Une remarque symplectique [1]

Michael Robert HERMAN

Soit $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ et $w = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$ la forme symplectique standard sur $\mathbb{T}^{2n}$, où $dp \wedge dq$ est la forme volume constante sur $\mathbb{T}^2$, (p, q) désignant les coordonnées sur $\mathbb{T}^2$.

Soit G_v le groupe des difféomorphismes f de classe C^∞ de $\mathbb{T}^{2n}$, qui préserve la forme volume $v = \wedge^n w$ (*i.e.* $f^* v = v$) et qui sont C^∞-isotopes à l'identité. Par le théorème de Moser, il revient au même de dire que f est C^∞-isotope à l'identité comme difféomorphisme ou que f est C^∞-isotope à l'identité à travers des difféomorphismes de $\mathbb{T}^{2n}$ qui préserve la forme volume v.

Soit $G_w = \{g \in G_v \mid g^* w = w\}$ et G_w^0 la composante connexe de l'identité de G_w, le tout pour la topologie C^∞. Soit $f \in G_v$; on définit le *flux* de f, $\rho(f) \in \mathbb{T}^{2n}$ de la façon suivante : si $\tilde{f}$ est un relèvement de f à $\mathbb{R}^{2n}$, alors $\tilde{f} - Id$ est $\mathbb{Z}^{2n}$-périodique et

$$\rho(\tilde{f}) = \int_{\mathbb{T}^{2n}} (\tilde{f} - Id)\, v \ \in \mathbb{R}^{2n}$$

et

$$\rho(f) = \rho(\tilde{f}) \mod \mathbb{Z}^{2n} \ \in \mathbb{T}^{2n}.$$

On montre que $\rho : G_v \to \mathbb{T}^{2n}$ est un homomorphisme de groupes, continu pour la topologie C^0, et que ρ est surjectif puisque $R_\alpha = \alpha$, où $R_\alpha : \theta \in \mathbb{T}^{2n} \mapsto \theta + \alpha \in \mathbb{T}^{2n}$ (voir [3] XIII). Posons $H_v = \ker \rho$. W. Thurston [5] a montré, si $n \geq 2$, que le groupe H_v est un groupe simple.

Proposition. *Si $n \geq 2$, le groupe G_w n'est pas dense dans G_v pour la C^0-topologie.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que G_w est dense dans G_v pour la C^0-topologie. Puisque l'application

$$\Phi : G_v \to H_v\,,$$
$$f \mapsto R_{-\rho(f)} \circ f\,,$$

est continue pour la C^0-topologie et surjective, le groupe $H_w = H_v \cap G_w$ est dense dans H_v pour la C^0-topologie. Comme G_w est localement connexe par arcs (pour la C^∞-topologie), il n'est pas difficile de voir (en utilisant que l'application Φ est continue pour la C^∞-topologie) que H_w est localement connexe par arcs et que $H_w^0 = H_w \cap G_w^0$ est la composante connexe de l'identité (pour la C^∞-topologie) du groupe topologique H_w. Il suit que le sous-groupe H_w^0 est distingué dans H_w.

Comme on suppose que G_w est dense dans G_v pour la C^0-topologie et comme G_w est un groupe topologique pour la C^0-topologie, il suit que l'adhérence $\overline{H_w^0}$ de H_w^0 dans H_v pour la C^0-topologie, est un sous-groupe distingué de H_v. Par le résultat de Thurston [5] $\overline{H_w^0} = H_v$ (puisqu'évidemment $\overline{H_w^0} \neq \{Id_{\mathbb{T}^{2n}}\}$). Par le résultat de Conley-Zehnder [2], si $g \in H_w^0$, g a un

1. Ce document extrait des archives de Michel Herman a été préparé par F. Laudenbach. Aucune indication ne permet de dater précisément ce manuscrit, si ce n'est des souvenirs qui le situeraient vers 1983-84.

point fixe sur $\mathbb{T}^{2n}$ (*i.e.* il existe $x_0 \in \mathbb{T}^{2n}$ tel que $g(x_0) = x_0$). Comme la propriété de ne pas avoir de point fixe est ouverte pour la C^0-topologie, il suit que tout $g \in H_v$ a un point fixe sur $\mathbb{T}^{2n}$. Soit

$$g(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_{2n}) = (\theta_1 + \varphi_1(\theta_3), \theta_2 + \varphi_2(\theta_3), \theta_3, \theta_4, \ldots, \theta_{2n})$$

où les φ_i sont des fonctions de classe C^∞ vérifiant les propriétés suivantes :

– $\|\varphi_i\|_{C^0} < 1$ et $\int_0^1 \varphi_i(\theta_3)\, d\theta_3 = 0$ pour $i = 1, 2$;

– les φ_i n'ont pas de zéro commun.

Ainsi défini, le difféomorphisme g est dans H_v, mais il n'a pas de points fixes. On a ainsi abouti à une contradiction et la proposition en résulte. □

Question. Est-ce que l'adhérence de G_v dans $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^{2n})$ pour la C^0-topologie est faite des difféomorphismes $g \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^{2n})$ préservant le volume et C^0-isotopes à l'identité ? (La réponse est sans doute bien connue si $n \neq 2$).

Références

[1] A. Banyaga, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its Applications, 400, Kluwer Acad. Publ., 1997.

[2] C. Conley, E. Zehnder, *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold*, Invent. Math. 73 (1983), 33-49.

[3] M. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations,* Publ. Math. I.H.É.S. 49 (1979), 5-233.

[4] J. Moser, *On the volume elements of a manifold,* Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965),286-294.

[5] W. Thurston, *On the structure of volume preserving diffeomorphisms*, preprint [2].

2. Le preprint de Thurston n'est pas publié. Le livre de Banyaga [1], chapitre 5, en est maintenant la référence.