

Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques (8)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

11 mars 2015

L'hyperbolicité uniforme n'est pas presque sûre

Considérons la famille $P_c(x) := x^2 + c$, $c \in [-2, 1/4]$, des polynômes quadratiques réels.

Pour $c > 1/4$, toutes les orbites s'échappent à l'infini.

Pour $c < -2$, le point critique s'échappe à l'infini et P_c est **uniformément hyperbolique**, avec $F(P_c) = \emptyset$.

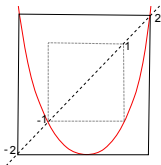
Théorème: (Jakobson, 1981) Il existe un ensemble de paramètres $E \subset [-2, 1/4]$, de **densité totale** en -2 , tel que, pour tout $c \in E$, P_c possède une mesure de probabilité invariante ergodique qui est **absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue** et a un **exposant de Lyapunov strictement positif**.

Pour $c \in E$, le support de la mesure invariante du théorème est l'intervalle $[P_c(0), P_c^2(0)]$, qui contient le point critique 0 de P_c .

L'application P_c n'est donc **pas uniformément hyperbolique**.

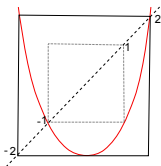
On construit $E \subset [-2, c_0]$, avec c_0 proche de -2 .

On construit $E \subset [-2, c_0]$, avec c_0 proche de -2 .



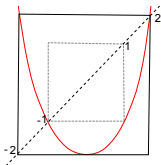
P_{-2} est un polynôme de Chebyshev: $P_{-2}(2 \cos \theta) = 2 \cos 2\theta$.

On construit $E \subset [-2, c_0]$, avec c_0 proche de -2 .



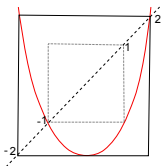
P_{-2} est un polynôme de Chebyshev: $P_{-2}(2 \cos \theta) = 2 \cos 2\theta$. L'orbite du point critique pour P_{-2} est $0 \rightarrow -2 \rightarrow 2$, qui est un point fixe **répulsif**.

On construit $E \subset [-2, c_0]$, avec c_0 proche de -2 .

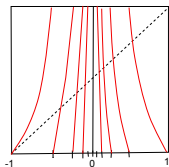


P_{-2} est un polynôme de Chebyshev: $P_{-2}(2 \cos \theta) = 2 \cos 2\theta$. L'orbite du point critique pour P_{-2} est $0 \rightarrow -2 \rightarrow 2$, qui est un point fixe **répulsif**. L'autre point fixe (également répulsif) est -1 .

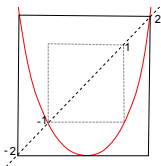
On construit $E \subset [-2, c_0]$, avec c_0 proche de -2 .



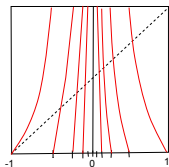
P_{-2} est un polynôme de Chebyshev: $P_{-2}(2 \cos \theta) = 2 \cos 2\theta$. L'orbite du point critique pour P_{-2} est $0 \rightarrow -2 \rightarrow 2$, qui est un point fixe **répulsif**. L'autre point fixe (également répulsif) est -1 . L'application de retour de P_{-2} dans $(-1, 1)$



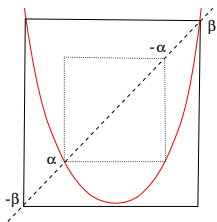
On construit $E \subset [-2, c_0]$, avec c_0 proche de -2 .

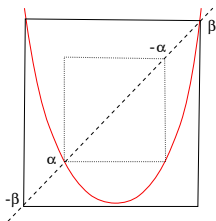


P_{-2} est un polynôme de Chebyshev: $P_{-2}(2 \cos \theta) = 2 \cos 2\theta$. L'orbite du point critique pour P_{-2} est $0 \rightarrow -2 \rightarrow 2$, qui est un point fixe **répulsif**. L'autre point fixe (également répulsif) est -1 . L'application de retour de P_{-2} dans $(-1, 1)$

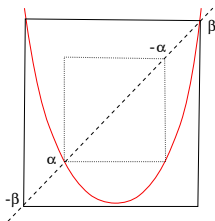


est constituée d'une infinité de branches **dilatantes surjectives**, deux pour chaque temps de retour ≥ 2 .

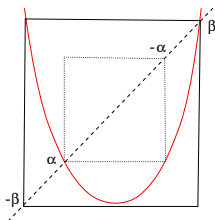




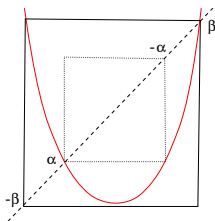
Pour $c \in (-2, c_0)$, P_c a deux points fixes répulsifs β (proche de 2) et α (proche de -1).



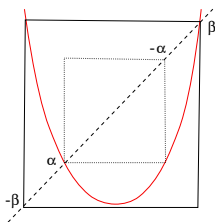
Pour $c \in (-2, c_0)$, P_c a deux points fixes répulsifs β (proche de 2) et α (proche de -1). Comme $P_c^2(0)$ est proche de β , le **temps de retour M** dans $J := (-\alpha, \alpha)$ est grand.



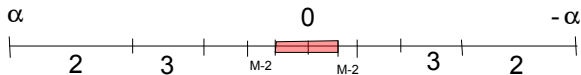
Pour $c \in (-2, c_0)$, P_c a deux points fixes répulsifs β (proche de 2) et α (proche de -1). Comme $P_c^2(0)$ est proche de β , le **temps de retour M** dans $J := (-\alpha, \alpha)$ est grand. Les branches de l'application de retour dans J avec temps de retour $< M - 1$ sont encore **dilatantes et surjectives**.



Pour $c \in (-2, c_0)$, P_c a deux points fixes répulsifs β (proche de 2) et α (proche de -1). Comme $P_c^2(0)$ est proche de β , le **temps de retour M** dans $J := (-\alpha, \alpha)$ est grand. Les branches de l'application de retour dans J avec temps de retour $< M - 1$ sont encore **dilatantes et surjectives**. Le complément (dans J) de l'union des domaines de ces branches est un intervalle centré en 0 **de longueur $\approx 2^{-M}$** .



Pour $c \in (-2, c_0)$, P_c a deux points fixes répulsifs β (proche de 2) et α (proche de -1). Comme $P_c^2(0)$ est proche de β , le **temps de retour M** dans $J := (-\alpha, \alpha)$ est grand. Les branches de l'application de retour dans J avec temps de retour $< M - 1$ sont encore **dilatantes et surjectives**. Le complément (dans J) de l'union des domaines de ces branches est un intervalle centré en 0 **de longueur $\approx 2^{-M}$** .



Les paramètres $c \in E$ ont la propriété cruciale suivante:

Les paramètres $c \in E$ ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable** $(J_\alpha) \subset J$ d'intervalles ouverts disjoints et des entiers n_α tels que:

Les paramètres $c \in E$ ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable** $(J_\alpha) \subset J$ d'intervalles ouverts disjoints et des entiers n_α tels que:

1. la restriction à J_α de $P_c^{n_\alpha}$ soit **dilatante et surjective** sur J , avec une distortion **uniformément bornée**;

Les paramètres $c \in E$ ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable** $(J_\alpha) \subset J$ d'intervalles ouverts disjoints et des entiers n_α tels que:

1. la restriction à J_α de $P_c^{n_\alpha}$ soit **dilatante et surjective** sur J , avec une distortion **uniformément bornée**;
2. pour tout $n > 0$, on ait

$$\text{Leb}(J - \bigcup_{n_\alpha \leq n} J_\alpha) \leq C2^{-\frac{n}{2}}.$$

Les paramètres $c \in E$ ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable** $(J_\alpha) \subset J$ d'intervalles ouverts disjoints et des entiers n_α tels que:

1. la restriction à J_α de $P_c^{n_\alpha}$ soit **dilatante et surjective** sur J , avec une distortion **uniformément bornée**;
2. pour tout $n > 0$, on ait

$$\text{Leb}(J - \bigcup_{n_\alpha \leq n} J_\alpha) \leq C 2^{-\frac{n}{2}}.$$

La **distortion** d'un difféomorphisme F défini sur un intervalle I est la quantité $NF := |I| \max_I |D \log |DF||$.

Les paramètres $c \in E$ ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable** $(J_\alpha) \subset J$ d'intervalles ouverts disjoints et des entiers n_α tels que:

1. la restriction à J_α de $P_c^{n_\alpha}$ soit **dilatante et surjective** sur J , avec une distortion **uniformément bornée**;
2. pour tout $n > 0$, on ait

$$\text{Leb}(J - \bigcup_{n_\alpha \leq n} J_\alpha) \leq C 2^{-\frac{n}{2}}.$$

La **distortion** d'un difféomorphisme F défini sur un intervalle I est la quantité $NF := |I| \max_I |D \log |DF||$. Elle est nulle si et seulement si F est **affine**.

Les paramètres $c \in E$ ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable** $(J_\alpha) \subset J$ d'intervalles ouverts disjoints et des entiers n_α tels que:

1. la restriction à J_α de $P_c^{n_\alpha}$ soit **dilatante et surjective** sur J , avec une distortion **uniformément bornée**;
2. pour tout $n > 0$, on ait

$$\text{Leb}(J - \bigcup_{n_\alpha \leq n} J_\alpha) \leq C 2^{-\frac{n}{2}}.$$

La **distortion** d'un difféomorphisme F défini sur un intervalle I est la quantité $NF := |I| \max_I |D \log |DF||$. Elle est nulle si et seulement si F est **affine**.

La deuxième propriété implique que $\bigcup_\alpha J_\alpha$ est de **mesure totale** dans J .

Les paramètres $c \in E$ ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable** $(J_\alpha) \subset J$ d'intervalles ouverts disjoints et des entiers n_α tels que:

1. la restriction à J_α de $P_c^{n_\alpha}$ soit **dilatante et surjective** sur J , avec une distortion **uniformément bornée**;
2. pour tout $n > 0$, on ait

$$\text{Leb}(J - \bigcup_{n_\alpha \leq n} J_\alpha) \leq C2^{-\frac{n}{2}}.$$

La **distortion** d'un difféomorphisme F défini sur un intervalle I est la quantité $NF := |I| \max_I |D \log |DF||$. Elle est nulle si et seulement si F est **affine**.

La deuxième propriété implique que $\bigcup_\alpha J_\alpha$ est de **mesure totale** dans J . Notons $f : \bigcup_\alpha J_\alpha \rightarrow J$ l'application qui coïncide avec $P_c^{n_\alpha}$ sur J_α .

Les paramètres $c \in E$ ont la propriété cruciale suivante: il existe une famille **dénombrable** $(J_\alpha) \subset J$ d'intervalles ouverts disjoints et des entiers n_α tels que:

1. la restriction à J_α de $P_c^{n_\alpha}$ soit **dilatante et surjective** sur J , avec une distortion **uniformément bornée**;
2. pour tout $n > 0$, on ait

$$\text{Leb}(J - \bigcup_{n_\alpha \leq n} J_\alpha) \leq C 2^{-\frac{n}{2}}.$$

La **distortion** d'un difféomorphisme F défini sur un intervalle I est la quantité $NF := |I| \max_I |D \log |DF||$. Elle est nulle si et seulement si F est **affine**.

La deuxième propriété implique que $\bigcup_\alpha J_\alpha$ est de **mesure totale** dans J . Notons $f : \bigcup_\alpha J_\alpha \rightarrow J$ l'application qui coïncide avec $P_c^{n_\alpha}$ sur J_α . Cette application est **uniformément dilatante, de distortion bornée**, d'après la première propriété.

Le formalisme thermodynamique (opérateurs de transfert)

Le formalisme thermodynamique (opérateurs de transfert)
permet de construire une **mesure de probabilité** μ supportée
par J

Le formalisme thermodynamique (opérateurs de transfert) permet de construire une mesure de probabilité μ supportée par J qui est f -invariante, ergodique et possède une densité analytique par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le formalisme thermodynamique (opérateurs de transfert) permet de construire une mesure de probabilité μ supportée par J qui est f -invariante, ergodique et possède une densité analytique par rapport à la mesure de Lebesgue. On construit ensuite à partir de μ une mesure finie ν qui est P_c -invariante et ergodique par la formule

$$\int \varphi d\nu := \sum_{\alpha} \int_{J_{\alpha}} \sum_{0 \leq j < n_{\alpha}} \varphi(P_c^j(x)) d\mu(x).$$

Le formalisme thermodynamique (opérateurs de transfert) permet de construire une **mesure de probabilité** μ supportée par J qui est **f -invariante**, **ergodique** et **possède une densité analytique par rapport à la mesure de Lebesgue**. On construit ensuite à partir de μ une mesure **finie** ν qui est **P_c -invariante et ergodique** par la formule

$$\int \varphi d\nu := \sum_{\alpha} \int_{J_{\alpha}} \sum_{0 \leq j < n_{\alpha}} \varphi(P_c^j(x)) d\mu(x).$$

D'après la deuxième propriété, les temps associés à l'itération de P_c et f sont **du même ordre pour presque toute orbite**.

Le formalisme thermodynamique (opérateurs de transfert) permet de construire une mesure de probabilité μ supportée par J qui est f -invariante, ergodique et possède une densité analytique par rapport à la mesure de Lebesgue. On construit ensuite à partir de μ une mesure finie ν qui est P_c -invariante et ergodique par la formule

$$\int \varphi d\nu := \sum_{\alpha} \int_{J_{\alpha}} \sum_{0 \leq j < n_{\alpha}} \varphi(P_c^j(x)) d\mu(x).$$

D'après la deuxième propriété, les temps associés à l'itération de P_c et f sont du même ordre pour presque toute orbite. Comme f est uniformément dilatante, l'exposant de Lyapunov de ν pour P_c est strictement positif.

Remarque: La densité de ν par rapport à la mesure de Lebesgue est L^1 mais pas L^2 .

Remarque: La densité de ν par rapport à la mesure de Lebesgue est L^1 mais pas L^2 .

Remarque: L'application f n'est en général **pas** l'application de premier retour de P_c dans J .

Remarque: La densité de ν par rapport à la mesure de Lebesgue est L^1 mais pas L^2 .

Remarque: L'application f n'est en général **pas** l'application de premier retour de P_c dans J .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble E de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

Remarque: La densité de ν par rapport à la mesure de Lebesgue est L^1 mais pas L^2 .

Remarque: L'application f n'est en général **pas** l'application de premier retour de P_c dans J .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble E de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

Remarque: Les paramètres (tels que -2) pour lesquels l'orbite positive du point critique **évite** un voisinage de 0 (paramètres de Misiurewicz) satisfont les propriétés requises, mais ils forment un ensemble **de mesure nulle**.

Remarque: La densité de ν par rapport à la mesure de Lebesgue est L^1 mais pas L^2 .

Remarque: L'application f n'est en général **pas** l'application de premier retour de P_c dans J .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble E de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

Remarque: Les paramètres (tels que -2) pour lesquels l'orbite positive du point critique **évite** un voisinage de 0 (paramètres de Misiurewicz) satisfont les propriétés requises, mais ils forment un ensemble **de mesure nulle**. Les paramètres de E sont choisis de façon que l'orbite positive du point critique ne revienne **pas trop vite ni trop souvent** au voisinage de 0.

Remarque: La densité de ν par rapport à la mesure de Lebesgue est L^1 mais pas L^2 .

Remarque: L'application f n'est en général **pas** l'application de premier retour de P_c dans J .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble E de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

Remarque: Les paramètres (tels que -2) pour lesquels l'orbite positive du point critique **évite** un voisinage de 0 (paramètres de Misiurewicz) satisfont les propriétés requises, mais ils forment un ensemble **de mesure nulle**. Les paramètres de E sont choisis de façon que l'orbite positive du point critique ne revienne **pas trop vite ni trop souvent** au voisinage de 0.

Remarque: Plus récemment, Lyubich a considérablement amélioré le résultat de Jakobson

Remarque: La densité de ν par rapport à la mesure de Lebesgue est L^1 mais pas L^2 .

Remarque: L'application f n'est en général **pas** l'application de premier retour de P_c dans J .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble E de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

Remarque: Les paramètres (tels que -2) pour lesquels l'orbite positive du point critique **évite** un voisinage de 0 (paramètres de Misiurewicz) satisfont les propriétés requises, mais ils forment un ensemble **de mesure nulle**. Les paramètres de E sont choisis de façon que l'orbite positive du point critique ne revienne **pas trop vite ni trop souvent** au voisinage de 0.

Remarque: Plus récemment, Lyubich a considérablement amélioré le résultat de Jakobson en montrant que, **pour presque tout paramètre $c \in [-2, 1/4]$,**

Remarque: La densité de ν par rapport à la mesure de Lebesgue est L^1 mais pas L^2 .

Remarque: L'application f n'est en général **pas** l'application de premier retour de P_c dans J .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble E de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

Remarque: Les paramètres (tels que -2) pour lesquels l'orbite positive du point critique **évite** un voisinage de 0 (paramètres de Misiurewicz) satisfont les propriétés requises, mais ils forment un ensemble **de mesure nulle**. Les paramètres de E sont choisis de façon que l'orbite positive du point critique ne revienne **pas trop vite ni trop souvent** au voisinage de 0.

Remarque: Plus récemment, Lyubich a considérablement amélioré le résultat de Jakobson en montrant que, **pour presque tout paramètre $c \in [-2, 1/4]$** , soit P_c est **uniformément hyperbolique**,

Remarque: La densité de ν par rapport à la mesure de Lebesgue est L^1 mais pas L^2 .

Remarque: L'application f n'est en général **pas** l'application de premier retour de P_c dans J .

Le point crucial de la démonstration est de construire l'ensemble E de façon à satisfaire les deux propriétés ci-dessus.

Remarque: Les paramètres (tels que -2) pour lesquels l'orbite positive du point critique **évite** un voisinage de 0 (paramètres de Misiurewicz) satisfont les propriétés requises, mais ils forment un ensemble **de mesure nulle**. Les paramètres de E sont choisis de façon que l'orbite positive du point critique ne revienne **pas trop vite ni trop souvent** au voisinage de 0.

Remarque: Plus récemment, Lyubich a considérablement amélioré le résultat de Jakobson en montrant que, **pour presque tout paramètre $c \in [-2, 1/4]$** , soit P_c est **uniformément hyperbolique**, soit P_c satisfait aux conclusions du théorème de Jakobson.

Le théorème de M.Rees

Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

Théorème: Pour tout degré $d \geq 2$,

Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

Théorème: Pour tout degré $d \geq 2$, il existe, dans l'espace Rat_d des fonctions rationnelles de degré d ,

Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

Théorème: Pour tout degré $d \geq 2$, il existe, dans l'espace Rat_d des fonctions rationnelles de degré d , un ensemble E de mesure de Lebesgue **positive**

Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

Théorème: Pour tout degré $d \geq 2$, il existe, dans l'espace Rat_d des fonctions rationnelles de degré d , un ensemble E de mesure de Lebesgue **positive** tel que tout $R \in E$ possède une mesure invariante **ergodique, équivalente à la mesure de Lebesgue** sur la sphère de Riemann,

Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

Théorème: Pour tout degré $d \geq 2$, il existe, dans l'espace Rat_d des fonctions rationnelles de degré d , un ensemble E de mesure de Lebesgue **positive** tel que tout $R \in E$ possède une mesure invariante **ergodique, équivalente à la mesure de Lebesgue** sur la sphère de Riemann, dont l'exposant de Lyapunov est **strictement positif**.

Le théorème de M.Rees

M. Rees a obtenu en 1986 une version complexe du théorème de Jakobson.

Théorème: Pour tout degré $d \geq 2$, il existe, dans l'espace Rat_d des fonctions rationnelles de degré d , un ensemble E de mesure de Lebesgue **positive** tel que tout $R \in E$ possède une mesure invariante **ergodique, équivalente à la mesure de Lebesgue** sur la sphère de Riemann, dont l'exposant de Lyapunov est **strictement positif**.

En particulier, pour tout $R \in E$, on a $F(R) = \emptyset$.

Attracteurs de Hénon

En 1976, l'astronome Michel Hénon publie une étude numérique de ce que nous appelons maintenant la famille de Hénon:

$$H_{b,c}(x, y) = (x^2 + c - by, x)$$

Attracteurs de Hénon

En 1976, l'astronome Michel Hénon publie une étude numérique de ce que nous appelons maintenant la famille de Hénon:

$$H_{b,c}(x, y) = (x^2 + c - by, x)$$

Il observe en particulier que pour $b^* := -0.4$, $c^* := -1.3$, de nombreuses orbites convergent vers un "attracteur étrange" qui semble être l'adhérence de la variété instable de l'un des points fixes.

Attracteurs de Hénon

En 1976, l'astronome Michel Hénon publie une étude numérique de ce que nous appelons maintenant la famille de Hénon:

$$H_{b,c}(x, y) = (x^2 + c - by, x)$$

Il observe en particulier que pour $b^* := -0.4$, $c^* := -1.3$, de nombreuses orbites convergent vers un "attracteur étrange" qui semble être l'adhérence de la variété instable de l'un des points fixes.

Pour ces valeurs des paramètres, $H_{b,c}$ possède deux points fixes de type selle.

Attracteurs de Hénon

En 1976, l'astronome Michel Hénon publie une étude numérique de ce que nous appelons maintenant la famille de Hénon:

$$H_{b,c}(x, y) = (x^2 + c - by, x)$$

Il observe en particulier que pour $b^* := -0.4$, $c^* := -1.3$, de nombreuses orbites convergent vers un "attracteur étrange" qui semble être l'adhérence de la variété instable de l'un des points fixes.

Pour ces valeurs des paramètres, $H_{b,c}$ possède deux points fixes de type selle.

L'application H_{b^*,c^*} ne semble pas avoir d'orbite périodique attractive, et des arguments topologiques permettent de montrer qu'il ne peut exister d'attracteur hyperbolique plus complexe, tel que le solénoïde.

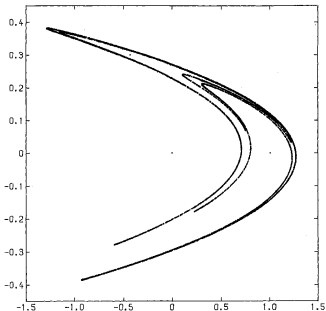


Fig. 2. 10000 successive points obtained by iteration of the mapping T starting from $x_0=0, y_0=0$

iterations of T again, starting from a different point: $x_0=0.63135448, y_0=0.18940634$ (this choice will be explained below). The two figures are seen to be almost identical. This suggests strongly that what we see in both figures is essentially the attractor itself: the successive points quickly approach the attractor and soon become undistinguishable from it at the scale of the figure. This is confirmed if one looks at the first few points on Figure 2. The initial point at $x_0=0, y_0=0$ and the first iterate at $x_1=1, y_1=0$ are clearly visible; the second iterate is still visible at $x_2=-0.4, y_2=0.3$; the third iterate can barely be distinguished at $x_3=1.076, y_3=-0.12$; and the fourth iterate at $x_4=-0.7408864, y_4=0.3228$ is already lost inside the attractor at the resolution of Figure 2. The following points then wander over the attractor in an apparently erratic manner.

One of the two unstable invariant points has the coordinates, given by (8):

$$x = 0.63135448\dots, \quad y = 0.18940634\dots \quad (12)$$

This point appears to belong to the attractor. The two eigenvalues λ_1, λ_2 and the slopes p_1, p_2 of the corresponding eigenvectors are

$$\lambda_1 = 0.15594632, \quad p_1 = 1.92373886$$

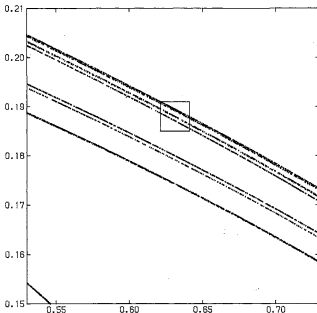


Fig. 4. Enlargement of the squared region of Figure 3. The number of computed points is increased to $n=10^5$.

number of visible "curves" increases. One more enlargement results in Fig. 6, with $n = 5 \times 10^5$: the points become sparse but new curves can still easily be traced.

These figures strongly suggest that the process of multiplication of "curves" will continue indefinitely, and that each apparent "curve" is in fact made of an infinity of quasi-parallel curves. Moreover, Figures 4 to 6 indicate the existence of a hierarchical sequence of "levels", the structure being practically identical at each level save for a scale factor. This is exactly the structure of a Cantor set.

The frames of Figures 4 to 6 have been chosen so as to contain the invariant point (12). This point appears to lie on the upper boundary of the attractor. Surprisingly, its presence is completely invisible on the figures; this contrasts with the area-preserving case, where stable and unstable invariant points play a very conspicuous role (see for instance Hénon, 1969). On the other hand, the presence of the invariant point explains, locally at least, the hierarchy of similar structures: at each application of the mapping, the scale of the transversal structure is multiplied by λ_1 given by (13). At the same time, the points spread out along the curves, as dictated by the value of λ_2 .

Le cas d'un petit Jacobien

Aucun résultat rigoureux n'est connu pour les paramètres considérés par Hénon.

Le cas d'un petit Jacobien

Aucun résultat rigoureux n'est connu pour les paramètres considérés par Hénon.

Par contre, on comprend mieux le cas $|b| \ll 1$, grâce aux travaux de Benedicks-Carleson (la percée initiale, 1989), Benedicks-Young, Benedicks-Viana, Wang-Young, Berger, ...

Le cas d'un petit Jacobien

Aucun résultat rigoureux n'est connu pour les paramètres considérés par Hénon.

Par contre, on comprend mieux le cas $|b| \ll 1$, grâce aux travaux de Benedicks-Carleson (la percée initiale, 1989), Benedicks-Young, Benedicks-Viana, Wang-Young, Berger, ...

Pour $b = 0$, l'application de Hénon envoie \mathbb{R}^2 sur la parabole $\{x = y^2 + c\}$, et la restriction de $H_{0,c}$ à cette parabole est le polynôme quadratique P_c .

Le cas d'un petit Jacobien

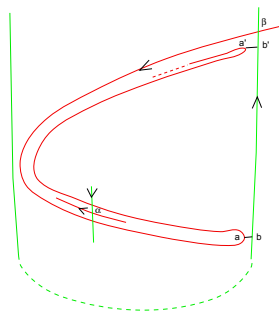
Aucun résultat rigoureux n'est connu pour les paramètres considérés par Hénon.

Par contre, on comprend mieux le cas $|b| \ll 1$, grâce aux travaux de Benedicks-Carleson (la percée initiale, 1989), Benedicks-Young, Benedicks-Viana, Wang-Young, Berger, ...

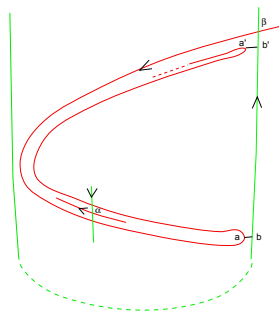
Pour $b = 0$, l'application de Hénon envoie \mathbb{R}^2 sur la parabole $\{x = y^2 + c\}$, et la restriction de $H_{0,c}$ à cette parabole est le polynôme quadratique P_c .

On cherche en quelque sorte une extension (beaucoup plus difficile) du théorème de Jakobson.

Variétés stables et instables des points fixes

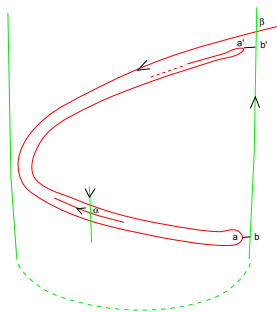


Variétés stables et instables des points fixes



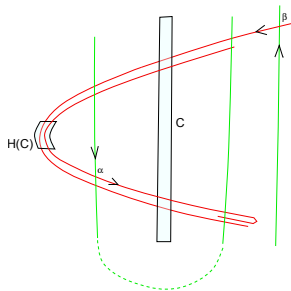
Pour c proche de -2 (mais > -2) et $1 \gg b > 0$, les points fixes β, α se trouvent sur la diagonale, proche de $(2, 2)$ et $(-1, -1)$.

Variétés stables et instables des points fixes

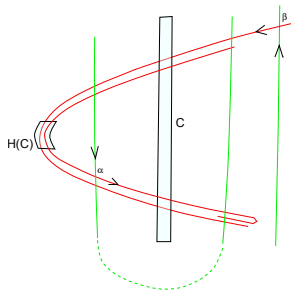


Pour c proche de -2 (mais > -2) et $1 \gg b > 0$, les points fixes β, α se trouvent sur la diagonale, proche de $(2, 2)$ et $(-1, -1)$. Le segment ab , la partie de $W^s(\beta)$ entre β et b , et la partie de $W^u(\beta)$ entre β et a délimitent une région ouverte B qui est envoyée dans elle-même par $H_{b,c}$.

La région critique et son image

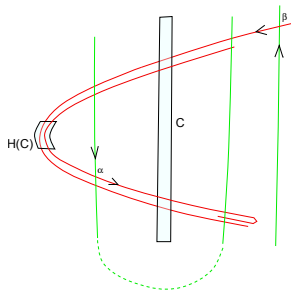


La région critique et son image



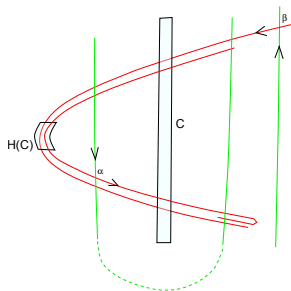
La bande critique C est un rectangle fin le long de $\{x = 0\}$.

La région critique et son image



La bande critique C est un rectangle fin le long de $\{x = 0\}$. Son image est un petit voisinage du sommet de la parabole. C'est là que se produit le premier "pliage".

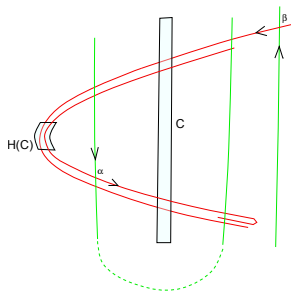
La région critique et son image



La bande critique C est un rectangle fin le long de $\{x = 0\}$. Son image est un petit voisinage du sommet de la parabole. C'est là que se produit le premier "pliage".

Les orbites bornées qui ne passent jamais par C forment un ensemble basique K de type selle.

La région critique et son image



La bande critique C est un rectangle fin le long de $\{x = 0\}$. Son image est un petit voisinage du sommet de la parabole. C'est là que se produit le premier "pliage".

Les orbites bornées qui ne passent jamais par C forment un **ensemble basique K de type selle**. La **direction stable** de K est essentiellement verticale, la **direction instable** essentiellement tangente à la parabole.

Théorème: Il existe $0 < b_0 \ll 1$ et, pour tout $b \in (0, b_0)$, un ensemble E_b de **mesure positive** de paramètres c proches de -2 tels que, pour $b \in (0, b_0)$, $c \in E_b$, le difféomorphisme $H_{b,c}$ a les propriétés suivantes:

Théorème: Il existe $0 < b_0 \ll 1$ et, pour tout $b \in (0, b_0)$, un ensemble E_b de **mesure positive** de paramètres c proches de -2 tels que, pour $b \in (0, b_0)$, $c \in E_b$, le difféomorphisme $H_{b,c}$ a les propriétés suivantes:

1. (Benedicks-Carleson) Toute orbite dans B converge vers l'adhérence Λ de la variété instable $W^u(\alpha)$.

Théorème: Il existe $0 < b_0 \ll 1$ et, pour tout $b \in (0, b_0)$, un ensemble E_b de **mesure positive** de paramètres c proches de -2 tels que, pour $b \in (0, b_0)$, $c \in E_b$, le difféomorphisme $H_{b,c}$ a les propriétés suivantes:

1. (Benedicks-Carleson) Toute orbite dans B converge vers l'adhérence Λ de la variété instable $W^u(\alpha)$. La restriction de $H_{b,c}$ à Λ a une **orbite dense**.

Théorème: Il existe $0 < b_0 \ll 1$ et, pour tout $b \in (0, b_0)$, un ensemble E_b de **mesure positive** de paramètres c proches de -2 tels que, pour $b \in (0, b_0)$, $c \in E_b$, le difféomorphisme $H_{b,c}$ a les propriétés suivantes:

1. (Benedicks-Carleson) Toute orbite dans B converge vers l'adhérence Λ de la variété instable $W^u(\alpha)$. La restriction de $H_{b,c}$ à Λ a une **orbite dense**. Le bassin d'attraction de Λ ne contient donc **pas d'orbite périodique attractive**.

2. (Benedicks-Young) L'attracteur Λ est le support d'une mesure physique:

2. (Benedicks-Young) L'attracteur Λ est le support d'une mesure physique: il s'agit d'une mesure de probabilité invariante ergodique μ dont le bassin

$$B(\mu) := \{(x, y) \in B \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \varphi \circ H_{b,c}^j(x, y) = \int \varphi d\mu, \\ \forall \varphi \in C(B)\}$$

a une mesure de Lebesgue positive.

2. (Benedicks-Young) L'attracteur Λ est le support d'une mesure physique: il s'agit d'une mesure de probabilité invariante ergodique μ dont le bassin

$$B(\mu) := \{(x, y) \in B \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \varphi \circ H_{b,c}^j(x, y) = \int \varphi d\mu, \\ \forall \varphi \in C(B)\}$$

a une mesure de Lebesgue positive. La mesure μ a un exposant de Lyapunov positif proche de $\log 2$.

2. (Benedicks-Young) L'attracteur Λ est le support d'une **mesure physique**: il s'agit d'une **mesure de probabilité invariante ergodique** μ dont le bassin

$$B(\mu) := \{(x, y) \in B \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \varphi \circ H_{b,c}^j(x, y) = \int \varphi d\mu, \\ \forall \varphi \in C(B)\}$$

a une **mesure de Lebesgue positive**. La mesure μ a un **exposant de Lyapunov positif** proche de $\log 2$. L'autre exposant est fortement négatif, puisque la somme des exposants est $\log b$.

2. (Benedicks-Young) L'attracteur Λ est le support d'une **mesure physique**: il s'agit d'une **mesure de probabilité invariante ergodique** μ dont le bassin

$$B(\mu) := \{(x, y) \in B \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \varphi \circ H_{b,c}^j(x, y) = \int \varphi d\mu, \\ \forall \varphi \in C(B)\}$$

a une **mesure de Lebesgue positive**. La mesure μ a un **exposant de Lyapunov positif** proche de $\log 2$. L'autre exposant est fortement négatif, puisque la somme des exposants est $\log b$.

3. (Benedicks-Viana) $B(\mu)$ est de **mesure totale** dans B .

La démonstration, par rapport à celle du théorème de Jakobson, présente de nombreuses difficultés supplémentaires.

La démonstration, par rapport à celle du théorème de Jakobson, présente de nombreuses difficultés supplémentaires.

- ▶ Pour les paramètres $c \in E_b$, il n'y a pas un seul **point critique**, comme en dimension 1,

La démonstration, par rapport à celle du théorème de Jakobson, présente de nombreuses difficultés supplémentaires.

- ▶ Pour les paramètres $c \in E_b$, il n'y a pas un seul **point critique**, comme en dimension 1, mais **un ensemble de Cantor**, de dimension de Hausdorff $\sim |\log b|^{-1}$, de points "**dynamiquement critiques**":

La démonstration, par rapport à celle du théorème de Jakobson, présente de nombreuses difficultés supplémentaires.

- ▶ Pour les paramètres $c \in E_b$, il n'y a pas un seul **point critique**, comme en dimension 1, mais **un ensemble de Cantor**, de dimension de Hausdorff $\sim |\log b|^{-1}$, de points "**dynamiquement critiques**": il s'agit de points, sur les branches de Λ qui traversent C , ou **les directions stables et instables coïncident**.

La démonstration, par rapport à celle du théorème de Jakobson, présente de nombreuses difficultés supplémentaires.

- ▶ Pour les paramètres $c \in E_b$, il n'y a pas un seul **point critique**, comme en dimension 1, mais **un ensemble de Cantor**, de dimension de Hausdorff $\sim |\log b|^{-1}$, de points "**dynamiquement critiques**": il s'agit de points, sur les branches de Λ qui traversent C , ou **les directions stables et instables coïncident**.
- ▶ La construction de E_b est **beaucoup plus délicate** qu'en dimension 1.

La démonstration, par rapport à celle du théorème de Jakobson, présente de nombreuses difficultés supplémentaires.

- ▶ Pour les paramètres $c \in E_b$, il n'y a pas un seul **point critique**, comme en dimension 1, mais **un ensemble de Cantor**, de dimension de Hausdorff $\sim |\log b|^{-1}$, de points "**dynamiquement critiques**": il s'agit de points, sur les branches de Λ qui traversent C , ou **les directions stables et instables coïncident**.
- ▶ La construction de E_b est **beaucoup plus délicate** qu'en dimension 1. Il s'agit de contrôler les orbites positives des points critiques, qui deviennent **progressivement indépendantes**.

La démonstration, par rapport à celle du théorème de Jakobson, présente de nombreuses difficultés supplémentaires.

- ▶ Pour les paramètres $c \in E_b$, il n'y a pas un seul **point critique**, comme en dimension 1, mais **un ensemble de Cantor**, de dimension de Hausdorff $\sim |\log b|^{-1}$, de points "**dynamiquement critiques**": il s'agit de points, sur les branches de Λ qui traversent C , ou **les directions stables et instables coïncident**.
- ▶ La construction de E_b est **beaucoup plus délicate** qu'en dimension 1. Il s'agit de contrôler les orbites positives des points critiques, qui deviennent **progressivement indépendantes**.
- ▶ Ni Λ , ni les points critiques **ne sont définis à l'avance**.

La démonstration, par rapport à celle du théorème de Jakobson, présente de nombreuses difficultés supplémentaires.

- ▶ Pour les paramètres $c \in E_b$, il n'y a pas un seul **point critique**, comme en dimension 1, mais **un ensemble de Cantor**, de dimension de Hausdorff $\sim |\log b|^{-1}$, de points "**dynamiquement critiques**": il s'agit de points, sur les branches de Λ qui traversent C , ou **les directions stables et instables coïncident**.
- ▶ La construction de E_b est **beaucoup plus délicate** qu'en dimension 1. Il s'agit de contrôler les orbites positives des points critiques, qui deviennent **progressivement indépendantes**.
- ▶ Ni Λ , ni les points critiques **ne sont définis à l'avance**. Il faut organiser une récurrence (sur le nombre d'itérations considérées) qui donne progressivement des informations **géométriques et dynamiques** sur l'ensemble critique.

La famille standard

Il s'agit d'une famille à un paramètre de difféomorphismes du tore **préservant les aires** définie par

$$F_k(x, y) = (2x - y + k \sin 2\pi x, x).$$

La famille standard

Il s'agit d'une famille à un paramètre de difféomorphismes du tore **préservant les aires** définie par

$$F_k(x, y) = (2x - y + k \sin 2\pi x, x).$$

L'inverse de F_k est donné par

$$F_k^{-1}(x, y) = (y, 2y - x + k \sin 2\pi y)$$

La famille standard

Il s'agit d'une famille à un paramètre de difféomorphismes du tore **préservant les aires** définie par

$$F_k(x, y) = (2x - y + k \sin 2\pi x, x).$$

L'inverse de F_k est donné par

$$F_k^{-1}(x, y) = (y, 2y - x + k \sin 2\pi y)$$

et est donc **conjugué à F_k** par l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$.

La famille standard

Il s'agit d'une famille à un paramètre de difféomorphismes du tore **préservant les aires** définie par

$$F_k(x, y) = (2x - y + k \sin 2\pi x, x).$$

L'inverse de F_k est donné par

$$F_k^{-1}(x, y) = (y, 2y - x + k \sin 2\pi y)$$

et est donc **conjugué à F_k** par l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$.

On remarquera aussi que $(x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$ conjugue F_k et F_{-k} .

La famille standard

Il s'agit d'une famille à un paramètre de difféomorphismes du tore **préservant les aires** définie par

$$F_k(x, y) = (2x - y + k \sin 2\pi x, x).$$

L'inverse de F_k est donné par

$$F_k^{-1}(x, y) = (y, 2y - x + k \sin 2\pi y)$$

et est donc **conjugué à F_k** par l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$.

On remarquera aussi que $(x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$ conjugue F_k et F_{-k} .

L'application F_0 est linéaire parabolique et **complètement intégrable**:

La famille standard

Il s'agit d'une famille à un paramètre de difféomorphismes du tore **préservant les aires** définie par

$$F_k(x, y) = (2x - y + k \sin 2\pi x, x).$$

L'inverse de F_k est donné par

$$F_k^{-1}(x, y) = (y, 2y - x + k \sin 2\pi y)$$

et est donc **conjugué à F_k** par l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$.

On remarquera aussi que $(x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$ conjugue F_k et F_{-k} .

L'application F_0 est linéaire parabolique et **complètement intégrable**: chaque cercle $\{x = y + \alpha\}$ est invariant et la dynamique sur ce cercle (paramétré par y) est la rotation $y \mapsto y + \alpha$.

La famille standard

Il s'agit d'une famille à un paramètre de difféomorphismes du tore **préservant les aires** définie par

$$F_k(x, y) = (2x - y + k \sin 2\pi x, x).$$

L'inverse de F_k est donné par

$$F_k^{-1}(x, y) = (y, 2y - x + k \sin 2\pi y)$$

et est donc **conjugué à F_k** par l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$.

On remarquera aussi que $(x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$ conjugue F_k et F_{-k} .

L'application F_0 est linéaire parabolique et **complètement intégrable**: chaque cercle $\{x = y + \alpha\}$ est invariant et la dynamique sur ce cercle (paramétré par y) est la rotation $y \mapsto y + \alpha$. Pour **k petit** ($|k| \leq k_0$), la **théorie KAM** fournit un ensemble fermé **de mesure positive** formé de courbes invariantes lisses, homotopes à la diagonale,

La famille standard

Il s'agit d'une famille à un paramètre de difféomorphismes du tore **préservant les aires** définie par

$$F_k(x, y) = (2x - y + k \sin 2\pi x, x).$$

L'inverse de F_k est donné par

$$F_k^{-1}(x, y) = (y, 2y - x + k \sin 2\pi y)$$

et est donc **conjugué à F_k** par l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$.

On remarquera aussi que $(x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$ conjugue F_k et F_{-k} .

L'application F_0 est linéaire parabolique et **complètement intégrable**: chaque cercle $\{x = y + \alpha\}$ est invariant et la dynamique sur ce cercle (paramétré par y) est la rotation $y \mapsto y + \alpha$. Pour **k petit** ($|k| \leq k_0$), la **théorie KAM** fournit un ensemble fermé **de mesure positive** formé de courbes invariantes lisses, homotopes à la diagonale, sur chacune desquelles la dynamique est **différentiablement conjuguée à une rotation diophantienne**.

D'après Birkhoff, lorsque k est petit, toute courbe invariante qui est homotope à la diagonale est en fait Lipschitz-proche d'un cercle parallèle à la diagonale.

La théorie de Birkhoff

D'après Birkhoff, lorsque k est petit, **toute** courbe invariante qui est homotope à la diagonale est en fait **Lipschitz-proche** d'un cercle parallèle à la diagonale. Il en résulte que l'union de **toutes** les courbes homotopes à la diagonale est un ensemble **fermé**.

La théorie de Birkhoff

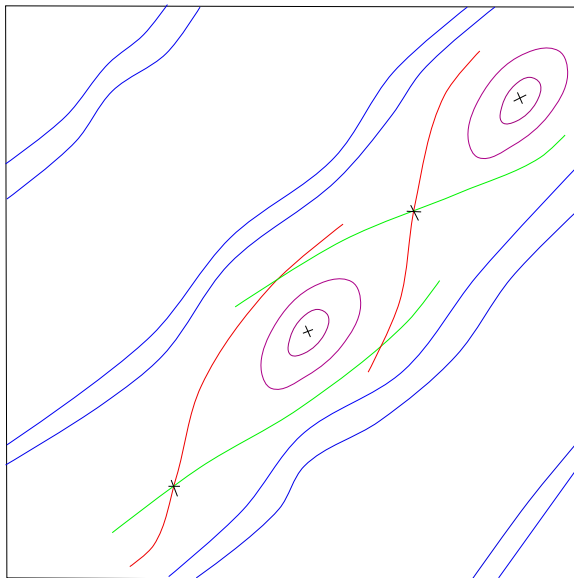
D'après Birkhoff, lorsque k est petit, **toute** courbe invariante qui est homotope à la diagonale est en fait **Lipschitz-proche** d'un cercle parallèle à la diagonale. Il en résulte que l'union de **toutes** les courbes homotopes à la diagonale est un ensemble **fermé**.

Les composantes connexes annulaires (ouvertes) du complémentaire de cette union sont invariantes:

La théorie de Birkhoff

D'après Birkhoff, lorsque k est petit, **toute** courbe invariante qui est homotope à la diagonale est en fait **Lipschitz-proche** d'un cercle parallèle à la diagonale. Il en résulte que l'union de **toutes** les courbes homotopes à la diagonale est un ensemble **fermé**.

Les composantes connexes annulaires (ouvertes) du complémentaire de cette union sont invariantes: ce sont les *zones d'instabilité de Birkhoff*.



Paramètre $k \geq 1$

Les points **fixes** de F_k sont les points de la diagonale tels que $k \sin 2\pi x$ soit entier.

Paramètre $k \geq 1$

Les points **fixes** de F_k sont les points de la diagonale tels que $k \sin 2\pi x$ soit entier.

Lorsque $k \geq 1$, il existe des points fixes tels que $k \sin 2\pi x$ ne soit pas nul.

Paramètre $k \geq 1$

Les points **fixes** de F_k sont les points de la diagonale tels que $k \sin 2\pi x$ soit entier.

Lorsque $k \geq 1$, il existe des points fixes tels que $k \sin 2\pi x$ ne soit pas nul.

Toute courbe F_k -invariante est alors **homotope à une constante**.

Questions sur la famille standard

Questions sur la famille standard

- ▶ Montrer que, pour tout $k \neq 0$, l'entropie **métrique** de F_k (pour la mesure de Lebesgue) est **strictement positive**.

Questions sur la famille standard

- ▶ Montrer que, pour tout $k \neq 0$, l'entropie **métrique** de F_k (pour la mesure de Lebesgue) est **strictement positive**.

On ne sait le montrer pour **aucun** paramètre k .

Questions sur la famille standard

- ▶ Montrer que, pour tout $k \neq 0$, l'entropie **métrique** de F_k (pour la mesure de Lebesgue) est **strictement positive**.

On ne sait le montrer pour **aucun** paramètre k .

- ▶ Montrer qu'il existe un ensemble de paramètres de **mesure positive** pour lesquels F_k soit ergodique.

Questions sur la famille standard

- ▶ Montrer que, pour tout $k \neq 0$, l'entropie **métrique** de F_k (pour la mesure de Lebesgue) est **strictement positive**.

On ne sait le montrer pour **aucun** paramètre k .

- ▶ Montrer qu'il existe un ensemble de paramètres de **mesure positive** pour lesquels F_k soit ergodique.

A nouveau, on ne sait le montrer pour **aucun** paramètre k .

Questions sur la famille standard

- ▶ Montrer que, pour tout $k \neq 0$, l'entropie **métrique** de F_k (pour la mesure de Lebesgue) est **strictement positive**.

On ne sait le montrer pour **aucun** paramètre k .

- ▶ Montrer qu'il existe un ensemble de paramètres de **mesure positive** pour lesquels F_k soit ergodique.

A nouveau, on ne sait le montrer pour **aucun** paramètre k . De tels paramètres ne peuvent se trouver dans le domaine d'application de la théorie KAM.

Questions sur la famille standard

- ▶ Montrer que, pour tout $k \neq 0$, l'entropie **métrique** de F_k (pour la mesure de Lebesgue) est **strictement positive**.

On ne sait le montrer pour **aucun** paramètre k .

- ▶ Montrer qu'il existe un ensemble de paramètres de **mesure positive** pour lesquels F_k soit ergodique.

A nouveau, on ne sait le montrer pour **aucun** paramètre k . De tels paramètres ne peuvent se trouver dans le domaine d'application de la théorie KAM. Pour de tels paramètres, toutes les orbites périodiques seraient hyperboliques.

Questions sur la famille standard

- ▶ Montrer que, pour tout $k \neq 0$, l'entropie **métrique** de F_k (pour la mesure de Lebesgue) est **strictement positive**.

On ne sait le montrer pour **aucun** paramètre k .

- ▶ Montrer qu'il existe un ensemble de paramètres de **mesure positive** pour lesquels F_k soit ergodique.

A nouveau, on ne sait le montrer pour **aucun** paramètre k . De tels paramètres ne peuvent se trouver dans le domaine d'application de la théorie KAM. Pour de tels paramètres, toutes les orbites périodiques seraient hyperboliques. Cependant F_k n'est **jamais** uniformément hyperbolique, car F_k serait un **difféomorphisme d'Anosov**;

Questions sur la famille standard

- ▶ Montrer que, pour tout $k \neq 0$, l'entropie **métrique** de F_k (pour la mesure de Lebesgue) est **strictement positive**.

On ne sait le montrer pour **aucun** paramètre k .

- ▶ Montrer qu'il existe un ensemble de paramètres de **mesure positive** pour lesquels F_k soit ergodique.

A nouveau, on ne sait le montrer pour **aucun** paramètre k . De tels paramètres ne peuvent se trouver dans le domaine d'application de la théorie KAM. Pour de tels paramètres, toutes les orbites périodiques seraient hyperboliques. Cependant F_k n'est **jamais** uniformément hyperbolique, car F_k serait un **difféomorphisme d'Anosov**; ce n'est pas possible dans cette classe d'homotopie.