Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques quasipériodiques(6)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

4 juin 2014

Espaces vectoriels symplectiques

- Un espace vectoriel symplectique est un espace vectoriel (de dimension paire) muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée, appelée forme symplectique.

Espaces vectoriels symplectiques

- Un espace vectoriel symplectique est un espace vectoriel (de dimension paire) muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée, appelée forme symplectique.
- Un espace vectoriel symplectique (E, ω) (de dimension $2n$) est canoniquement orienté par $\wedge^n \omega$.

Espaces vectoriels symplectiques

- Un espace vectoriel symplectique est un espace vectoriel (de dimension paire) muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée, appelée forme symplectique.
- Un espace vectoriel symplectique (E, ω) (de dimension $2n$) est canoniquement orienté par $\wedge^n \omega$.
- La formule

$$\omega(v, v') = \, {}^t v \, \Omega \, v',$$

  met en correspondance biunivoque les formes symplectiques sur $\mathbb{R}^{2n}$ et les matrices antisymétriques inversibles $\Omega \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

Espaces vectoriels symplectiques

- Un espace vectoriel symplectique est un espace vectoriel (de dimension paire) muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée, appelée forme symplectique.
- Un espace vectoriel symplectique (E, ω) (de dimension $2n$) est canoniquement orienté par $\wedge^n \omega$.
- La formule
$$\omega(v, v') = \, {}^t v \, \Omega \, v',$$
met en correspondance biunivoque les formes symplectiques sur $\mathbb{R}^{2n}$ et les matrices antisymétriques inversibles $\Omega \in M_{2n}(\mathbb{R})$.
- La forme symplectique canonique sur $\mathbb{R}^{2n}$ est associée à la matrice
$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

- Le groupe $GL(E)$ agit *transitivement* sur l'espace des formes symplectiques sur E.

- Le groupe $GL(E)$ agit *transitivement* sur l'espace des formes symplectiques sur E. Le stabilisateur d'une forme symplectique ω est un sous-groupe de Lie de $GL(E)$ appelé groupe symplectique de (E, ω) et noté $Sp(E, \omega)$.

- Le groupe $GL(E)$ agit *transitivement* sur l'espace des formes symplectiques sur E. Le stabilisateur d'une forme symplectique ω est un sous-groupe de Lie de $GL(E)$ appelé groupe symplectique de (E, ω) et noté $Sp(E, \omega)$. Les éléments de $Sp(E, \omega)$ sont appelés automorphismes symplectiques.

- Le groupe $GL(E)$ agit *transitivement* sur l'espace des formes symplectiques sur E. Le stabilisateur d'une forme symplectique ω est un sous-groupe de Lie de $GL(E)$ appelé groupe symplectique de (E, ω) et noté $Sp(E, \omega)$. Les éléments de $Sp(E, \omega)$ sont appelés automorphismes symplectiques.
- L'algèbre de Lie de $Sp(E, \omega)$, notée $sp(E, \omega)$, est formée des endomorphismes a de E vérifiant

$$\omega(v, a.v') + \omega(a.v, v') = 0, \qquad \forall v, v' \in E.$$

- Le groupe $GL(E)$ agit *transitivement* sur l'espace des formes symplectiques sur E. Le stabilisateur d'une forme symplectique ω est un sous-groupe de Lie de $GL(E)$ appelé groupe symplectique de (E, ω) et noté $Sp(E, \omega)$. Les éléments de $Sp(E, \omega)$ sont appelés automorphismes symplectiques.
- L'algèbre de Lie de $Sp(E, \omega)$, notée $sp(E, \omega)$, est formée des endomorphismes a de E vérifiant

$$\omega(v, a.v') + \omega(a.v, v') = 0, \qquad \forall v, v' \in E.$$

- Un automorphisme symplectique est de déterminant 1.

- Le groupe $GL(E)$ agit *transitivement* sur l'espace des formes symplectiques sur E. Le stabilisateur d'une forme symplectique ω est un sous-groupe de Lie de $GL(E)$ appelé groupe symplectique de (E, ω) et noté $Sp(E, \omega)$. Les éléments de $Sp(E, \omega)$ sont appelés automorphismes symplectiques.
- L'algèbre de Lie de $Sp(E, \omega)$, notée $sp(E, \omega)$, est formée des endomorphismes a de E vérifiant

$$\omega(v, a.v') + \omega(a.v, v') = 0, \qquad \forall v, v' \in E.$$

- Un automorphisme symplectique est de déterminant 1.
- Dans une base où ω est associée à une matrice Ω, les automorphismes symplectiques sont caractérisés par la relation

$$^{t}M \, \Omega \, M = \Omega.$$

- Le groupe $GL(E)$ agit *transitivement* sur l'espace des formes symplectiques sur E. Le stabilisateur d'une forme symplectique ω est un sous-groupe de Lie de $GL(E)$ appelé groupe symplectique de (E, ω) et noté $Sp(E, \omega)$. Les éléments de $Sp(E, \omega)$ sont appelés automorphismes symplectiques.
- L'algèbre de Lie de $Sp(E, \omega)$, notée $sp(E, \omega)$, est formée des endomorphismes a de E vérifiant

$$\omega(v, a.v') + \omega(a.v, v') = 0, \qquad \forall v, v' \in E.$$

- Un automorphisme symplectique est de déterminant 1.
- Dans une base où ω est associée à une matrice Ω, les automorphismes symplectiques sont caractérisés par la relation

$$^tM \, \Omega \, M = \Omega.$$

  Les éléments de $sp(E, \omega)$ sont caractérisés par la relation

$$^tM \, \Omega + \Omega \, M = 0.$$

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in Sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, λ^{-1}, $\bar{\lambda}^{-1}$ sont aussi valeurs propres de A.

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in Sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, λ^{-1}, $\bar{\lambda}^{-1}$ sont aussi valeurs propres de A.
- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $a \in sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, $-\lambda$, $-\bar{\lambda}$ sont aussi valeurs propres de a.

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in Sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, λ^{-1}, $\bar{\lambda}^{-1}$ sont aussi valeurs propres de A.
- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $a \in sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, $-\lambda$, $-\bar{\lambda}$ sont aussi valeurs propres de a.
- Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique. Un sous-espace vectoriel de E est dit isotrope s'il est contenu dans son ω-orthogonal,

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in Sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, λ^{-1}, $\bar{\lambda}^{-1}$ sont aussi valeurs propres de A.
- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $a \in sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, $-\lambda$, $-\bar{\lambda}$ sont aussi valeurs propres de a.
- Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique. Un sous-espace vectoriel de E est dit isotrope s'il est contenu dans son ω-orthogonal, coisotrope s'il contient son ω-orthogonal,

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in Sp(E,\omega)$, alors $\bar{\lambda}$, λ^{-1}, $\bar{\lambda}^{-1}$ sont aussi valeurs propres de A.
- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $a \in sp(E,\omega)$, alors $\bar{\lambda}$, $-\lambda$, $-\bar{\lambda}$ sont aussi valeurs propres de a.
- Soit (E,ω) un espace vectoriel symplectique. Un sous-espace vectoriel de E est dit isotrope s'il est contenu dans son ω-orthogonal, coisotrope s'il contient son ω-orthogonal, lagrangien s'il est égal à son ω-orthogonal.

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in Sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, λ^{-1}, $\bar{\lambda}^{-1}$ sont aussi valeurs propres de A.
- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $a \in sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, $-\lambda$, $-\bar{\lambda}$ sont aussi valeurs propres de a.
- Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique. Un sous-espace vectoriel de E est dit isotrope s'il est contenu dans son ω-orthogonal, coisotrope s'il contient son ω-orthogonal, lagrangien s'il est égal à son ω-orthogonal.
- Le groupe symplectique $Sp(E, \omega)$ opère *transitivement* sur la variété grassmannienne des sous-espaces lagrangiens de E.

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in Sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, λ^{-1}, $\bar{\lambda}^{-1}$ sont aussi valeurs propres de A.
- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $a \in sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, $-\lambda$, $-\bar{\lambda}$ sont aussi valeurs propres de a.
- Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique. Un sous-espace vectoriel de E est dit isotrope s'il est contenu dans son ω-orthogonal, coisotrope s'il contient son ω-orthogonal, lagrangien s'il est égal à son ω-orthogonal.
- Le groupe symplectique $Sp(E, \omega)$ opère *transitivement* sur la variété grassmannienne des sous-espaces lagrangiens de E.
- Posons $\dim E = 2n$. La variété grassmannienne lagrangienne est de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$.

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in Sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, λ^{-1}, $\bar{\lambda}^{-1}$ sont aussi valeurs propres de A.
- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $a \in sp(E, \omega)$, alors $\bar{\lambda}$, $-\lambda$, $-\bar{\lambda}$ sont aussi valeurs propres de a.
- Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique. Un sous-espace vectoriel de E est dit isotrope s'il est contenu dans son ω-orthogonal, coisotrope s'il contient son ω-orthogonal, lagrangien s'il est égal à son ω-orthogonal.
- Le groupe symplectique $Sp(E, \omega)$ opère *transitivement* sur la variété grassmannienne des sous-espaces lagrangiens de E.
- Posons $\dim E = 2n$. La variété grassmannienne lagrangienne est de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$. Le groupe $Sp(E, \omega)$ est de dimension $n(2n+1)$.

Variétés symplectiques et symplectomorphismes

- Une variété symplectique est une variété de dimension paire munie d'une forme symplectique:

Variétés symplectiques et symplectomorphismes

- Une variété symplectique est une variété de dimension paire munie d'une forme symplectique: une 2-forme fermée partout non dégénérée.

Variétés symplectiques et symplectomorphismes

- Une variété symplectique est une variété de dimension paire munie d'une forme symplectique: une 2-forme fermée partout non dégénérée.
  En tout point d'une variété symplectique, l'espace tangent est ainsi un espace vectoriel symplectique.

Variétés symplectiques et symplectomorphismes

- Une variété symplectique est une variété de dimension paire munie d'une forme symplectique: une 2-forme fermée partout non dégénérée.
  En tout point d'une variété symplectique, l'espace tangent est ainsi un espace vectoriel symplectique.
- Soit (M, ω) une variété symplectique. Alors $\wedge^n \omega$ est une forme volume, dite de Liouville.

Variétés symplectiques et symplectomorphismes

- Une variété symplectique est une variété de dimension paire munie d'une forme symplectique: une 2-forme fermée partout non dégénérée.
  En tout point d'une variété symplectique, l'espace tangent est ainsi un espace vectoriel symplectique.
- Soit (M, ω) une variété symplectique. Alors $\wedge^n \omega$ est une forme volume, dite de Liouville.
- Soient (M, ω), (M', ω') deux variétés symplectiques. Un difféomorphisme $f : M \to M'$ est symplectique, ou est un symplectomorphisme si $f^* \omega' = \omega$.

Variétés symplectiques et symplectomorphismes

- Une variété symplectique est une variété de dimension paire munie d'une forme symplectique: une 2-forme fermée partout non dégénérée.
  En tout point d'une variété symplectique, l'espace tangent est ainsi un espace vectoriel symplectique.
- Soit (M, ω) une variété symplectique. Alors $\wedge^n \omega$ est une forme volume, dite de Liouville.
- Soient (M, ω), (M', ω') deux variétés symplectiques. Un difféomorphisme $f : M \to M'$ est symplectique, ou est un symplectomorphisme si $f^* \omega' = \omega$. Un tel difféomorphisme préserve les formes de Liouville associées.

Variétés symplectiques et symplectomorphismes

- Une variété symplectique est une variété de dimension paire munie d'une forme symplectique: une 2-forme fermée partout non dégénérée.
  En tout point d'une variété symplectique, l'espace tangent est ainsi un espace vectoriel symplectique.
- Soit (M, ω) une variété symplectique. Alors $\wedge^n \omega$ est une forme volume, dite de Liouville.
- Soient (M, ω), (M', ω') deux variétés symplectiques. Un difféomorphisme $f : M \to M'$ est symplectique, ou est un symplectomorphisme si $f^* \omega' = \omega$. Un tel difféomorphisme préserve les formes de Liouville associées.
  Les symplectomorphismes de classe C^r de (M, ω) forment un sous-groupe du groupe $\mathrm{Diff}^r(M)$ noté $\mathrm{Diff}^r_\omega(M)$.

Exemples. Espaces cotangents

- Sur $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ ou $\mathbb{T}^{2n}$, munis des coordonnées globales $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, on a la forme symplectique canonique

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Exemples. Espaces cotangents

- Sur $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ ou $\mathbb{T}^{2n}$, munis des coordonnées globales $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, on a la forme symplectique canonique

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

- Le fibré cotangent $M = T^*N$ d'une variété N est naturellement muni d'une forme symplectique $\omega = d\eta$.

Exemples. Espaces cotangents

- Sur $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ ou $\mathbb{T}^{2n}$, munis des coordonnées globales $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, on a la forme symplectique canonique
$$\omega := \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$
- Le fibré cotangent $M = T^*N$ d'une variété N est naturellement muni d'une forme symplectique $\omega = d\eta$. La 1-forme η est définie par
$$\eta(v) =< p, T_{(x,p)}\pi(v) >, \quad \forall x \in N,\ p \in T_x^*N,\ v \in T_{(x,p)}M,$$
où $\pi : T^*N \to N$ est la projetion canonique et $< \quad , \quad >$ indique la dualité entre espaces tangents et cotangents.

Exemples. Espaces cotangents

- Sur $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ ou $\mathbb{T}^{2n}$, munis des coordonnées globales $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, on a la forme symplectique canonique

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i .$$

- Le fibré cotangent $M = T^*N$ d'une variété N est naturellement muni d'une forme symplectique $\omega = d\eta$. La 1-forme η est définie par

$$\eta(v) = < p, T_{(x,p)}\pi(v) >, \quad \forall x \in N,\ p \in T_x^* N,\ v \in T_{(x,p)}M,$$

  où $\pi : T^*N \to N$ est la projetion canonique et $< \quad , \quad >$ indique la dualité entre espaces tangents et cotangents.
- Si $f : N \to N'$ est un difféomorphisme ente variétés, alors $T^*f : T^*N \to T^*N'$ est un symplectomorphisme entre les fibrés cotangents.

Le théorème de Darboux

Il n'y a pas d'invariants locaux en géométrie symplectique.

Le théorème de Darboux

Il n'y a pas d'invariants locaux en géométrie symplectique.

Théorème: (Darboux) Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique, et soit m un point de M. Il existe un difféomorphisme f d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{2n}$ sur un voisinage de m dans M tel qu'on ait

$$f^*\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Sous-variétés lagrangiennes

Une sous-variété L d'une variété symplectique (M, ω) est lagrangienne si $T_x L$ est un sous-espace lagrangien de $T_x M$ pour tout $x \in L$.

Sous-variétés lagrangiennes

Une sous-variété L d'une variété symplectique (M, ω) est lagrangienne si $T_x L$ est un sous-espace lagrangien de $T_x M$ pour tout $x \in L$.

Proposition: Soit N une variété et soit θ une 1-forme sur N.

Sous-variétés lagrangiennes

Une sous-variété L d'une variété symplectique (M, ω) est lagrangienne si $T_x L$ est un sous-espace lagrangien de $T_x M$ pour tout $x \in L$.

Proposition: Soit N une variété et soit θ une 1-forme sur N. Le graphe de θ, considéré comme une sous-variété de $T^* N$, est *lagrangien* ssi la 1-forme θ est *fermée*.

Preuve: L'assertion est locale. Dans un système de coordonnées $q_1, \ldots, q_n$, écrivons $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i dq_i$.

Sous-variétés lagrangiennes

Une sous-variété L d'une variété symplectique (M, ω) est lagrangienne si $T_x L$ est un sous-espace lagrangien de $T_x M$ pour tout $x \in L$.

Proposition: Soit N une variété et soit θ une 1-forme sur N. Le graphe de θ, considéré comme une sous-variété de T^*N, est *lagrangien* ssi la 1-forme θ est *fermée*.

Preuve: L'assertion est locale. Dans un système de coordonnées $q_1, \dots, q_n$, écrivons $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i dq_i$. Une base de l'espace tangent au graphe de θ est formée des champs de vecteurs

$$X_j := \frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Sous-variétés lagrangiennes

Une sous-variété L d'une variété symplectique (M, ω) est lagrangienne si $T_x L$ est un sous-espace lagrangien de $T_x M$ pour tout $x \in L$.

Proposition: Soit N une variété et soit θ une 1-forme sur N. Le graphe de θ, considéré comme une sous-variété de T^*N, est *lagrangien* ssi la 1-forme θ est *fermée*.

Preuve: L'assertion est locale. Dans un système de coordonnées $q_1, \ldots, q_n$, écrivons $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i dq_i$. Une base de l'espace tangent au graphe de θ est formée des champs de vecteurs

$$X_j := \frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Pour la forme symplectique canonique ω sur T^*N, on a

$$\omega(X_j, X_k) = \frac{\partial \theta_k}{\partial q_j} - \frac{\partial \theta_j}{\partial q_k},$$

Sous-variétés lagrangiennes

Une sous-variété L d'une variété symplectique (M, ω) est lagrangienne si $T_x L$ est un sous-espace lagrangien de $T_x M$ pour tout $x \in L$.

Proposition: Soit N une variété et soit θ une 1-forme sur N. Le graphe de θ, considéré comme une sous-variété de T^*N, est *lagrangien* ssi la 1-forme θ est *fermée*.

Preuve: L'assertion est locale. Dans un système de coordonnées $q_1, \ldots, q_n$, écrivons $\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i dq_i$. Une base de l'espace tangent au graphe de θ est formée des champs de vecteurs

$$X_j := \frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_i \frac{\partial \theta_i}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Pour la forme symplectique canonique ω sur T^*N, on a

$$\omega(X_j, X_k) = \frac{\partial \theta_k}{\partial q_j} - \frac{\partial \theta_j}{\partial q_k},$$

d'où la proposition. $\square$

Une variante de la proposition précédente

Soit N une variété, et soit θ une 1-forme sur N.

Une variante de la proposition précédente

Soit N une variété, et soit θ une 1-forme sur N.

Proposition: Le difféomorphisme $(x, v) \mapsto (x, v + \theta(x))$ de T^*N est *symplectique* ssi la 1-forme θ est fermée.

Une variante de la proposition précédente

Soit N une variété, et soit θ une 1-forme sur N.

Proposition: Le difféomorphisme $(x, v) \mapsto (x, v + \theta(x))$ de T^*N est *symplectique* ssi la 1-forme θ est fermée.

La preuve est semblable à celle de la proposition précédente.

Champs de vecteurs Hamiltoniens

Un Hamiltonien est une fonction lisse H sur une variété symplectique (M, ω).

Champs de vecteurs Hamiltoniens

Un Hamiltonien est une fonction lisse H sur une variété symplectique (M, ω). Le champ de vecteurs Hamiltonien X_H associé à H est défini par

$$\omega_x(v, X_H(x)) = d_x H(v), \quad \forall x \in M, \ v \in T_x M.$$

Champs de vecteurs Hamiltoniens

Un Hamiltonien est une fonction lisse H sur une variété symplectique (M, ω). Le champ de vecteurs Hamiltonien X_H associé à H est défini par

$$\omega_x(v, X_H(x)) = d_x H(v), \quad \forall x \in M, \; v \in T_x M.$$

Dans des coordonnées de Darboux, l'équation différentielle associée est

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n.$$

Champs de vecteurs Hamiltoniens

Un Hamiltonien est une fonction lisse H sur une variété symplectique (M, ω). Le champ de vecteurs Hamiltonien X_H associé à H est défini par

$$\omega_x(v, X_H(x)) = d_x H(v), \quad \forall x \in M,\ v \in T_x M.$$

Dans des coordonnées de Darboux, l'équation différentielle associée est

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots n.$$

On a $d_x H(X_H(x)) \equiv 0$, donc le Hamiltonien H est constant le long des orbites de X_H.

Champs de vecteurs Hamiltoniens

Un Hamiltonien est une fonction lisse H sur une variété symplectique (M, ω). Le champ de vecteurs Hamiltonien X_H associé à H est défini par

$$\omega_x(v, X_H(x)) = d_x H(v), \quad \forall x \in M,\ v \in T_x M.$$

Dans des coordonnées de Darboux, l'équation différentielle associée est

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots n.$$

On a $d_x H(X_H(x)) \equiv 0$, donc le Hamiltonien H est constant le long des orbites de X_H.

Le flot de X_H est constitué de symplectomorphismes:

Champs de vecteurs Hamiltoniens

Un Hamiltonien est une fonction lisse H sur une variété symplectique (M, ω). Le champ de vecteurs Hamiltonien X_H associé à H est défini par

$$\omega_x(v, X_H(x)) = d_x H(v), \quad \forall x \in M,\ v \in T_x M.$$

Dans des coordonnées de Darboux, l'équation différentielle associée est

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots n.$$

On a $d_x H(X_H(x)) \equiv 0$, donc le Hamiltonien H est constant le long des orbites de X_H.

Le flot de X_H est constitué de symplectomorphismes: on a en effet

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = (i_{X_H} d + d i_{X_H})\omega = d(dH) = 0.$$

Action des symplectomorphismes

Soit $f : (M, \omega) \to (M', \omega')$ un symplectomorphisme, et soit $H' : M' \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien. Posons $H := H' \circ f$.

Action des symplectomorphismes

Soit $f : (M, \omega) \to (M', \omega')$ un symplectomorphisme, et soit $H' : M' \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien. Posons $H := H' \circ f$.
Alors l'image par Tf du champ de vecteurs X_H est le champ de vecteurs $X_{H'}$.

Action des symplectomorphismes

Soit $f : (M, \omega) \to (M', \omega')$ un symplectomorphisme, et soit $H' : M' \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien. Posons $H := H' \circ f$.
Alors l'image par Tf du champ de vecteurs X_H est le champ de vecteurs $X_{H'}$. En effet, pour $x \in M$, $v \in T_x M$, on a

$$\begin{aligned} \omega'(T_x f(v), T_x f(X_H(x))) &= \omega(v, X_H(x)) \\ &= d_x H(v) \\ &= d_{f(x)} H'(T_x f(v)) \\ &= \omega'(T_x f(v), X_{H'}(f(x))), \end{aligned}$$

Action des symplectomorphismes

Soit $f : (M, \omega) \to (M', \omega')$ un symplectomorphisme, et soit $H' : M' \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien. Posons $H := H' \circ f$.
Alors l'image par Tf du champ de vecteurs X_H est le champ de vecteurs $X_{H'}$. En effet, pour $x \in M$, $v \in T_x M$, on a

$$\begin{aligned} \omega'(T_x f(v), T_x f(X_H(x))) &= \omega(v, X_H(x)) \\ &= d_x H(v) \\ &= d_{f(x)} H'(T_x f(v)) \\ &= \omega'(T_x f(v), X_{H'}(f(x))), \end{aligned}$$

donc $T_x f(X_H(x)) = X_{H'}(f(x))$.

Exemple: le problème des *n* corps

Les équations du problème des *n* corps

$$\dot{Q}_i = \frac{P_i}{m_i}, \quad \dot{P}_i = \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{Q_j - Q_i}{||Q_j - Q_i||^3}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

Exemple: le problème des n corps

Les équations du problème des n corps

$$\dot{Q}_i = \frac{P_i}{m_i}, \quad \dot{P}_i = \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{Q_j - Q_i}{||Q_j - Q_i||^3}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

correspondent au Hamiltonien

$$H(Q,P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\|P_i\|^2}{2m_i} - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|Q_i - Q_j\|}.$$

Complète intégrabilité

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Munissons $\mathbb{T}^n \times U$ des coordonnées $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ et de la forme symplectique standard $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Complète intégrabilité

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Munissons $\mathbb{T}^n \times U$ des coordonnées $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ et de la forme symplectique standard $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.
Un Hamiltonien H sur $\mathbb{T}^n \times U$ est complètement intégrable s'il ne dépend que des variables d'action $p_1, \ldots, p_n$.

Complète intégrabilité

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Munissons $\mathbb{T}^n \times U$ des coordonnées $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ et de la forme symplectique standard $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.
Un Hamiltonien H sur $\mathbb{T}^n \times U$ est complètement intégrable s'il ne dépend que des variables d'action $p_1, \ldots, p_n$. Les autres coordonnées $q_1, \ldots, q_n$ sont les variables angulaires.

Complète intégrabilité

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Munissons $\mathbb{T}^n \times U$ des coordonnées $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ et de la forme symplectique standard $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.
Un Hamiltonien H sur $\mathbb{T}^n \times U$ est complètement intégrable s'il ne dépend que des variables d'action $p_1, \ldots, p_n$. Les autres coordonnées $q_1, \ldots, q_n$ sont les variables angulaires.
Les équations de Hamilton s'écrivent alors

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} =: \alpha_i(p), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Complète intégrabilité

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Munissons $\mathbb{T}^n \times U$ des coordonnées $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ et de la forme symplectique standard $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.
Un Hamiltonien H sur $\mathbb{T}^n \times U$ est complètement intégrable s'il ne dépend que des variables d'action $p_1, \ldots, p_n$. Les autres coordonnées $q_1, \ldots, q_n$ sont les variables angulaires.
Les équations de Hamilton s'écrivent alors

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} =: \alpha_i(p), \quad i = 1, \ldots, n.$$

L'espace des phases $\mathbb{T}^n \times U$ est feuilleté par les tores $\{p = p_*\}$ de dimension n, qui sont invariants par le flot de X_H.

Chacun de ces tores est *lagrangien*.

Chacun de ces tores est *lagrangien*. La restriction de X_H au tore $\{p = p_*\}$ est le champ de vecteurs constant

$$X_{\alpha(p_*)} := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p_*) \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Chacun de ces tores est *lagrangien*. La restriction de X_H au tore $\{p = p_*\}$ est le champ de vecteurs constant

$$X_{\alpha(p_*)} := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p_*) \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

- Lorsque les $\alpha_i(p_*)$ sont rationnellement indépendants, le flot de $X_{\alpha(p_*)}$ est minimal et uniquement ergodique.

Chacun de ces tores est *lagrangien*. La restriction de X_H au tore $\{p = p_*\}$ est le champ de vecteurs constant

$$X_{\alpha(p_*)} := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p_*) \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

- Lorsque les $\alpha_i(p_*)$ sont rationnellement indépendants, le flot de $X_{\alpha(p_*)}$ est minimal et uniquement ergodique.
- Sinon, les adhérences des orbites sont des tores isotropes de dimension $< n$.

Chacun de ces tores est *lagrangien*. La restriction de X_H au tore $\{p = p_*\}$ est le champ de vecteurs constant

$$X_{\alpha(p_*)} := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p_*) \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

- Lorsque les $\alpha_i(p_*)$ sont rationnellement indépendants, le flot de $X_{\alpha(p_*)}$ est minimal et uniquement ergodique.
- Sinon, les adhérences des orbites sont des tores isotropes de dimension $< n$.
- Lorsque les $\alpha_i(p_*)$ sont commensurables, le tore $\{p = p_*\}$ est feuilleté par des orbites périodiques de X_H.

Sous-variétés lagrangiennes invariantes

Soit N une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique (M, ω).

Sous-variétés lagrangiennes invariantes

Soit N une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique (M, ω).

Theorème: (Weinstein) Il existe un symplectomorphisme d'un voisinage de N dans M sur un voisinage de la section nulle dans T^*N.

Sous-variétés lagrangiennes invariantes

Soit N une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique (M, ω).

Theorème: (Weinstein) Il existe un symplectomorphisme d'un voisinage de N dans M sur un voisinage de la section nulle dans T^*N.

Proposition: Si un Hamiltonien H est constant sur N, alors N est invariant par le flot de X_H.

Sous-variétés lagrangiennes invariantes

Soit N une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique (M, ω).

Theorème: (Weinstein) Il existe un symplectomorphisme d'un voisinage de N dans M sur un voisinage de la section nulle dans T^*N.

Proposition: Si un Hamiltonien H est constant sur N, alors N est invariant par le flot de X_H.

En effet, on a

$$\omega(v, X_H(x)) = d_x H(v) = 0, \qquad \forall x \in N, \; v \in T_x N.$$

Sous-variétés lagrangiennes invariantes

Soit N une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique (M, ω).

Theorème: (Weinstein) Il existe un symplectomorphisme d'un voisinage de N dans M sur un voisinage de la section nulle dans T^*N.

Proposition: Si un Hamiltonien H est constant sur N, alors N est invariant par le flot de X_H.

En effet, on a

$$\omega(v, X_H(x)) = d_x H(v) = 0, \qquad \forall x \in N,\ v \in T_x N.$$

Donc $X_H(x)$ est ω-orthogonal à $T_x N$;

Sous-variétés lagrangiennes invariantes

Soit N une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique (M, ω).

Theorème: (Weinstein) Il existe un symplectomorphisme d'un voisinage de N dans M sur un voisinage de la section nulle dans T^*N.

Proposition: Si un Hamiltonien H est constant sur N, alors N est invariant par le flot de X_H.

En effet, on a

$$\omega(v, X_H(x)) = d_x H(v) = 0, \qquad \forall x \in N,\ v \in T_x N.$$

Donc $X_H(x)$ est ω-orthogonal à $T_x N$; comme N est lagrangienne, $X_H(x)$ appartient à $T_x N$. $\square$

Tores invariants lagrangiens

Supposons que $T \subset M$ soit un *tore* lagrangien, et que $H : M \to \mathbb{R}$ soit un Hamiltonien constant sur T.

Tores invariants lagrangiens

Supposons que $T \subset M$ soit un *tore* lagrangien, et que $H : M \to \mathbb{R}$ soit un Hamiltonien constant sur T.

D'après le théorème de Weinstein, on peut se ramener au voisinage de T par symplectomorphisme au cas où

$$M = \mathbb{T}^n \times U, \quad T = \mathbb{T}^n \times \{0\}, \quad \omega = \sum dp_i \wedge dq_i.$$

Tores invariants lagrangiens

Supposons que $T \subset M$ soit un *tore* lagrangien, et que $H : M \to \mathbb{R}$ soit un Hamiltonien constant sur T.

D'après le théorème de Weinstein, on peut se ramener au voisinage de T par symplectomorphisme au cas où

$$M = \mathbb{T}^n \times U, \quad T = \mathbb{T}^n \times \{0\}, \quad \omega = \sum dp_i \wedge dq_i.$$

Ecrivons alors

$$H = c_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i(q) p_i + O(\|p\|^2).$$

Tores invariants lagrangiens

Supposons que $T \subset M$ soit un *tore* lagrangien, et que $H : M \to \mathbb{R}$ soit un Hamiltonien constant sur T.

D'après le théorème de Weinstein, on peut se ramener au voisinage de T par symplectomorphisme au cas où

$$M = \mathbb{T}^n \times U, \quad T = \mathbb{T}^n \times \{0\}, \quad \omega = \sum dp_i \wedge dq_i.$$

Ecrivons alors

$$H = c_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i(q) p_i + O(\|p\|^2).$$

La restriction de X_H à T est alors le champ de vecteurs $\sum_{i=1}^{n} X_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i}$.

Tores invariants quasipériodiques

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Le tore lagrangien invariant T est α-quasipériodique si $X_{H\,|\,T}$ peut être transformé, par un changement de variables lisse h sur $\mathbb{T}^n$, en le champ de vecteurs constant $X_\alpha = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i}$.

Tores invariants quasipériodiques

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Le tore lagrangien invariant T est α-quasipériodique si $X_{H\,|\,T}$ peut être transformé, par un changement de variables lisse h sur $\mathbb{T}^n$, en le champ de vecteurs constant $X_\alpha = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i}$.

Après composition par le symplectomorphisme T^*h de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, on a

$$H = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i + O(\|p\|^2).$$

Le théorème suivant généralise un résultat vu auparavant pour le cercle.

Linéarisation des difféomorphismes de $\mathbb{T}^n$

Le théorème suivant généralise un résultat vu auparavant pour le cercle.

Théorème: Supposons que $\alpha \in \mathbb{T}^n$ soit diophantien ($\alpha \in DC$). Tout difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$ assez proche de R_α (dans la C^∞-topologie) s'écrit de façon unique sous la forme

$$f = R_t \circ h \circ R_\alpha \circ h^{-1},$$

Linéarisation des difféomorphismes de $\mathbb{T}^n$

Le théorème suivant généralise un résultat vu auparavant pour le cercle.

Théorème: Supposons que $\alpha \in \mathbb{T}^n$ soit diophantien ($\alpha \in DC$). Tout difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$ assez proche de R_α (dans la C^∞-topologie) s'écrit de façon unique sous la forme

$$f = R_t \circ h \circ R_\alpha \circ h^{-1},$$

où $t \in \mathbb{T}^n$ est voisin de 0 et $h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$ est proche de l'identité et vérifie $\int_{\mathbb{T}^n}(h(x) - x)\,dx = 0$.

Linéarisation des difféomorphismes de $\mathbb{T}^n$

Le théorème suivant généralise un résultat vu auparavant pour le cercle.

Théorème: Supposons que $\alpha \in \mathbb{T}^n$ soit diophantien ($\alpha \in DC$). Tout difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$ assez proche de R_α (dans la C^∞-topologie) s'écrit de façon unique sous la forme

$$f = R_t \circ h \circ R_\alpha \circ h^{-1},$$

où $t \in \mathbb{T}^n$ est voisin de 0 et $h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$ est proche de l'identité et vérifie $\int_{\mathbb{T}^n}(h(x) - x)\, dx = 0$.

Remarque: Un difféomorphisme de $\mathbb{T}^n$, $n \geqslant 2$, homotope à l'identité ne possède pas en général de nombre de rotation, mais seulement un *ensemble de rotation*.

Linéarisation des champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^n$

Voici la version à temps continu du résultat précédent.

Linéarisation des champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^n$

Voici la version à temps continu du résultat précédent.

Théorème: Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}^n$ appartienne à *HDC*.

Linéarisation des champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^n$

Voici la version à temps continu du résultat précédent.

Théorème: Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}^n$ appartienne à *HDC*. Tout champ de vecteurs X de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$, assez proche dans la C^∞-topologie du champ constant $X_\alpha := \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i}$, s'écrit de façon unique sous la forme

$$X = X_t + Th.X_\alpha,$$

Linéarisation des champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^n$

Voici la version à temps continu du résultat précédent.

Théorème: Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}^n$ appartienne à *HDC*. Tout champ de vecteurs X de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$, assez proche dans la C^∞-topologie du champ constant $X_\alpha := \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i}$, s'écrit de façon unique sous la forme

$$X = X_t + Th.X_\alpha,$$

où $t \in \mathbb{R}^n$ est voisin de 0 et $h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$ est proche de l'identité et vérifie $\int_{\mathbb{T}^n}(h(x) - x)\, dx = 0$.

Linéarisation des champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^n$

Voici la version à temps continu du résultat précédent.

Théorème: Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}^n$ appartienne à *HDC*. Tout champ de vecteurs X de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$, assez proche dans la C^∞-topologie du champ constant $X_\alpha := \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i}$, s'écrit de façon unique sous la forme

$$X = X_t + Th.X_\alpha,$$

où $t \in \mathbb{R}^n$ est voisin de 0 et $h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$ est proche de l'identité et vérifie $\int_{\mathbb{T}^n}(h(x) - x)\, dx = 0$.

Remarque: Soit E un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ transverse à $\mathbb{R}\alpha$.

Linéarisation des champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^n$

Voici la version à temps continu du résultat précédent.

Théorème: Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}^n$ appartienne à *HDC*. Tout champ de vecteurs X de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$, assez proche dans la C^∞-topologie du champ constant $X_\alpha := \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i}$, s'écrit de façon unique sous la forme

$$X = X_t + Th.X_\alpha,$$

où $t \in \mathbb{R}^n$ est voisin de 0 et $h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$ est proche de l'identité et vérifie $\int_{\mathbb{T}^n} (h(x) - x)\, dx = 0$.

Remarque: Soit E un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ transverse à $\mathbb{R}\alpha$. On peut aussi écrire de façon unique

$$X = X_t + Th.X_{s\alpha},$$

Linéarisation des champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^n$

Voici la version à temps continu du résultat précédent.

Théorème: Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}^n$ appartienne à *HDC*. Tout champ de vecteurs X de classe C^∞ sur $\mathbb{T}^n$, assez proche dans la C^∞-topologie du champ constant $X_\alpha := \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i}$, s'écrit de façon unique sous la forme

$$X = X_t + Th.X_\alpha,$$

où $t \in \mathbb{R}^n$ est voisin de 0 et $h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$ est proche de l'identité et vérifie $\int_{\mathbb{T}^n}(h(x) - x)\, dx = 0$.

Remarque: Soit E un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ transverse à $\mathbb{R}\alpha$. On peut aussi écrire de façon unique

$$X = X_t + Th.X_{s\alpha},$$

avec $t \in E$ voisin de 0, s voisin de 1 et $h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^n)$ proche de l'identité, normalisé comme ci-dessus.

Conditions diophantiennes homogènes

Pour $n \geqslant 2$, $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on définit

$$HDC(\gamma,\tau) := \{\alpha \in \mathbb{R}^n,\ |<k,\alpha>| \geqslant \gamma \|k\|_\infty^{1-n-\tau},\ \forall k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0\}.$$

Conditions diophantiennes homogènes

Pour $n \geqslant 2$, $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on définit

$$HDC(\gamma,\tau) := \{\alpha \in \mathbb{R}^n,\ |<k,\alpha>| \geqslant \gamma \|k\|_\infty^{1-n-\tau},\ \forall k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0\}.$$

On pose aussi

$$HDC(\tau) := \bigcup_{\gamma>0} HDC(\gamma,\tau), \qquad HDC := \bigcup_{\tau\geqslant 0} HDC(\tau).$$

Conditions diophantiennes homogènes

Pour $n \geqslant 2$, $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on définit

$$HDC(\gamma,\tau) := \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \ | < k, \alpha > | \geqslant \gamma \|k\|_\infty^{1-n-\tau}, \ \forall k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0\}.$$

On pose aussi

$$HDC(\tau) := \bigcup_{\gamma > 0} HDC(\gamma,\tau), \qquad HDC := \bigcup_{\tau \geqslant 0} HDC(\tau).$$

- $\alpha \in HDC(\gamma,\tau) \Longleftrightarrow t\alpha \in HDC(\gamma|t|,\tau), \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$.

Conditions diophantiennes homogènes

Pour $n \geqslant 2$, $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on définit

$$HDC(\gamma, \tau) := \{\alpha \in \mathbb{R}^n, \ | < k, \alpha > | \geqslant \gamma \|k\|_\infty^{1-n-\tau}, \ \forall k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0\}.$$

On pose aussi

$$HDC(\tau) := \bigcup_{\gamma > 0} HDC(\gamma, \tau), \qquad HDC := \bigcup_{\tau \geqslant 0} HDC(\tau).$$

- $\alpha \in HDC(\gamma, \tau) \iff t\alpha \in HDC(\gamma|t|, \tau), \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$.
- $\alpha \in DC(\gamma, \tau) \Longrightarrow (1, \alpha) \in HDC(\gamma, \tau)$.

Conditions diophantiennes homogènes

Pour $n \geqslant 2$, $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on définit

$$HDC(\gamma,\tau) := \{\alpha \in \mathbb{R}^n,\ |<k,\alpha>| \geqslant \gamma \|k\|_\infty^{1-n-\tau},\ \forall k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0\}.$$

On pose aussi

$$HDC(\tau) := \bigcup_{\gamma>0} HDC(\gamma,\tau), \qquad HDC := \bigcup_{\tau\geqslant 0} HDC(\tau).$$

- $\alpha \in HDC(\gamma,\tau) \iff t\alpha \in HDC(\gamma|t|,\tau), \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$.
- $\alpha \in DC(\gamma,\tau) \implies (1,\alpha) \in HDC(\gamma,\tau)$.
- $(\alpha_0,\alpha) \in HDC(\gamma,\tau) \implies \alpha_0^{-1}\alpha \in DC(c\gamma,\tau)$, où la constante c dépend de $n, \tau, \alpha_0, \|\alpha\|$.

L'équation différentielle associée à X_α

Soient $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Pour $\psi \in C^1(\mathbb{T}^n)$, la fonction continue ϕ définie sur $\mathbb{T}^n$ par

L'équation différentielle associée à X_α

Soient $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Pour $\psi \in C^1(\mathbb{T}^n)$, la fonction continue ϕ définie sur $\mathbb{T}^n$ par

$$\phi := X_\alpha.\psi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

L'équation différentielle associée à X_α

Soient $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Pour $\psi \in C^1(\mathbb{T}^n)$, la fonction continue ϕ définie sur $\mathbb{T}^n$ par

$$\phi := X_\alpha.\psi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

vérifie

$$\hat{\phi}(k) = 2\pi i < k, \alpha > \hat{\psi}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^n.$$

L'équation différentielle associée à X_α

Soient $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Pour $\psi \in C^1(\mathbb{T}^n)$, la fonction continue ϕ définie sur $\mathbb{T}^n$ par

$$\phi := X_\alpha.\psi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

vérifie

$$\hat{\phi}(k) = 2\pi i < k, \alpha > \hat{\psi}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Les conditions diophantiennes associées aux petits diviseurs $< k, \alpha >, k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0$ sont les conditions $HDC(\gamma, \tau)$.

L'équation différentielle associée à X_α

Soient $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Pour $\psi \in C^1(\mathbb{T}^n)$, la fonction continue ϕ définie sur $\mathbb{T}^n$ par

$$\phi := X_\alpha.\psi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

vérifie

$$\hat{\phi}(k) = 2\pi i < k, \alpha > \hat{\psi}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Les conditions diophantiennes associées aux petits diviseurs $< k, \alpha >, k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0$ sont les conditions $HDC(\gamma, \tau)$.

Théorème: Soient $\gamma > 0$, $\tau \geqslant 0, r > n - 1 + \tau$. On suppose que $s := r - n - \tau + 1$ n'est pas entier et que $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$.

L'équation différentielle associée à X_α

Soient $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Pour $\psi \in C^1(\mathbb{T}^n)$, la fonction continue ϕ définie sur $\mathbb{T}^n$ par

$$\phi := X_\alpha.\psi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

vérifie

$$\hat{\phi}(k) = 2\pi i < k, \alpha > \hat{\psi}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Les conditions diophantiennes associées aux petits diviseurs $< k, \alpha >, k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0$ sont les conditions $HDC(\gamma, \tau)$.

Théorème: Soient $\gamma > 0$, $\tau \geqslant 0, r > n - 1 + \tau$. On suppose que $s := r - n - \tau + 1$ n'est pas entier et que $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$. Pour tout $\phi \in C_0^r(\mathbb{T}^n)$, l'équation $X_\alpha.\psi = \phi$ possède une unique solution $\psi \in C_0^s(\mathbb{T}^n)$,

L'équation différentielle associée à X_α

Soient $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Pour $\psi \in C^1(\mathbb{T}^n)$, la fonction continue ϕ définie sur $\mathbb{T}^n$ par

$$\phi := X_\alpha.\psi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

vérifie

$$\hat{\phi}(k) = 2\pi i < k, \alpha > \hat{\psi}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Les conditions diophantiennes associées aux petits diviseurs $< k, \alpha >, k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0$ sont les conditions $HDC(\gamma, \tau)$.

Théorème: Soient $\gamma > 0$, $\tau \geqslant 0, r > n - 1 + \tau$. On suppose que $s := r - n - \tau + 1$ n'est pas entier et que $\alpha \in HDC(\gamma, \tau)$. Pour tout $\phi \in C_0^r(\mathbb{T}^n)$, l'équation $X_\alpha.\psi = \phi$ possède une unique solution $\psi \in C_0^s(\mathbb{T}^n)$, et on a

$$\|\psi\|_{C^s} \leqslant C\gamma^{-1}\|\phi\|_{C^r},$$

avec une constante $C = C(n, r, \tau)$.

Torsion d'un tore quasipériodique lagrangien

Soit T un tore lagrangien α-quasipériodique, invariant par le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H.

Torsion d'un tore quasipériodique lagrangien

Soit T un tore lagrangien α-quasipériodique, invariant par le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H.

Après changement symplectique de coordonnées, on se ramène au cas où T est la section nulle de $T^*\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ et le Hamiltonien H s'écrit

Torsion d'un tore quasipériodique lagrangien

Soit T un tore lagrangien α-quasipériodique, invariant par le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H.

Après changement symplectique de coordonnées, on se ramène au cas où T est la section nulle de $T^*\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ et le Hamiltonien H s'écrit

$$H(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{i,j} b_{ij}(q) p_i p_j + O(\|p\|^3),$$

avec $b_{ij}(q) \equiv b_{ji}(q)$.

Torsion d'un tore quasipériodique lagrangien

Soit T un tore lagrangien α-quasipériodique, invariant par le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H.

Après changement symplectique de coordonnées, on se ramène au cas où T est la section nulle de $T^*\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ et le Hamiltonien H s'écrit

$$H(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{i,j} b_{ij}(q) p_i p_j + O(\|p\|^3),$$

avec $b_{ij}(q) \equiv b_{ji}(q)$.

La torsion de T est la matrice symétrique $B_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} b_{ij}(q)\, dq$.

Torsion d'un tore quasipériodique lagrangien

Soit T un tore lagrangien α-quasipériodique, invariant par le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H.

Après changement symplectique de coordonnées, on se ramène au cas où T est la section nulle de $T^*\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ et le Hamiltonien H s'écrit

$$H(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{i,j} b_{ij}(q) p_i p_j + O(\|p\|^3),$$

avec $b_{ij}(q) \equiv b_{ji}(q)$.

La torsion de T est la matrice symétrique $B_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} b_{ij}(q)\, dq$.

Par exemple, si $H = H(p)$ est complètement intégrable, la torsion du tore $\{p = p_*\}$ est la matrice hessienne $\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(p_*)$ de H en p_*.

Forme normale de Birkhoff

Soit T un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H.

Forme normale de Birkhoff

Soit T un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H.

Proposition: (Birkhoff) Supposons que α soit *diophantien* ($\alpha \in HDC$).

Forme normale de Birkhoff

Soit T un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H.

Proposition: (Birkhoff) Supposons que α soit *diophantien* ($\alpha \in HDC$). Pour tout $N \geqslant 2$, il existe un changement symplectique de coordonnées au voisinage de T qui transforme T en $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ et H en

$$H(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{2 \leqslant |J| \leqslant N} B_J p^J + O(\|p\|^{N+1}).$$

Forme normale de Birkhoff

Soit T un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H.

Proposition: (Birkhoff) Supposons que α soit *diophantien* ($\alpha \in HDC$). Pour tout $N \geqslant 2$, il existe un changement symplectique de coordonnées au voisinage de T qui transforme T en $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ et H en

$$H(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{2 \leqslant |J| \leqslant N} B_J p^J + O(\|p\|^{N+1}).$$

La partie homogène de degré 2 est donnée par la torsion.

Forme normale de Birkhoff

Soit T un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H.

Proposition: (Birkhoff) Supposons que α soit *diophantien* ($\alpha \in HDC$). Pour tout $N \geqslant 2$, il existe un changement symplectique de coordonnées au voisinage de T qui transforme T en $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ et H en

$$H(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{2 \leqslant |J| \leqslant N} B_J p^J + O(\|p\|^{N+1}).$$

La partie homogène de degré 2 est donnée par la torsion.

Le Hamiltonien H est donc, au voisinage d'un tore invariant lagrangien diophantien, approché à un ordre arbitrairement grand par un Hamiltonien complètement intégrable.

Indication de preuve($N = 2$)

On part de

$$H(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{j,k} b_{jk}(q) p_j p_k + O(\|p\|^3).$$

Indication de preuve($N = 2$)

On part de

$$H(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{j,k} b_{jk}(q) p_j p_k + O(\|p\|^3).$$

Le changement de coordonnées associé au temps un du flot du Hamiltonien quadratique $C(q,p) = \sum_{j,k} c_{jk}(q) p_j p_k$ vérifie

Indication de preuve($N = 2$)

On part de

$$H(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{j,k} b_{jk}(q) p_j p_k + O(\|p\|^3).$$

Le changement de coordonnées associé au temps un du flot du Hamiltonien quadratique $C(q,p) = \sum_{j,k} c_{jk}(q) p_j p_k$ vérifie

$$q_i = q'_i - 2\sum_j c_{ij}(q') p'_j + O(\|p'\|^2),$$

$$p_i = p'_i + \sum_{j,k} \frac{\partial c_{jk}}{\partial q_i}(q') p'_j p'_k + O(\|p'\|^3).$$

Indication de preuve($N = 2$)

On part de

$$H(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{j,k} b_{jk}(q) p_j p_k + O(\|p\|^3).$$

Le changement de coordonnées associé au temps un du flot du Hamiltonien quadratique $C(q,p) = \sum_{j,k} c_{jk}(q) p_j p_k$ vérifie

$$q_i = q_i' - 2\sum_j c_{ij}(q') p_j' + O(\|p'\|^2),$$

$$p_i = p_i' + \sum_{j,k} \frac{\partial c_{jk}}{\partial q_i}(q') p_j' p_k' + O(\|p'\|^3).$$

Dans les coordonnées (q', p'), on a donc

$$H(q', p') = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i' + \sum_{j,k} b_{jk}'(q') p_j' p_k' + O(\|p'\|^3),$$

$$b'_{jk}(q) = b_{jk}(q) + \sum_i \alpha_i \frac{\partial c_{jk}}{\partial q_i}(q).$$

$$b'_{jk}(q) = b_{jk}(q) + \sum_i \alpha_i \frac{\partial c_{jk}}{\partial q_i}(q).$$

En prenant $b'_{jk}(q) \equiv B_{jk}$, on obtient la version en temps continu de l'équation aux différences. On écrit

$$b'_{jk}(q) = b_{jk}(q) + \sum_i \alpha_i \frac{\partial c_{jk}}{\partial q_i}(q).$$

En prenant $b'_{jk}(q) \equiv B_{jk}$, on obtient la version en temps continu de l'équation aux différences. On écrit

$$b_{jk}(q) - B_{jk} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n, \ell \neq 0} \hat{b}_{jk}(\ell) \exp 2\pi i < \ell, q >,$$

$$b'_{jk}(q) = b_{jk}(q) + \sum_i \alpha_i \frac{\partial c_{jk}}{\partial q_i}(q).$$

En prenant $b'_{jk}(q) \equiv B_{jk}$, on obtient la version en temps continu de l'équation aux différences. On écrit

$$b_{jk}(q) - B_{jk} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n, \ell \neq 0} \hat{b}_{jk}(\ell) \exp 2\pi i < \ell, q >,$$

ce qui donne

$$c_{jk}(q) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n, \ell \neq 0} \hat{c}_{jk}(\ell) \exp 2\pi i < \ell, q >,$$

$$b'_{jk}(q) = b_{jk}(q) + \sum_i \alpha_i \frac{\partial c_{jk}}{\partial q_i}(q).$$

En prenant $b'_{jk}(q) \equiv B_{jk}$, on obtient la version en temps continu de l'équation aux différences. On écrit

$$b_{jk}(q) - B_{jk} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n, \ell \neq 0} \hat{b}_{jk}(\ell) \exp 2\pi i < \ell, q >,$$

ce qui donne

$$c_{jk}(q) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n, \ell \neq 0} \hat{c}_{jk}(\ell) \exp 2\pi i < \ell, q >,$$

avec

$$\hat{c}_{jk}(\ell) = -\frac{1}{2\pi i \ < \ell, \alpha >} \hat{b}_{jk}(\ell).$$

$$b'_{jk}(q) = b_{jk}(q) + \sum_i \alpha_i \frac{\partial c_{jk}}{\partial q_i}(q).$$

En prenant $b'_{jk}(q) \equiv B_{jk}$, on obtient la version en temps continu de l'équation aux différences. On écrit

$$b_{jk}(q) - B_{jk} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n, \ell \neq 0} \hat{b}_{jk}(\ell) \exp 2\pi i < \ell, q >,$$

ce qui donne

$$c_{jk}(q) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n, \ell \neq 0} \hat{c}_{jk}(\ell) \exp 2\pi i < \ell, q >,$$

avec

$$\hat{c}_{jk}(\ell) = -\frac{1}{2\pi i \ < \ell, \alpha >} \hat{b}_{jk}(\ell).$$

La série de Fourier converge vers une fonction de classe C^∞ car α appartient à *HDC*. $\square$

Le théorème KAM

Théorème: (Kolmogorov 1954, Arnold 1963, Moser 1962)

Le théorème KAM

Théorème: (Kolmogorov 1954, Arnold 1963, Moser 1962)
Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

Le théorème KAM

Théorème: (Kolmogorov 1954, Arnold 1963, Moser 1962)
Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée.

Le théorème KAM

Théorème: (Kolmogorov 1954, Arnold 1963, Moser 1962)
Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée.

Alors, pour tout Hamiltonien H C^∞-proche de H_0, il existe au voisinage de T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique T de classe C^∞, invariant par le flot de H.

Le théorème KAM à énergie fixée

Dans la variante qui suit du théorème KAM, on fixe le niveau d'énergie contenant le tore quasipériodique.

Le théorème KAM à énergie fixée

Dans la variante qui suit du théorème KAM, on fixe le niveau d'énergie contenant le tore quasipériodique.

La torsion est non-dégénérée à énergie fixée si la restriction à l'hyperplan $\{\sum \alpha_i p_i = 0\}$ de $\mathbb{R}^n$ de la forme quadratique représentée par la matrice B_{ij} est non-dégénérée.

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞, contenu dans le niveau $\{H_0 = H_*\}$ de H_0.

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞, contenu dans le niveau $\{H_0 = H_*\}$ de H_0.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée à énergie fixée.

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞, contenu dans le niveau $\{H_0 = H_*\}$ de H_0.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée à énergie fixée.

Alors, pour tout Hamiltonien H C^∞-proche de H_0, il existe t voisin de 1 et un tore lagrangien $t\alpha$-quasipériodique T de classe C^∞, voisin de T_0, invariant par le flot de H et contenu dans le niveau $\{H = H_*\}$ de H.

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞, contenu dans le niveau $\{H_0 = H_*\}$ de H_0.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée à énergie fixée.

Alors, pour tout Hamiltonien H C^∞-proche de H_0, il existe t voisin de 1 et un tore lagrangien $t\alpha$-quasipériodique T de classe C^∞, voisin de T_0, invariant par le flot de H et contenu dans le niveau $\{H = H_*\}$ de H.

Remarque: Ce résultat permet, sous l'hypothèse de non-dégénérescence, d'obtenir une famille à un paramètre de tores invariants:

Théorème: Soit T_0 un tore lagrangien α-quasipériodique de classe C^∞, invariant par le flot d'un Hamiltonien H_0 de classe C^∞, contenu dans le niveau $\{H_0 = H_*\}$ de H_0.

On suppose que α est diophantien ($\alpha \in HDC$) et que la torsion de T_0 est non dégénérée à énergie fixée.

Alors, pour tout Hamiltonien H C^∞-proche de H_0, il existe t voisin de 1 et un tore lagrangien $t\alpha$-quasipériodique T de classe C^∞, voisin de T_0, invariant par le flot de H et contenu dans le niveau $\{H = H_*\}$ de H.

Remarque: Ce résultat permet, sous l'hypothèse de non-dégénérescence, d'obtenir une famille à un paramètre de tores invariants: on applique le théorème à $H_{(s)} := H - s$.