contient strictement P ; on a $N(P) = N(\tilde{P})$ ou $N(P) = n(P)$ suivant que $g^{N(\tilde{P})}(P)$ est ou non contenu dans un rectangle de $\mathscr{R}$ d'ordre $n(P) - N(\tilde{P})$. On dit que P est *primitif* si $N(P) = n(P)$; les rectangles non primitifs sont obtenus à partir des rectangles primitifs par itération de la propriété de stabilité de la famille $\mathscr{R}$.

Notons $\mathscr{N}$ l'ensemble des courbes $\omega \in \mathscr{R}^\infty$ qui sont contenues dans une infinité de rectangles primitifs. Lorsque $\omega \in \mathscr{R}^\infty - \mathscr{N}$, on considère le plus petit rectangle primitif P qui contient ω, et on voit facilement que $g^{n(P)}(\omega)$ est contenu dans une courbe $\omega' \in \mathscr{R}^\infty$; on pose alors

$$T(\omega) = \omega',$$

$$\tilde{T}(x) = g^{n(P)}(x),\ x \in \omega.$$

L'application T jouit de la propriété de Markov suivante : si P est primitif, notons $\mathscr{R}^{\infty}(P)$ l'ensemble des $\omega \in \mathscr{R}^{\infty}$ tels que P est le plus petit rectangle primitif contenant ω ; la restriction de T à $\mathscr{R}^{\infty}(P)$ est un homéomorphisme sur la partie de $\mathscr{R}^{\infty}$ constituée des courbes ω' situées dans le même rectangle R_a que $g_p(P)$.

On choisit dans chaque rectangle R_a une courbe essentiellement horizontale, de sorte que chaque $\omega \in \mathscr{R}^{\infty}$ rencontre l'une de ces courbes (transversalement) en exactement un point. Ayant ainsi identifié $\mathscr{R}^{\infty}$ à une partie de l'union de ce système de courbes, on construit un opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius associé à T, dépendant d'un paramètre de dimension d, de façon que la dimension de Hausdorff $\tilde{d}_s$ de $\mathscr{R}^{\infty}$ (qui sera en fait la dimension transverse de $W^s(\Lambda_g)$) soit précisément la valeur de d pour laquelle la valeur propre dominante vaut 1. Pour que cette construction soit possible, une hypothèse supplémentaire sur $\mathscr{R}$, que nous n'expliciterons pas ici, est nécessaire. Sous cette condition, les conclusions sont les suivantes :

— la dimension $\tilde{d}_s$ est proche de la dimension transverse d_s de $W^s(K)$;

— il existe sur $\mathscr{R}^{\infty}$ une unique mesure de probabilité μ_s, invariante par T, se comportant comme la mesure de Hausdorff en dimension $\tilde{d}_s$; elle est ergodique ;

— la mesure μ_s se relève en une unique mesure $\tilde{\mu}_s$ sur $\tilde{\mathscr{R}}^{\infty}$ invariante par $\tilde{T}$,

— en distribuant $\tilde{\mu}_s$ le long des segments d'orbites de g qui représentent une itération de $\tilde{T}$, on obtient une mesure de probabilité ν_s, invariante par g. Ses exposants de Lyapunoff ne sont pas nuls.

On a ainsi une description assez satisfaisante, de type non-uniformément hyperbolique, de la dynamique de g sur l'ensemble $\cup_{n \geq 0} g^{-n}(\tilde{\mathscr{R}}^{\infty})$. Encore faut-il que ce dernier ensemble représente une partie significative de $W^s(\Lambda_g)$! On dira ainsi que la famille $\mathscr{R}$ est pleine si, en sus des hypothèses précédentes, la dimension transverse de $W^s(\Lambda_g) - \cup_{n \geq 0} g^{-n}(\tilde{\mathscr{R}}^{\infty})$ est $< \tilde{d}_s$; les difféomorphismes réguliers sont ceux pour lesquels il existe une famille admissible pleine.

Le problème est donc, pour la plupart des difféomorphismes $g \in \mathscr{U}_+$, d'agrandir la famille minimale $\mathscr{R}_0$ en une famille pleine. Ce processus se fait progressivement, en considérant des échelles de plus en plus petites pour l'épaisseur des rectangles réguliers considérés. En fait, pour que l'induction soit efficace, il faut considérer des classes de bandes verticales et horizontales plus générales que celles des rectangles réguliers P et leurs images $g_P(P)$.

Soient P une bande verticale rencontrant L_s, d'épaisseur $|P|_s$, et Q une bande horizontale rencontrant L_u, et d'épaisseur $|Q|_u$.

L'image par g^{N_0} de $Q \cap L_u$ est une bande parabolique contenue dans L_s. On dit que P et Q sont en *position relative transverse* si la distance $d(P, Q)$ du sommet de cette bande parabolique à P vérifie

$$d(P, Q) \geq [\max(|P|_s, |Q|_u)]^{1-\eta},$$

où $0 < \eta \ll 1$ est une constante. On dit que Q définit une *bande critique d'épaisseur* ε si on a $|Q|_u \sim \varepsilon$ et s'il existe une bande verticale P avec $|P|_u \sim \varepsilon$ telle que P et Q ne sont pas en position relative transverse.

On peut subdiviser le processus d'induction en deux opérations complémentaires :

1. Localisation horizontale.
   Il s'agit ici de raccourcir une bande critique horizontale de façon à ne garder après application de g^{N_0} que le sommet de la bande parabolique image. Cette localisation est déterminée par l'évolution en temps positifs de la bande critique considérée.
2. Lorsque la bande parabolique image est trop épaisse pour qu'on puisse déterminer son sommet de façon précise, on procède à une subdivision verticale, déterminée par l'évolution en temps négatifs de la bande critique considérée. Les sous-bandes obtenues peuvent être ou non critiques.

Le processus de subdivision verticale mène à la construction de l'arbre critique : les sommets en sont les bandes critiques (à localisation horizontale près), et on relie par une arête chacune de ces bandes à la plus petite de celles qui la contiennent strictement.

Pour permettre à l'induction de se poursuivre, il faut à chaque étape imposer des conditions supplémentaires sur le difféomorphisme g, dont il faudra vérifier ultérieurement qu'elles sont le plus souvent satisfaites. Il s'agit en particulier de contrôler la croissance de l'arbre critique, en imposant que le nombre de bandes critiques d'épaisseur $\sim \varepsilon$ soit $\mathcal{O}(\varepsilon^{1-HD(K)-\eta})$; le lieu critique, ensemble des points qui appartiennent à une suite décroissante de bandes critiques, sera ainsi de dimension fractale $\leq HD(K) - 1 + \eta$. On demande également que pour tout point critique c, déterminé par une suite décroissante $(Q_n)_{n \geq 0}$ de bandes critiques, les sommets des bandes paraboliques $g^{N_0}(Q_n)$ soient contenus dans des rectangles réguliers (construits dans une étape antérieure de l'induction) de plus en plus fins, déterminant ainsi une courbe $\omega \in \mathcal{R}^\infty$ qu'on note $T(c)$; qui plus est, on exige que $T(c)$ appartienne au domaine de T^n pour tout $n > 0$, et que la plus grande partie des itérations de T correspondantes se fasse au moyen des applications de transition (de préférence à celles dont $g^{N_0} : L_u \to L_s$ est un facteur).

Les étapes initiales de l'induction ont été décrites dans le cours de cette année de façon précise ; elles sont plus simples que les étapes ultérieures, car la subdivision verticale est systématiquement binaire (aux échelles plus petites, la subdivision binaire est encore la règle, mais des exceptions apparaissent).

On se proposera dans le cours de l'année 1999-2000 de compléter la mise en place de l'induction à toutes échelles, et surtout de prouver que les conditions imposées aux difféomorphismes tout au long de ce processus n'en éliminent qu'une proportion négligeable. En fait, dans la version présentée cette année de la construction d'une famille admissible pleine, il est nécessaire de supposer que les dimensions transverses d_s, d_u de $W^s(K)$, $W^u(K)$ respectivement vérifient

$$2d_s^2 + 2d_u^2 + 3d_sd_u < 3d_s + 2d_u.$$

On espère assouplir la construction pour s'affranchir de cette restriction.

J.-C. Y.

Missions et Conférences à l'étranger

31 août-18 septembre 1998 : co-directeur d'une école d'été sur les systèmes dynamiques à l'ICTP (Trieste). Cycle de 6 conférences sur la dynamique non-uniformément hyperbolique.

30 novembre-4 décembre 1998 : mission en Inde (Delhi et Bengalore). Une conférence au TATA Institute de Bengalore.

7-12 décembre 1998 : mission à l'Université de Florence.

17 décembre 1998 : une conférence à l'Université de Genève.