Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe Yoccoz, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours se déroulait cette année à la Scuola Normale Superiore de Pise, sous un format un peu différent des années précédentes. Après une introduction générale à la théorie des systèmes dynamiques, ses résultats principaux et ses concepts fondamentaux, le cours s'est poursuivi par la présentation d'une classe importante de systèmes dynamiques, les échanges d'intervalles, dont l'étude sera poursuivie dans le cours de 2004-2005.

Un système dynamique, c'est un espace de phases, l'espace des états possibles du système considéré, muni d'une équation d'évolution qui décrit la variation temporelle de l'état du système. Cette équation d'évolution prend la forme d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles, lorsque le temps est une variable continue, mais se présente aussi comme une application de l'espace de phases dans lui-même, lorsqu'on préfère traiter le temps comme une variable discrète.

La théorie cherche à comprendre les propriétés qualitatives et statistiques de l'évolution à long terme du système. On distingue deux types de comportements apparaissant dans de très nombreux systèmes, les phénomènes quasi-périodiques et les phénomènes hyperboliques (souvent également appelés chaotiques).

Le prototype de système dynamique quasi-périodique est la rotation rigide sur un cercle. Le prototype de système dynamique hyperbolique fait apparaître également le cercle comme espace de phases, mais la dynamique est donnée par la multiplication de la valeur angulaire par un nombre entier plus grand que un.

Ces prototypes permettent d'introduire et d'illustrer quelques concepts fondamentaux de dynamique topologique : transitivité, minimalité, expansivité, conjugaison et semi-conjugaison topologique.

Un autre prototype très important de système dynamique hyperbolique est le décalage, bilatéral ou unilatéral, sur l'espace a^{Z}, *où* a est un alphabet fini. Les sous-décalages de type fini, les endomorphismes expansifs et les automorphismes hyperboliques des tores de dimension supérieure constituent d'autres exemples fondamentaux.

Quant aux rotations rigides du cercle, elles présentent une dynamique intéressante dès que l'angle de rotation est irrationnel, l'algorithme de fraction continue permettant alors d'analyser l'organisation des orbites sur le cercle. Poincaré a montré comment étendre la notion de nombre de rotation à tout homéomorphisme du cercle préservant l'orientation. L'homéomorphisme n'a pas d'orbite périodique si et seulement si le nombre de rotation est irrationnel, l'homéomorphisme étant alors semi-conjugué à la rotation correspondante. Denjoy a montré que cette semi-conjugaison est même une conjugaison pour un difféomorphisme de classe C^2 ; il a aussi construit des difféomorphismes sans orbite périodique ni orbite dense qui sont C^r pour tout $r < 2$.

Un des outils fondamentaux, sans doute le plus important, dans l'étude d'un système dynamique, est l'examen des mesures de probabilité invariantes sous l'évolution temporelle. Le théorème de récurrence de Poincaré est un exemple élémentaire mais fondamental de cette approche. Les mesures invariantes ergodiques sont les points extrémaux de l'ensemble compact convexe formé par les mesures invariantes. Le théorème ergodique de Birkhoff est le résultat fondamental à la source de nombreux développements ultérieurs.

Étant donné une mesure invariante par un système dynamique, on peut introduire l'espace des fonctions de carré intégrable et la transformation unitaire associée à la dynamique, et on dispose alors de toutes les ressources de la théorie spectrale dans ce cadre. La notion de mélange faible et celle de mélange apparaissent naturellement comme renforcements de l'ergodicité. Le mélange faible possède en particulier de nombreuses caractérisations équivalentes. On a illustré ces diverses notions sur les exemples précédemment introduits, en expliquant notamment comment d'après Katok-Stepin on peut obtenir des transformations faiblement mélangeantes en considérant l'application de retour d'une rotation du cercle sur un segment du cercle.

L'entropie topologique est une des principales quantités qu'on peut associer à un système dynamique. Pour les sous-décalages de type fini, ou les endomorphismes des tores, on en possède des formules explicites.

L'entropie métrique est un invariant plus subtil, associé à un système dynamique et à une mesure de probabilité invariante par ce système. Le principe variationnel relie les deux types d'entropie.

Le théorème d'Oseledets, ou théorème ergodique multiplicatif, est une extension cruciale du théorème ergodique de Birkhoff. Les exposants de Lyapounov qu'il fait apparaître jouent le plus souvent un rôle fondamental dans le calcul de l'entropie métrique. On a enfin évoqué rapidement la théorie de Pesin, qui permet, lorsque le difféomorphisme est lisse, la mesure régulière, et les exposants non nuls, d'obtenir des conclusions remarquables sur les propriétés ergodiques du système.

On s'est ensuite intéressé plus spécifiquement à une classe de systèmes dynamiques qui englobe celle des rotations rigides sur le cercle, les échanges d'intervalles. Leur suspension conduit à des flots quasi périodiques sur des surfaces (en général de genre ≥ 2) munies d'une structure complexe et d'une forme holomorphe, qu'on appelle surfaces de translation. De telles surfaces apparaissent aussi naturellement quand on considère la trajectoire d'un point matériel sur une table de billard polygonale dont les angles sont commensurables avec π.

La condition, introduite par Keane, qu'aucune orbite ne passe plus d'une fois par une discontinuité est la généralisation appropriée de l'irrationnalité de l'angle de rotation. Elle garantit la minimalité, mais pas (comme c'est le cas sur le cercle) l'unique ergodicité. Le cours s'est achevé par la démonstration, suivant Mazur, Veech et Kerckhoff, de la conjecture de Keane : presque tout échange d'intervalles est uniquement ergodique. La preuve repose sur un algorithme de fraction continue introduit par Rauzy et Veech, qui permet de traduire de façon très géométrique l'unique ergodicité, et de s'appuyer sur des arguments de marches aléatoires sur des graphes finis.

Publications

Stefano Marmi, Pierre Moussa, Jean-Christophe Yoccoz, On the cohomological equation for interval exchange maps, CRAS, Ser I 336 (2003), 941-948.

Missions, Invitations, Conférences

30/06-4/07/03 : Séminaire durant le colloque organisé à Luminy sur les billards rationnels et les surfaces de translation.

14/07-18/07/03 : Codirecteur d'un colloque « Systèmes dynamiques » à Oberwolfach (Allemagne).

4/08-8/08/03 : Mini cours de 3 conférences durant le Congrès mathématique d'Antofagasta (Chili).

11/08-15/08/03 : 1 conférence durant la réunion de Systèmes dynamiques à Sao Pedro de Atacama (Chili).

25/08-29/08/03 : 1 conférence durant le congrès en l'honneur de Cesar Camacho à l'IMPA, Rio de Janeiro (Brésil).

15/10/03 : 1 conférence à l'Université de Lille.

23/10/03 : 1 conférence durant la réunion organisée en l'honneur d'Alain Chenciner.

3/11-7/11/03 : 1 conférence durant le colloque « Partial hyperbolicity and robust transitivity » à Buzios (Brésil).

20/11/03 : 1 conférence à l'Université de Montpellier.

7/01-1/04/04 : Cours à la Scuola Normale de Pise (Italie). Collaboration avec S. Marmi.

3/05/04 : Conférence de vulgarisation à l'Institut français de Budapest (Hongrie).

14/05/04 : Conférence à l'Université de Toulouse.

21/06-25/06/04 : Mini cours de 4 conférences durant le second Congrès de l'Union Latino-américaine de mathématiques à Cancun (Mexique).