Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe YOCCOZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. Le cours portait cette année sur des résultats obtenus en collaboration avec Carlos Gustavo MOREIRA

On appelle ensemble de Cantor régulier un ensemble de Cantor qui est maximal invariant pour une application dilatante unidimensionnelle. Plus précisément, considérons un sous-décalage transitif Σ sur un alphabet $\mathscr{A}$, déterminé par des règles de transition $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}^2$. Considérons une application g de classe $C^r, r > 1$, dont le domaine est l'union $\bigcup_{\mathscr{B}} I(a_0, a_1)$ d'intervalles disjoints $I(a_0, a_1) \subset I(a_0) := [0,1] \times \{a_0\}$, et telle que la restriction de g à chaque $I(a_0, a_1)$ est un difféomorphisme dilatant sur $I(a_1)$. On dit alors que g est dilatante de type Σ, et que l'ensemble de Cantor K maximal invariant par g est régulier de type Σ.

On rencontre naturellement de tels ensembles lorsqu'on s'intéresse aux fers à cheval invariants par un difféomorphisme d'une surface. Rappelons qu'un ensemble compact Λ invariant par un difféomorphisme lisse F d'une surface M est appelé fer à cheval s'il est hyperbolique, transitif, localement maximal, non trivial (i.e., non réduit à une orbite périodique) et de type selle (i.e., ce n'est un attracteur ni pour F, ni pour F^{-1}). On peut alors définir les ensembles stables $W^s(\Lambda)$ et instable $W^u(\Lambda)$, qui sont localement homéomorphes au produit d'un intervalle et d'un ensemble de Cantor. L'intersection de $W^s(\Lambda)$ avec une courbe transversale aux courbes stables est un ensemble de Cantor régulier. On prendra cependant garde que même si F est de classe C^∞, cet ensemble de Cantor régulier ne peut en général pas être défini par une application dilatante g de classe C^∞ ; la raison en est que les applications d'holonomie du feuilletage partiel $W^s(\Lambda)$ ne sont en général pas de classe C^∞, mais seulement de classe C^r pour un réel $r > 1$.

L'étude des bifurcations homoclines a suscité dans ces dernières années de nombreux travaux. On se place ici dans un cadre un peu plus général. Soit F_0 un difféomorphisme lisse d'une surface M, et soient Λ, Λ' deux fers à cheval de F_0 (on n'exclut pas $\Lambda = \Lambda$'; c'est même le cas le plus important). On suppose qu'il existe un point périodique $p \in \Lambda$, un point périodique $p' \in \Lambda'$ tels que les courbes $W^s(p)$, $W^u(p')$ aient en un point $q \in M$ une tangence quadratique qui est de surcroît un point d'intersection isolé de $W^s(\Lambda)$ et $W^u(\Lambda')$. Lorsque F est proche de F_0, on peut par continuation hyperbolique suivre Λ, Λ', p, p', $W^s(\Lambda)$, $W^u(\Lambda')$, $W^s(p)$, $W^u(p')$; la condition de tangence entre $W^s(p)$ et $W^u(p')$ au voisinage de q définit dans un voisinage $\mathscr{U}$ de F_0 dans Diff$^\infty$ (M) une hypersurface lisse $\mathscr{U}_0$ qui sépare $\mathscr{U}$ en deux régions $\mathscr{U}^+$ et $\mathscr{U}^-$, $\mathscr{U}^-$ étant celle où $W^s(p)$ et $W^u(p')$ ne se rencontrent pas près de q. On dira qu'un difféomorphisme $F \in \mathscr{U}^+$ appartient au lieu de tangence $\mathscr{T}$ s'il existe des points $x \in \Lambda$, $x' \in \Lambda'$ proches de p, p' respectivement tels que les courbes $W^s(x)$, $W^u(x')$ présentent au voisinage de q une tangence quadratique.

L'importance du lieu de tangence $\mathscr{T}$ tient à ce qu'un point de tangence entre $W^s(\Lambda)$ et $W^u(\Lambda')$ ne saurait appartenir à un ensemble compact invariant hyperbolique. Il est donc important de comprendre dans quelle mesure $\mathscr{T}$ est gros. Comme $\mathscr{T}$ se présente naturellement comme l'union d'hypersurfaces (correspondant à des valeurs fixées de x, x') non disjointes entre elles, mais disjointes de $\mathscr{U}_0$, il est naturel de mesurer la taille de $\mathscr{T}$ en examinant son intersection avec des familles à un paramètre (F_t) transverses en $t = 0$ à $\mathscr{U}_0$.

On appellera dimension stable de Λ, et on notera $d_s(\Lambda)$, la dimension de Hausdorff de l'intersection de $W^s(\Lambda)$ avec n'importe quelle transversale. On définit de même $d_u(\Lambda)$, $d_s(\Lambda')$, $d_u(\Lambda')$. Suivant Palis et Takens, il est facile de voir que, lorsque les dimensions vérifient $d_s(\Lambda) + d_u(\Lambda') < 1$, le lieu de tangence $\mathscr{T}$ rencontre une transversale à $\mathscr{U}_0$ suivant un ensemble de dimension < 1.

A l'opposé, en liaison avec la notion d'épaisseur qui ne sera pas rappelée ici, Newhouse a construit des exemples où le lieu de tangence $\mathscr{T}$ est le plus grand possible, c'est-à-dire égale à $\mathscr{U}^+$.

Étant donnée une famille (F_t) transverse en $t = 0$ à $\mathscr{U}_0$, et telle que $F_t \in \mathscr{U}^+$ pour $t > 0$, appelons densité inférieure du lieu de tangence la quantité

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf \varepsilon^{-1} \operatorname{Leb} (t \in (0, \varepsilon],\ F_t \in \mathscr{T}).$$

L'intérieur de $\mathscr{T}$ dans Diff$^\infty(M)$ est appelé lieu de tangence stable. Lorsqu'on remplace dans la formule précédente $\mathscr{T}$ par son intérieur, on obtient la densité inférieure du lieu de tangence stable.

Notre résultat principal comble le trou laissé ouvert par les résultats de Palis, Takens et Newhouse. Nous supposons que les dimensions vérifient $d_s(\Lambda) + d_u(\Lambda') > 1$. Nous montrons alors qu'il existe une partie ouverte et dense $\mathscr{U}_0^*$ de $\mathscr{U}_0$ telle que, si la famille (F_t) considérée est transverse à $\mathscr{U}_0$ en un point de $\mathscr{U}_0^*$, alors :

— elle rencontre le lieu de tangence stable suivant une densité inférieure strictement positive,

— elle rencontre l'union du lieu de tangence stable et du complémentaire du lieu de tangence suivant une densité totale.

Nous avions voici quelques années démontré un résultat analogue, publié en 2001 aux Annals of Mathematics, portant directement sur les intersections d'ensembles de Cantor réguliers définis par des applications dilatantes.

2. Nous présentons maintenant les grandes lignes de la preuve de notre résultat principal

2.1. Étant donné un ensemble de Cantor régulier K défini par une application dilatante g de type Σ, on lui associe une famille $(K^{\underline{\theta}})$ d'ensembles de Cantor réguliers qu'on appelle **géométries infinitésimales** de K, paramétrée par le sous-décalage unilatéral Σ^- indexé par les entiers négatifs ou nuls. Chaque $K^{\underline{\theta}}$ est l'image de l'intersection $K \cap I(\theta_0)$ par un difféomorphisme $k^{\underline{\theta}}$ de $I(\theta_0)$: la famille des $k^{\underline{\theta}}$ réalise une linéarisation fibrée de la dynamique, c'est-à-dire que pour tout $\underline{\theta} \in \Sigma^-$, l'application

$$k^{\sigma^{-1}(\underline{\theta})} \circ (g_{/I(\theta_{-1},\, \theta_0)})^{-1} \circ (k^{\underline{\theta}})^{-1}$$

est affine. Lorsque $\underline{\theta}$ est périodique pour σ^{-1}, $\underline{\theta}$ définit aussi un point périodique pour g et $k^{\underline{\theta}}$ n'est rien d'autre que l'application linéarisant la dynamique au voisinage de ce point pérodique répulsif.

Notons $\mathscr{A}$ l'espace des couples $(\underline{\theta}, A)$ où $\underline{\theta} \in \Sigma^-$ et A est un plongement affine de $I(\theta_0)$ dans $\mathbf{R}$; à une telle paire, on associe l'ensemble de Cantor $A(K^{\underline{\theta}}) \subset \mathbf{R}$. *Si* $\underline{a} = (a_0, a_1, ..., a_n)$ est un mot de Σ tel que $a_0 = \theta_0$, on pose

$$T_{\underline{a}}(\underline{\theta}, A) = (\underline{\theta}a_1, ..., a_n, A \circ f_{\underline{a}}),$$

où $f_{\underline{a}}$ est la branche de g^{-n} déterminée par $\underline{a}$. On appelle **opérateurs de renormalisation** les opérateurs $T_{\underline{a}}$.

2.2. Soient maintenant deux ensembles de Cantor réguliers K, K' respectivement déterminés par des applications dilatantes g, g' de types Σ, Σ'.

Considérons une **configuration affine** de K, K', c'est-à-dire une paire $((\underline{\theta}, A), (\underline{\theta}', A'))$ de $\mathscr{A} \times \mathscr{A}'$. On dira qu'elle est

— **liée** si $A(I(\theta_0))$ rencontre $A'(I(\theta'_0))$;

— **d'intersection** si $A(K^{\underline{\theta}})$ rencontre $A'(K'^{\underline{\theta}'})$;

— **d'intersection stable** si elle reste d'intersection quand on perturbe g, g' ainsi que les plongements A, A' (les plongements perturbés n'étant pas nécessairement affines).

Il est élémentaire de voir qu'une configuration affine est d'intersection si et seulement si on peut trouver une suite d'opérateurs de renormalisation sous laquelle cette configuration reste liée.

Il n'est pas difficile de montrer qu'on peut de façon similaire garantir qu'une configuration affine soit une configuration d'intersection stable. Commençons par introduire l'espace $\mathscr{C}$ quotient de $\mathscr{A} \times \mathscr{A}'$ par l'action diagonale du groupe affine. On dira qu'une partie compacte non vide $\mathscr{L}$ de $\mathscr{C}$ est récurrente si pour tout $u \in \mathscr{L}$ on peut trouver des opérateurs de renormalisation non triviaux $T_{\underline{a}}$, $T'_{\underline{a}'}$, tels que $T_{\underline{a}} T'_{\underline{a}'}(u)$ appartienne à l'intérieur de $\mathscr{L}$. Alors toute configuration affine dont l'image appartient à une partie compacte récurrente de $\mathscr{C}$ est une configuration d'intersection stable.

2.3. Revenant au cadre du résultat principal, quand on choisit des partitions de Markov pour les fers à cheval Λ, Λ', la structure transverse des feuilletages partiels $W^s(\Lambda)$, $W^u(\Lambda')$ définit des ensembles de Cantor réguliers K, K' associés à des applications dilatantes g, g' de types Σ, Σ'.

On peut montrer que notre résultat principal est conséquence de la propriété suivante :

THÉORÈME : *Sous l'hypothèse* $d_s(\Lambda) + d_u(\Lambda') > 1$, *il existe une partie ouverte et dense* $\mathscr{U}^* \subset \mathscr{U}$ *telle que, si* $F \in \mathscr{U}^*$, *l'espace* $\mathscr{C}$ *des configurations affines relatives de* K, K' *contient une partie compacte récurrente.*

Comme pour notre résultat principal, l'énoncé précédent est aussi valable dans le cadre conservatif où on ne considère que des difféomorphismes de M préservant une forme d'aire fixée.

2.4. La première étape dans la démonstration du théorème précédent est une réduction à certains cas particuliers, qui s'effectue en remplaçant les fers à cheval considérés par des fers à cheval plus petits, mais dont les dimensions de Hausdorff sont à peine moindres.

C'est ainsi qu'on se ramène au cas où Λ, Λ' sont disjoints.

Dans le cas général (dissipatif), on se ramène de plus au cas où la restriction de F à chacun des fers à cheval est soit contractante, soit dilatante.

Dans le cas conservatif, on se ramène de plus au cas où l'invariant de Birkhoff sur chaque fer à cheval est partout strictement positif ou partout strictement négatif. Cet invariant de Birkhoff, qui est formellement le même que celui rencontré dans l'étude de points fixes elliptiques, est une fonction continue sur le fer à cheval définie à un cobord additif près.

2.5. Il s'agit de construire, pour une perturbation suffisamment petite du difféomorphisme initial, une partie compact récurrente de $\mathscr{C}$.

Une première étape est de construire une partie $\tilde{\mathscr{L}}$ du quotient $\mathscr{S}$ de $\mathscr{C}$ par le groupe des translations, qui possède de très bonnes propriétés de récurrence par rapport aux opérateurs de renormalisation associés au difféomorphisme qu'on a éventuellement perturbé une première fois.

On souhaite que la partie $\tilde{\mathscr{L}}$ soit contenue dans un petit voisinage d'une partie $\tilde{\mathscr{L}}_0$ constituée de « bonnes échelles » pour la projection

$\pi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s} : K \times K' \to \mathbf{R}$,

$\pi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}(x, x') = s\, k^{\underline{\theta}}(x) + k'^{\underline{\theta}'}(x')$.

Rappelons à ce propos un théorème de Marstrand : pour chaque $\underline{\theta} \in \Sigma^-$, $\underline{\theta}' \in \Sigma'^-$ et pour presque tout $s \in \mathbf{R}^*$, l'image par $\pi_{\underline{\theta}, \underline{\theta}', s}$ du produit des mesures de Hausdorff naturelles sur K et K' est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. En fait, la densité de cette mesure est même de carré intégrable et on peut contrôler la mesure de l'ensemble des s où la norme L^2 de la densité est grande. La partie $\tilde{\mathscr{L}}_0$ sus-mentionnée est constituée de triplets $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s) \in \mathscr{S}$ tels que cette norme ne soit pas trop grande, ainsi que certaines normes analogues correspondant à des morceaux appropriés de K, K'.

Pour obtenir $\tilde{\mathscr{L}}$ à partir de $\tilde{\mathscr{L}}_0$, on s'appuie sur une propriété de récurrence d'échelles que nous n'énoncerons pas ici, mais qui est très semblable à celle qui apparaissait dans notre article aux Annals of Mathematics. La démonstration de cette propriété de récurrence d'échelles est cependant plus délicate que dans cet article, car la propriété de non-linéarité qui intervenait à un point clé de la preuve n'a plus de sens : elle supposait que les applications dilatantes g, g' soient au moins de classe C^2, ce qui n'est plus ici en général le cas, comme nous l'avons observé auparavant. Il faut donc remplacer cette propriété de non-linéarité par des estimations fines sur la géométrie des fers à cheval ; dans le cas conservatif, c'est ici qu'intervient la propriété que l'invariation de Birkhoff a un signe constant.

2.6. La fin de la preuve est basée sur un argument probabiliste. On découpe Λ en petits morceaux disjoints. On introduit une famille $F_{\underline{\omega}}$ de perturbations de F de grande dimension, dont l'effet est de composer F sur chacun des morceaux de Λ par de très petites translations indépendantes. Pour chaque $F_{\underline{\omega}}$, on construit une partie $\mathscr{L}_{\underline{\omega}}$ de $\mathscr{C}$ se projetant sur $\tilde{\mathscr{L}}$ en définissant, pour chaque $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ $\tilde{\mathscr{L}}$, la fibre $L_{\underline{\omega}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$. On montrera alors qu'avec probabilité positive sur $\underline{\omega}$, la partie $\mathscr{L}_{\underline{\omega}}$ est récurrente pour $F_{\underline{\omega}}$.

La fibre $L_{\underline{\omega}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ est essentiellement formée des $t \in \mathbf{R}$ tels que les ensembles $(sK^{\underline{\theta}} + t)$ et $K'^{\underline{\theta}'}$ aient une assez grosse intersection. Cela veut dire qu'un grand nombre d'opérateurs de renormalisation envoient le point $(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s, t)$ de $\mathscr{C}$ sur un point se projetant sur $\tilde{\mathscr{L}}$ et dont la dernière coordonnée est bornée. L'effet obtenu en faisant varier certains paramètres de perturbation est précisément de changer cette dernière coordonnée. D'autre part, il résulte de la démonstration du théorème de Marstrand que la mesure de Lebesgue de la fibre $L_{\underline{\omega}}(\underline{\theta}, \underline{\theta}', s)$ est toujours minorée. Ceci permet de montrer que, pour chaque $u \in \mathscr{L}_{\underline{\omega}}$, la probabilité (en $\underline{\omega}$) pour qu'aucun opérateur de renormalisation n'envoie u dans l'intérieur de $\mathscr{L}_{\underline{\omega}}$ est extrêmement faible. On conclut en choisissant une partie discrète suffisamment dense dans $\mathscr{L}_{\underline{\omega}}$: avec probabilité positive, chaque point de cette partie est envoyé dans l'intérieur de $\mathscr{L}_{\underline{\omega}}$ par un opérateur de renormalisation approprié.

Ceci est une simplification grossière d'une preuve qui offre malheureusement de nombreuses difficultés techniques.

Publications

— Analytic linearization of circle diffeomorphisms, in Dynamical Systems and Small Divisors, Cetraro, Italy 1998, S. Marmi, J.-C. Yoccoz (eds) Springer LNM 1784 (2002), p. 125-173.

— avec S. Marmi, Some open problems related to small divisors, ibidem, p. 175-191.

Missions, Invitations, Conférences

2/07/02 : Conférence lors du colloque à la mémoire de J.-L. Lions au Collège de France.

9/08-16/08/02 : Conférencier invité à une réunion internationale à Kyoto (Japon).

17/08-18/08/02 : Membre de la délégation française à l'Assemblée générale de l'Union internationale des mathématiciens à Shanghai (Chine).

19/08-25/08/02 : Participation à l'International Congress of Mathematics de Beijing (Chine).

23/09-27/09/02 : Séminaire durant le colloque organisé à la Bussière à l'occasion des 60 ans de H. Rosenberg.

17/10-19/10/02 : Conférence durant le colloque organisé à Princeton (USA) à l'occasion des 60 ans de J. Mather.

4/11-8/11/02 : Organisation du colloque à la mémoire de M. R. Herman, à l'Institut Henri Poincaré.

25/11-21/12/02 : Mission à l'Instituto de Matematica Pura e Aplicada (Rio de Janeiro, Brésil). Collaborations avec J. Palis et C.G. Moreira.

4/01-12/01/03 : Conférence lors du colloque organisé à Cuernavaca (Mexique) à l'occasion des 60 ans de A. Verjovski.

5/02/03 : Conférence « grand public » à l'Université Joseph Fourier (Grenoble).

9/03-14/03/03 : 2 conférences lors d'une école « théorie des nombres et physiques » aux Houches.

30/04/03 : Conférence à l'Université de Limoges.

12/05-18/05/03 : Mission à la Scuola Normale Superiore de Pisa (Italie). Collaboration avec S. Marmi et P. Moussa.

7/06-14/06/03 : Participation à un Comité d'évaluation de l'IMPA (Rio de Janeiro, Brésil).