Équations différentielles et systèmes dynamiques

Jean-Christophe YOCCOZ, membre de l'institut
(Académie des sciences), professeur

ENSEIGNEMENT

Cours : Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques quasipériodiques [a]

0. Un système dynamique, c'est un *espace des phases*, dont les points correspondent aux états possibles du système considéré, muni d'une *loi d'évolution* qui décrit la variation à court terme de l'état du système. Le but de la théorie est de comprendre l'évolution à long terme du système.

Pour certains systèmes dynamiques, le temps est une variable *continue* : la loi d'évolution est alors le plus souvent donnée par une équation différentielle (ou une équation aux dérivées partielles si l'espace des phases est un espace fonctionnel). Pour d'autres systèmes dynamiques, le temps est une variable *discrète* : la loi d'évolution est dans ce cas spécifiée par une transformation de l'espace des phases dans lui-même dont il s'agit d'étudier les itérations successives.

Deux systèmes à temps discret très simples, qui admettent tous deux pour espace de phases le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, sont des modèles paradigmatiques pour des classes de comportements dynamiques très différents.

Dans le premier exemple, la loi d'évolution, dépendant d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{T}$ est spécifiée par la rotation $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ du cercle. C'est le prototype de dynamique *quasipériodique*. La distance entre deux orbites reste constante au cours du temps.

Dans le deuxième exemple, la transformation qui définit la loi d'évolution est le doublement d'angles $T : x \mapsto 2x$. C'est le prototype de dynamique *hyperbolique*. La distance entre deux orbites initialement proches est doublée à chaque itération (tant qu'elle reste inférieure au diamètre du cercle). Ce phénomène de *sensibilité aux conditions initiales* est quelquefois aussi qualifié d'*effet papillon*.

---

a. Les cours sont disponibles en vidéo sur le site Internet du Collège de France : http://www.college-de-france.fr/site/jean-christophe-yoccoz/course-2013-2014.htm [NdÉ].

Le cours cette année était consacré aux systèmes dynamiques quasipériodiques. On s'attachera dans le cours de l'année prochaine à certains aspects de la théorie hyperbolique.

Le cours était divisé en quatre parties :

• on a d'abord analysé des systèmes qui sont les modèles de dynamique quasipériodique : les translations et les flots linéaires sur les tores ;

• une deuxième partie a été consacrée à la dynamique des germes de difféomorphismes holomorphes d'une variable complexe au voisinage d'un point fixe ;

• on s'est ensuite intéressé à la dynamique des difféomorphismes du cercle ;

• dans la partie la plus importante du cours, on a présenté quelques résultats centraux de la théorie KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) portant sur l'existence de tores invariants quasipériodiques pour les systèmes dynamiques hamiltoniens (le cadre naturel pour les équations de la mécanique).

1. Notons $\mathbb{T}^d$ le tore de dimension d. Pour $\alpha \in \mathbb{T}^d$ (ou $\mathbb{R}^d$), notons R_α la translation $x \mapsto x + \alpha$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^d$ le groupe à un paramètre $(R_{t\alpha})_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot du champ de vecteurs constant $X_\alpha := \sum_i \alpha_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

On a commencé par rappeler comment déterminer l'adhérence d'une orbite de la rotation R_α. Par homogénéité, il suffit de considérer l'adhérence $G(\alpha)$ de l'orbite de 0. C'est un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}^d$ dont on note $G_0(\alpha)$ la composante neutre. Le quotient $G(\alpha)/G_0(\alpha)$ est cyclique fini. Le sous-groupe fermé connexe $G_0(\alpha)$ est déterminé par son espace tangent à l'origine $V(G_0(\alpha))$. Celui-ci est le sous-espace rationnel de $\mathbb{R}^d$ annulateur de $V^*(\alpha) := \{k \in \mathbb{Q}^d | \sum_i k_i\alpha_i \in \mathbb{Q}\}$. En particulier, la rotation R_α est minimale si et seulement si les nombres 1, α_1, ..., α_d sont rationnellement indépendants.

L'adhérence de l'orbite de 0 pour le flot du champ constant X_α est un sous-groupe fermé connexe $\Gamma(\alpha)$ de $\mathbb{T}^d$. Son espace tangent en 0 est l'annulateur de $V^{\star\star}(\alpha) := \{k \in \mathbb{Q}^d | \sum_i k_i\alpha_i = 0\}$. Le flot de X_α est minimal si et seulement si α_1, ..., α_d sont rationnellement indépendants.

Les translations minimales de $\mathbb{T}^d$ sont uniquement ergodiques. Toute orbite d'une telle translation est donc équidistribuée sur le tore suivant la mesure de Lebesgue. C'est aussi le cas pour les flots associés à des champs constants minimaux.

Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$. L'*équation aux différences* associée à la translation R_α est

$$(*) \qquad \psi \circ R_\alpha - \psi = \phi$$

et joue un rôle central dans toute la théorie. Il s'agit de comprendre la relation entre la régularité de la donnée ϕ, celle de la solution recherchée ψ et les propriétés arithmétiques de α. Pour que l'équation admette une solution, il est nécessaire que ϕ soit de moyenne nulle. Si d'autre part l'équation admet une solution, alors elle en admet une qui soit de moyenne nulle.

Lorsque la translation R_α n'est pas minimale, l'équation ne possède en général pas de solution même au niveau des séries de Fourier formelles. Lorsque la translation R_α est minimale, l'équation possède une unique solution formelle de moyenne nulle. La convergence et la régularité de la somme de cette solution dépendent des propriétés diophantiennes de α. Pour $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, on note $DC(\gamma, \tau)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{T}^d$ qui vérifient

$$\| < k, \alpha > \|_{\mathbb{T}} \geqslant \gamma \|k\|_{\infty}^{-d-\tau}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^d,\ k \neq 0.$$

Dans la formule précédente, $\|x\|_{\mathbb{T}}$ désigne la distance du nombre réel x au plus proche entier. On pose aussi $DC(\tau) := \cup_{\gamma>0} DC(\gamma,\tau)$, $DC := \cup_{\tau \geq 0} DC(\tau)$. L'ensemble $DC(0)$ est de mesure de Lebesgue nulle, mais $DC(\tau)$ est de mesure pleine dès que $\tau > 0$. Lorsque $d = 1$, l'appartenance à $DC(\tau)$ est facilement caractérisée en termes du développement en fraction continue de α : en notant (q_n) la suite des dénominateurs des réduites de α, le nombre α appartient à $DC(\tau)$ si et seulement si il existe $C > 0$ tel qu'on ait $q_{n+1} \leqslant C q_n^{1+\tau}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Le résultat principal, en différentiabilité finie, sur l'équation aux différences est le suivant. Soient $r > d$, $\tau \geqslant 0$ des nombres tels que $s := r - d - \tau$ soit positif et ne soit pas entier. Soit $\gamma > 0$ et $\alpha \in DC(\gamma, \tau)$. Pour toute fonction ϕ de classe C^r et de moyenne nulle sur $\mathbb{T}^d$, la solution formelle ψ de moyenne nulle de $(\star)$ est une fonction de classe C^s sur $\mathbb{T}^d$, qui vérifie

$$\|\psi\|_{C^s} \leqslant C \gamma^{-1} \|\phi\|_{C^r},$$

où la constante C ne dépend que de r et τ.

2. On s'est ensuite intéressé à la dynamique d'un germe de difféomorphisme holomorphe $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ au voisinage du point fixe 0. Le cas du domaine de Poincaré $|\lambda| \neq 1$ est élémentaire : si par exemple $|\lambda| < 1$, le point fixe est attractif et le germe F est analytiquement linéarisable.

Lorsque $|\lambda| = 1$ (domaine de Siegel), on dit que le point fixe 0 est indifférent et on distingue deux cas, rationnel ou irrationnel, suivant que λ est ou non une racine de l'unité.

On a discuté brièvement le cas rationnel. Notons q l'ordre (exact) du multiplicateur λ. Le germe F est analytiquement linéarisable si et seulement si il est lui aussi d'ordre q. Dans le cas contraire, il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que F s'écrive, après un changement de coordonnée approprié, $F(w) = \lambda w(1 + w^{rq} + O(w^{rq+1}))$. Les régions $\{\Re(z^{-rq}) < -A\}$, $A \gg 1$ sont envoyées dans elles-mêmes par F et sont appelées pétales attractifs. Les régions $\{\Re(z^{-rq}) > -A\}$, $A \gg 1$, sont appelées pétales répulsifs. On a ensuite expliqué la classification analytique de tels germes suivant Écalle-Voronin.

Le point fixe indifférent d'un germe F est *topologiquement stable (en temps positif)* si, pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 tel que, pour tout $n \geqslant 0$, le germe itéré F^n soit défini sur V et vérifie $F^n(V) \subset U$. Il s'avère que cette propriété est équivalente à la linéarisabilité analytique du germe F.

On a ensuite plus longuement discuté le cas indifférent irrationnel. Après avoir introduit les différentes formulations de la condition de Brjuno, on a présenté le théorème de Siegel-Brjuno et sa réciproque. Soit α un nombre réel irrationnel, et soit $\lambda := \exp(2\pi i \alpha)$. Si α est un nombre de Brjuno, tout germe $F(z) = \lambda z + O(z^2)$ est analytiquement linéarisable. Inversement, si α n'est pas un nombre de Brjuno, le polynôme quadratique $P_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ n'est pas analytiquement linéarisable.

Quand un germe est analytiquement linéarisable, on appelle disque de Siegel le plus grand domaine sur lequel sa dynamique soit conjuguée à une rotation. Le *rayon conforme* de ce disque est une mesure de sa taille. Buff et Chéritat ont montré que, lorsque α est un nombre de Brjuno, le rayon conforme du disque de Siegel du polynôme quadratique $P_\lambda(z)$ est, à une constante multiplicative universelle près, plus petit que celui de n'importe quel germe (normalisé par exemple par une condition d'univalence sur le disque unité).

Pour $\alpha \in (0,1)$, on note $G(\alpha) := \{\alpha^{-1}\}$ la transformation de Gauss qui engendre le développement en fraction continue. On pose $\alpha_n := G^n(\alpha)$ et $\beta_n = \prod_0^n \alpha_n$. Lorsque α est irrationnel, on définit

$$\Phi(\alpha) := \sum_{n\geq 0} \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} \in (0, +\infty]\,.$$

On convient que $\Phi(\alpha) = +\infty$ lorsque α est rationnel. La *fonction de Brjuno* $\Phi(\alpha)$ est finie si et seulement si α est un nombre de Brjuno. C'est une fonction $\mathbb{Z}$-périodique qui appartient à l'espace BMO($\mathbb{T}$). Plus précisément, la transformée de Hilbert de Φ est une fonction bornée.

La fonction Φ est définie de façon purement arithmétique. Il est intéressant de la comparer à une autre fonction remarquable, définie de façon purement analytique. Considérons le polynôme quadratique P_λ dans le cas attractif $|\lambda| < 1$. Notons $h_\lambda(z) = z + O(z^2)$ l'application linéarisante vérifiant $h_\lambda(\lambda z) = P_\lambda \circ h_\lambda(z)$. La fonction holomorphe h_λ possède sur son cercle de convergence un unique point singulier $\tilde{U}(\lambda)$, dont l'image est le point critique de P_λ.

La fonction $\lambda \mapsto U(\lambda) := \lambda^{-1}\, \tilde{U}(\lambda)$ est holomorphe et bornée dans le disque $\{|\lambda| < 1\}$ et ne s'y annule pas. Son module a une limite radiale en tout point $\lambda^* = \exp 2\pi i\alpha$ du bord. Cette limite est non nulle si et seulement si α est un nombre de Brjuno, et elle est alors égale au rayon de convergence de l'application h_{λ^*} linéarisant P_{λ^*}.

Buff et Chéritat ont montré que la fonction $\alpha \mapsto \Phi(\alpha) + \log|U(\lambda^*)|$ se prolonge en une fonction continue sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Il est conjecturé que la fonction obtenue est hölderienne d'exposant 1/2. Cela impliquerait que l'argument de U est borné. Des expériences numériques suggèrent que la partie réelle de U est en fait positive dans le disque $\{|\lambda| < 1\}$. On ignore en quels points $\lambda^* = \exp 2\pi i\alpha$ du cercle unité l'argument de U a une limite radiale. Une conjecture naturelle, lorsque α est un nombre de Brjuno, est que cette limite existe si et seulement si le point critique de P_{λ^*} se trouve sur le bord du disque de Siegel. Deux résultats de Herman sont pertinents à cet égard. D'une part, il construit des nombres de Brjuno pour lesquels le point critique de P_{λ^*} n'appartient pas au bord du disque de Siegel. D'autre part, il montre que le point critique de P_{λ^*} appartient au bord du disque de Siegel lorsque le nombre de rotation α vérifie la condition arithmétique $\mathcal{H}$ évoquée ci-dessous.

3. On a ensuite présenté les grandes lignes de l'étude dynamique des difféomorphismes du cercle. Après avoir défini le nombre de rotation et expliqué la relation avec la présence d'orbites périodiques, on a décrit les résultats classiques de Denjoy reliant la régularité d'un difféomorphisme sans orbite périodique et l'existence d'intervalles errants.

Les théorèmes de conjugaison différentiable établissent une corrélation entre la régularité d'un difféomorphisme du cercle (sans orbite périodique), les propriétés diophantiennes de son nombre de rotation et la régularité de l'application linéarisante dont l'existence est garantie par le théorème de Denjoy. Certains énoncés exigent de plus que le difféomorphisme appartienne à un voisinage approprié de la rotation correspondante. On a illustré la variété des méthodes disponibles par deux résultats.

Une méthode perturbative d'analyse fonctionnelle est mise en œuvre dans la démonstration, suivant Herman, du résultat suivant. Soient $\tau \in [0,1)$, $\alpha \in DC(\tau)$, et soit r un entier au moins égal à 3. Tout difféomorphisme f appartenant à un voisinage approprié de la rotation R_α dans la C^{r+3}-topologie s'écrit de façon essentiellement unique sous la forme

$$(\star) \qquad f = R_t \circ h \circ R_\alpha \circ h^{-1},$$

où t est voisin de 0 et h est un difféomorphisme de classe C^r voisin de l'identité.

L'introduction de la dérivée schwarzienne $Sf := D^2 \log DF - \frac{1}{2}(D \log Df)^2$ est l'outil décisif qui permet de résoudre $(\star)$. Cette équation se transforme en effet en

$$(\star\star) \qquad Sh \circ R_\alpha - Sh = Sf \circ h(Dh)^2.$$

Les propriétés de l'équation aux différences (avec $\tau < 1$) permettent alors d'appliquer le théorème du point fixe pour résoudre $(\star\star)$ et donc démontrer le résultat annoncé.

On a ensuite présenté la méthode de renormalisation, dans le contexte du problème de linéarisation analytique des difféomorphismes analytiques du cercle. Étant donné un difféomorphisme du cercle sans orbite périodique f, on note (q_n) la suite des dénominateurs des réduites du nombre de rotation α de f, et on considère les applications de premier retour de f sur des intervalles I_{n-1} d'extrémités $x_0, f^{q_{n-1}}(x_0)$. On recolle les extrémités de I_{n-1} suivant $f^{q_{n-1}}$ pour obtenir une variété lisse difféomorphe au cercle. L'application de premier retour coïncide alors avec l'itéré f^{q_n} de f. Ceci permet de contrôler des morceaux de trajectoires de plus en plus longs.

Soit f un difféomorphisme analytique du cercle, holomorphe et injectif dans la bande $B_R := \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z},\ |\Im z| < R\}$. Pour que f soit analytiquement conjugué à une rotation, il suffit qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, f^n soit défini dans la bande B_r et vérifie $f^n(B_r) \subset B_R$.

Un premier résultat obtenu par la méthode de renormalisation est le suivant. Il existe une constante universelle r_0 telle que, pour tout nombre de Brjuno α, pour tout $R > \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) + r_0$, un difféomorphisme analytique de nombre de rotation α qui est holomorphe et injectif dans B_R est analytiquement conjugué à R_α.

La preuve de ce résultat repose sur l'observation suivante. Posons $R^* := R - \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} - r_1$, où r_1 est une constante universelle appropriée. Considérons le quadrilatère curviligne U dont le bord est formé des segments $[-iR^*, iR^*]$, $[iR^*, f(iR^*)]$, $[-iR^*, f(-iR^*)]$, et de la courbe $f([-iR^*, iR^*])$. En recollant les bords verticaux de U par f, on obtient un domaine annulaire qu'on uniformise par une bande $B_{R'}$. L'application de premier retour de F dans $U \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ se traduit en une application holomorphe et injective F_1 dans une bande $B_{R_1} \subset B_{R'}$, à valeurs dans $B_{R'}$. On peut montrer qu'il existe une constante universelle r_2 telle que

$$R_1 \geqslant \alpha^{-1}\,(R - \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) + r_2).$$

En itérant cette procédure, on obtient le résultat annoncé par un argument de descente infinie.

Une deuxième forme du théorème local de conjugaison, qui se déduit aisément de la précédente, s'énonce comme suit. Soit α un nombre de Brjuno, et soit $r > 0$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon\,(\alpha, r)$ tel que tout difféomorphisme analytique f qui a pour nombre de rotation α et satisfait $|f(z) - z - \alpha| < \varepsilon$ dans la bande B_r est analytiquement conjugué à R_α.

Lorsque α n'est pas un nombre de Brjuno, on peut au contraire construire une suite de difféomorphismes analytiques f_n de nombre de rotation α qui ne sont pas analytiquement conjugués à R_α et qui converge vers R_α dans le sens suivant : il existe une suite r_n tendant vers $+\infty$, une suite ε_n tendant vers 0 telles qu'on ait $|f_n(z) - z - \alpha| < \varepsilon_n$ dans B_{r_n}.

L'analyse du processus de renormalisation, pour des difféomorphismes analytiques qui ne sont pas supposés être voisins de rotations, conduit à une nouvelle condition arithmétique. Soit α un nombre de Brjuno. On pose $\alpha_n := G^n(\alpha)$. Soit f un difféomorphisme analytique du cercle de nombre de rotation α. On peut montrer que la suite f_n de difféomorphismes analytiques déduite de f par le processus de renormalisation possède les propriétés suivantes :

- le difféomorphisme f_n est holomorphe et injectif dans une bande B_{r_n} ;
- le nombre de rotation de f_n est α_n ;
- la suite (r_n) tend vers $+\infty$;
- dans le cas, considéré ci-dessus, où on a $r_n - \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} \gg 1$, on aura

$$r_{n+1} \geqslant \alpha_n^{-1}\,(r_n - \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} - c)\,;$$

- lorsqu'on a au contraire $1 \ll r_n \leqslant \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} + c'$, on obtient

$$r_{n+1} \geqslant c^* \exp 2\pi r_n.$$

Les inégalités précédentes expliquent la définition suivante. Pour $\alpha \in (0,\, 1)$, $r > 0$, on pose

$$\mathcal{R}_\alpha(r) := \begin{cases} \alpha^{-1}(r - \log \alpha^{-1} + 1) & \text{pour } r \geqslant \log \alpha^{-1} \\ \exp r & \text{pour } r \leqslant \log \alpha^{-1} \end{cases}$$

On définit ensuite $R_n(\alpha)$ par $R_0(\alpha) = 0$ et $R_{n+1}(\alpha) := \mathcal{R}_{\alpha_n}\,(R_n(\alpha))$. On dit qu'un nombre de Brjuno α vérifie la condition $\mathcal{H}$ si, pour tout $m \geqslant 0$, il existe $k \geqslant 0$ tel que $R_k(\alpha_m) \geqslant \Phi\,(\alpha_{m+k})$.

Le théorème global de conjugaison analytique prend alors la forme suivante : tout difféomorphisme analytique dont le nombre de rotation α vérifie la condition $\mathcal{H}$ est analytiquement conjugué à R_α. Inversement, si α ne vérifie pas la condition $\mathcal{H}$, il existe des difféomorphismes analytiques de nombre de rotation α qui ne sont pas analytiquement conjugués à R_α.

L'ensemble des nombres α vérifiant la condition $\mathcal{H}$ contient strictement DC, et est strictement contenu dans l'ensemble des nombres de Brjuno.

4. La dernière partie du cours était consacrée aux tores invariants lagrangiens de la dynamique hamiltonienne.

On a commencé par rappeler les concepts à la base de la géométrie symplectique : variétés symplectiques, symplectomorphismes, sous-variétés isotropes et lagrangiennes, théorèmes de Darboux et de Weinstein, champs de vecteurs hamiltoniens, variables action-angles et complète intégrabilité...

Du point de vue dynamique, il est naturel de porter un intérêt particulier aux *tores lagrangiens quasipériodiques* invariants par un champ de vecteurs hamiltonien X_H. On appelle ainsi un tore lagrangien X_H-invariant sur lequel X_H induise, dans des coordonnées appropriées, un champ de vecteur constant. On dira que le tore est α-quasipériodique si le champ induit est $X_\alpha := \sum_i \alpha_i \dfrac{\partial}{\partial q_i}$.

À un champ de vecteurs constant $X_\alpha := \sum_i \alpha_i \dfrac{\partial}{\partial q_i}$ sur le tore $\mathbb{T}^n$, on associe l'équation linéaire

$$X_\alpha \cdot \psi := \sum_i \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} = \phi.$$

C'est le pendant en temps continu de l'équation aux différences considérée plus haut. La famille pertinente de conditions diophantiennes, paramétrée par $\gamma > 0$, $\tau \geqslant 0$, est maintenant

$$H\,DC(\gamma,\tau) := \{\alpha \in \mathbb{R}^n,\ |<k,\alpha>| \geqslant \gamma \|k\|_\infty^{1-n-\tau},\ \forall k \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0\}.$$

On pose aussi $HDC(\tau) = \cup_{\gamma>0} HDC(\gamma, \tau)$, $HDC = \cup_{\tau \geqslant 0} HDC(\tau)$. Un premier résultat où apparaît l'importance de cette condition arithmétique est le suivant. Si α appartient à HDC, tout champ de vecteurs assez proche, dans la C^∞-topologie, du champ constant X_α s'écrit, de façon essentiellement unique, sous la forme $X = X_t + h^* X_\alpha$, avec $t \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0 et un difféomorphisme h de $\mathbb{T}^n$ voisin de l'identité.

Soit T un tore lagrangien α-quasipériodique invariant par un champ de vecteurs hamiltonien X_H. Un symplectomorphisme approprié permet de se ramener au cas où la variété ambiante est le fibré cotangent $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, muni de la forme symplectique standard, T est la section nulle $\mathbb{T}^n \times \{0\}$, et H a pour développement limité le long de T

$$H(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{i,j} b_{ij}(q) p_i p_j + O\big(\|p\|\big)^3.$$

La *torsion* de T est la matrice symétrique $B_{ij} := \int_{\mathbb{T}^n} b_{ij}(q)\, dq$. Lorsque α est diophantien, on peut, pour tout $N > 0$, choisir le symplectomorphisme de façon que H se présente sous *forme normale de Birkhoff*

$$H(q,p) = c_0 + \sum_i \alpha_i p_i + \sum_{2 \leqslant |J| \leqslant N} B_J p^J + O(\|p\|^{N+1}).$$

Au voisinage de T, le hamiltonien H se présente ainsi comme perturbation d'un hamiltonien complètement intégrable.

Dans sa forme la plus simple, le théorème KAM, annoncé par Kolmogorov en 1954, démontré par Arnold et Moser au début des années 60, garantit la persistence d'un tore lagrangien α-quasipériodique invariant dont le vecteur de fréquence est diophantien et la matrice de torsion est non dégénérée.

On a présenté le théorème d'inversion locale de Hamilton, dont la preuve repose sur le schéma itératif de Nash-Moser. Le cadre conceptuel est celui des bons espaces de Fréchet, de la différentiabilité au sens de Gâteaux, et des bonnes applications. Une différence importante avec le théorème d'inversion locale usuel est qu'il faut pouvoir inverser la différentielle sur tout un voisinage du point considéré.

Le théorème de conjugaison rectifiée est une version du théorème KAM qui ne requiert pas d'hypothèse sur la torsion. Soit α un vecteur de fréquence diophantien. Un hamiltonien K, défini au voisinage de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$, préserve ce tore et y induit le champ constant X_α si et seulement si K s'écrit

$$(\star) \qquad K(q,p) = c + \sum_i \alpha_i p_i + O\left(\|p\|^2\right).$$

Soit K_0 un tel hamiltonien. Le théorème de conjugaison rectifiée affirme que tout hamiltonien H proche de K_0 s'écrit de façon essentiellement unique sous la forme

$$H = K \circ G + \sum_i \beta_i p_i \ ,$$

où K est un hamiltonien vérifiant $(\star)$, G est un symplectomorphisme *exact* proche de l'identité, et β est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ proche de 0. La démonstration du théorème est une application assez directe du théorème d'inversion locale de Hamilton.

Dans les applications du théorème de conjugaison rectifiée, l'enjeu est d'annuler le vecteur de rectification β. Pour obtenir la version standard du théorème KAM, on applique le théorème de conjugaison rectifiée au hamiltonien translaté $H_P(q,\ p) = H(q,\ p + P)$. On observe que l'application $P \mapsto \beta(H_P)$ est un difféomorphisme quand l'hypothèse de non-dégénérescence de la torsion est satisfaite. On obtient donc une unique valeur P^* annulant $\beta(H_P)$, et on conclut à l'existence d'un tore lagrangien α-quasipériodique cohomologue à $\{p = P^*\}$ pour le champ hamiltonien X_H.

Il est évidemment souhaitable en général de pouvoir conclure à l'existence de tores invariants lagrangiens pour des familles de vecteurs de fréquence satisfaisant une même condition diophantienne $HDC(\gamma,\ \tau)$, et de comprendre l'application qui associe à un vecteur de fréquence diophantien le tore correspondant. Le contexte pertinent est ici la différentiabilité au sens de Whitney. Pöschel a montré le résultat suivant. Soit $H_0 = H_0(p)$ un hamiltonien complètement intégrable sur $\mathbb{T}^n \times U$, dont la matrice hessienne est partout non dégénérée. Soient $\gamma > 0$, $\tau \geqslant 0$ et L une partie compacte de $\nabla H_0(U)$ contenue dans $HDC(\gamma,\ \tau)$. Si H est un hamiltonien suffisamment voisin de H_0, le champ X_H possède, pour tout $\alpha \in L$, un unique tore lagrangien α-quasipériodique et celui-ci dépend de façon C^∞ au sens de Whitney de α. Une conséquence importante, anticipée par Arnold, est que les tores invariants lagrangiens de X_H occupent une proportion positive de l'espace des phases.

Un outil important pour la preuve du théorème de Pöschel est une version à paramètres du théorème d'inversion locale de Hamilton. Celle-ci permet de démontrer une autre version du théorème KAM, le théorème de conjugaison conditionnelle. Le point de départ est le même que celui du théorème de conjugaison rectifiée. Le théorème de conjugaison conditionnelle fournit, au voisinage du hamiltonien initial K_0, une application lisse $H \mapsto \alpha(H)$ ayant la propriété suivante : lorsque $\alpha = \alpha(H)$ appartient à $HDC(\gamma,\ \tau)$, H s'écrit sous la forme

$$H = K \circ G,$$

avec K vérifiant $(\star)$; le champ X_H possède alors un tore lagrangien *exact* α-quasipériodique. De plus, K et G dépendent de façon C^∞ au sens de Whitney du hamiltonien H.

Considérons à nouveau le hamiltonien translaté $H_P(q, p) := H(q, p + P)$. Sous les hypothèses de non dégénérescence du théorème de Pöschel, l'application $P \mapsto \alpha(H_P)$ est un difféomorphisme et il existe donc un ensemble de mesure positive de valeurs de P telles que $\alpha(H_P)$ appartienne à $HDC(\gamma, \tau)$ (à condition d'avoir choisi γ assez petit).

Le théorème de conjugaison conditionnelle met en évidence l'importance du problème suivant : étant donné une application lisse α définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, peut-on garantir que l'ensemble des $t \in U$ tels que $\alpha(t) \in HDC(\gamma, \tau)$ soit de mesure positive si γ est assez petit et τ est assez grand ? Il faut au minimum éviter que l'image de α soit contenue dans un hyperplan rationnel de $\mathbb{R}^n$!

Considérons d'abord le cas où $m = 1$ et U est un intervalle borné I. On dit que la courbe α est *(a,b)-non-planaire en $t \in I$* si la matrice $A(t)$ dont les colonnes sont $\alpha(t)$, $D\alpha(t)$, ... , $D^{n-1}\alpha(t)$ est inversible et vérifie $||A(t)|| \leqslant b$, $\|A^{-1}(t)\| \leqslant a^{-1}$. Pyartli a montré le résultat suivant. Soit $\tau > n(n-2)$. Si la courbe α est (a, b)-non-planaire en tout point de I, la mesure de Lebesgue de l'ensemble des $t \in I$ tels que $\alpha(t) \notin HDC(\gamma, \tau)$ est au plus égale à

$$C(\tau)\,(1+\frac{b}{a}|I|)\left(\frac{\gamma}{a}\right)^{1/(n-1)}.$$

Dans le cas général $m \geq 1$, on dit que α est *(a, b)-faiblement non-dégénéré en $t \in U$* s'il existe un germe $\nu : (\mathbb{R}, 0) \to (U, t)$ tel que $\alpha \circ \nu$ soit (a, b)-non-planaire en 0. Lorsque ceci a lieu en tout point de U, le théorème de Pyartli permet encore de contrôler, *via* le théorème de Fubini, la mesure de l'ensemble des $t \in U$ tels que $\alpha(t) \notin HDC(\gamma, \tau)$.

Les résultats précédents permettent d'obtenir un ensemble de mesure positive de tores lagrangiens diophantiens en remplaçant l'hypothèse classique de non-dégénérescence de la torsion par une hypothèse de non-dégénérescence faible.

On a terminé le cours en présentant un plan de preuve du théorème de « stabilité du système solaire ». Arnold en a donné une preuve incomplète dans les années 1960. Herman a présenté un plan de preuve dans une série d'exposés dans les années 1990, que Fejoz a mis en oeuvre de façon précise au début des années 2000.

On considère le problème planétaire à $(1 + n)$ corps de la mécanique céleste. Dans les coordonnées héliocentriques, on écrit le hamiltonien sous la forme $H = H_{Kep} + \varepsilon H_{per}$, où

- ε est le petit paramètre représentant le rapport entre la masse des planètes et la masse du soleil ;
- H_{Kep} est le hamiltonien Keplerien correspondant à l'attraction mutuelle du soleil et de chacune des planètes ;
- H_{per} est le hamiltonien perturbatif correspondant à l'attraction mutuelle des planètes.

On s'intéresse à des solutions proches d'orbites circulaires horizontales directes de rayons $a_n^0 < \ldots < a_1^0$. Le théorème de stabilité du système solaire affirme que, pour tout choix de masses m_0, εm_1, ..., εm_n et de rayons $a_n^0 < \ldots < a_1^0$, il existe, si ε est assez petit, au voisinage du tore de dimension n formé par ces orbites circulaires, un ensemble de grande mesure de Lebesgue relative formé de tores invariants quasipériodiques isotropes de dimension $3n - 1$.

Les coordonnées de Poincaré $(\lambda_j, \Lambda_j, \xi_j, \eta_j, p_j, q_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ sont particulièrement bien adaptées à H_{Kep}, dont les solutions sont une famille de n ellipses kepleriennes, dans la région de l'espace des phases considérée. Les coordonnées (p_j, q_j) décrivent la position dans l'espace du plan de l'ellipse (presque horizontal). Les coordonnées (η_j, ξ_j) décrivent la position de l'ellipse (presque circulaire) dans son plan. La coordonnée Λ_j est associée à la taille de l'ellipse et la coordonnée λ_j à la position de la planète sur l'ellipse. La forme symplectique prend la forme standard

$$\omega = \sum_j d\lambda_j \wedge d\Lambda_j + \sum_j d\xi_j \wedge d\eta_j + \sum_j dp_j \wedge dq_j .$$

Le hamiltonien H_{Kep} ne dépend que des coordonnées Λ_j, les fréquences associées $\nu_j = \frac{\partial H_{Kep}}{\partial \Lambda_j}$ vérifiant la troisième loi de Kepler. Le hamiltonien H_{Kep} est donc complètement intégrable, mais avec de multiples degrés de dégénérescence ! Le vecteur de fréquence appartient à un sous-espace rationnel de dimension n.

Le *hamiltonien séculaire* $H_1(\Lambda, \xi, \eta, p, q)$ est la valeur moyenne de H_{per} par rapport aux variables rapides λ_j. C'est une fonction paire des variables $z_j := p_j + iq_j$, $r_j := \xi_j + i\eta_j$, où les variables Λ_j jouent le rôle de paramètres. L'origine $z_j = r_j = 0$, qui correspond aux orbites circulaires horizontales, est un équilibre pour H_1. D'après Lagrange et Laplace, il existe une transformation orthogonale et symplectique ρ telle que

$$H_1 \circ \rho\,(\xi, \eta, p, q) = \sum_j \sigma_j\,(\xi_j^2 + \eta_j^2) + \sum_j \zeta_j\,(p_j^2 + q_j^2) + R_4 .$$

Les nombres $\sigma_1, ..., \sigma_n, \zeta_1, ..., \zeta_n$ sont les *fréquences* du système séculaire H_1.

Le vecteur de fréquence *planaire* $(\nu_1, ..., \nu_n, \sigma_1, ..., \sigma_n)$ dépend de façon faiblement non-dégénérée des rayons $(a_1^0, \ldots, a_n^0)$. On peut après une réduction préliminaire appliquer le théorème de conjugaison conditionnelle.

Par contre, le vecteur de fréquence *spatial* $(\nu_1, ..., \nu_n, \sigma_1, ..., \sigma_n, \zeta_1, ..., \zeta_n)$ est contenu dans le sous-espace rationnel d'équation

$$\zeta_n = 0, \quad \sum_j \sigma_j + \sum_j \zeta_j = 0 .$$

La réduction du moment cinétique permet cependant de diminuer de 2 le nombre de degrés de liberté. Le vecteur de fréquence spatial devient alors faiblement non-dégénéré, ce qui permet de conclure.

PUBLICATIONS

MARMI S., MOUSSA P. et YOCCOZ J.-C., « Linearization of generalized interval exchange maps », *Annals of Mathematics. Second Series*, vol. 176, n° 3, 2012,1583-1646, DOI : 10.4007/annals.2012.176.3.5.

AVILA A., MATHEUS C. et YOCCOZ J.-C., « SL(2, $\mathbb{R}$)-invariant probability measures on the moduli spaces of translation surfaces are regular », *Geometric and Functional Analysis*, vol. 23, n° 6, 2013, 1705-1729, DOI : 10.1007/s00039-013-0244-5.