

Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques quasipériodiques(5)

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

28 mai 2014

Référence: Analytic linearization of circle diffeomorphisms, in Dynamical Systems and Small Divisors, Cetraro 1998, LNM 1784

Soit $f \in \text{Diff}_+(\mathbb{T})$ un difféomorphisme sans orbite périodique.

Renormalisation des difféomorphismes du cercle

Soit $f \in \text{Diff}_+(\mathbb{T})$ un difféomorphisme sans orbite périodique.
On va considérer les applications de premier retour $(f_n)_{n \geq 0}$ de f
associées à une suite décroissante d'intervalles $(I_n)_{n \geq 0}$
soigneusement choisie.

Soit $f \in \text{Diff}_+(\mathbb{T})$ un difféomorphisme sans orbite périodique.

On va considérer les applications de premier retour $(f_n)_{n \geq 0}$ de f associées à une suite décroissante d'intervalles $(I_n)_{n \geq 0}$ soigneusement choisie.

Les temps de retour correspondants sont exprimés simplement en terme des dénominateurs de la suite $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ des réduites du nombre de rotation α de f .

Renormalisation des difféomorphismes du cercle

Soit $f \in \text{Diff}_+(\mathbb{T})$ un difféomorphisme sans orbite périodique.

On va considérer les applications de premier retour $(f_n)_{n \geq 0}$ de f associées à une suite décroissante d'intervalles $(I_n)_{n \geq 0}$ soigneusement choisie.

Les temps de retour correspondants sont exprimés simplement en terme des dénominateurs de la suite $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ des réduites du nombre de rotation α de f .

Cette approche des théorèmes de linéarisation est particulièrement performante dans le cadre analytique.

Définition des I_n et des f_n

Soient x_0 un point de \mathbb{T} et n un entier strictement positif.

Définition des I_n et des f_n

Soient x_0 un point de \mathbb{T} et n un entier strictement positif.

Notons $I_n = I_n(x_0)$ l'intervalle de \mathbb{T} d'extrémités $x_0, f^{q_{n-1}}(x_0)$ qui contient $f^{-q_n}(x_0)$.

Définition des I_n et des f_n

Soient x_0 un point de \mathbb{T} et n un entier strictement positif.

Notons $I_n = I_n(x_0)$ l'intervalle de \mathbb{T} d'extrémités $x_0, f^{q_{n-1}}(x_0)$ qui contient $f^{-q_n}(x_0)$.

L'application f_n de premier retour (sous f) dans I_n est définie par

$$f_n(x) := \begin{cases} f^{q_n}(x) & \text{entre } f^{-q_n}(x_0) \text{ et } f^{q_{n-1}}(x_0) \\ f^{q_n+q_{n-1}}(x) & \text{entre } x_0 \text{ et } f^{-q_n}(x_0) \end{cases}$$

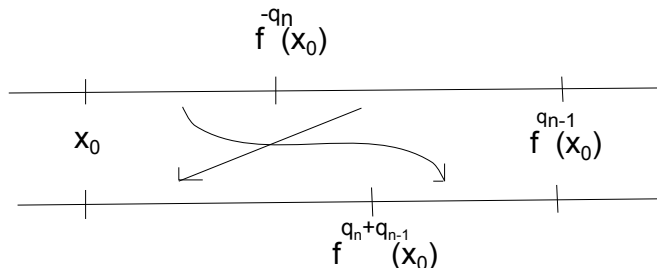
Définition des I_n et des f_n

Soient x_0 un point de \mathbb{T} et n un entier strictement positif.

Notons $I_n = I_n(x_0)$ l'intervalle de \mathbb{T} d'extrémités x_0 , $f^{q_{n-1}}(x_0)$ qui contient $f^{-q_n}(x_0)$.

L'application f_n de premier retour (sous f) dans I_n est définie par

$$f_n(x) := \begin{cases} f^{q_n}(x) & \text{entre } f^{-q_n}(x_0) \text{ et } f^{q_{n-1}}(x_0) \\ f^{q_n+q_{n-1}}(x) & \text{entre } x_0 \text{ et } f^{-q_n}(x_0) \end{cases}$$



En recollant les extrémités de I_n par f^{q_n-1} , on obtient une variété T_n difféomorphe à un cercle, sur laquelle f_n induit un difféomorphisme \bar{f}_n .

En recollant les extrémités de I_n par f^{q_n-1} , on obtient une variété T_n difféomorphe à un cercle, sur laquelle f_n induit un difféomorphisme \bar{f}_n . Le nombre de rotation de \bar{f}_n est $\pm\alpha_n := \pm G^n(\alpha)$ (où G désigne l'application de Gauss).

En recollant les extrémités de I_n par f^{q_n-1} , on obtient une variété T_n difféomorphe à un cercle, sur laquelle f_n induit un difféomorphisme \bar{f}_n . Le nombre de rotation de \bar{f}_n est $\pm\alpha_n := \pm G^n(\alpha)$ (où G désigne l'application de Gauss).

Le critère de linéarisabilité suivant est analogue à celui déjà vu pour les germes.

En recollant les extrémités de I_n par f^{q_n-1} , on obtient une variété T_n difféomorphe à un cercle, sur laquelle f_n induit un difféomorphisme \bar{f}_n . Le nombre de rotation de \bar{f}_n est $\pm\alpha_n := \pm G^n(\alpha)$ (où G désigne l'application de Gauss).

Le critère de linéarisabilité suivant est analogue à celui déjà vu pour les germes.

Proposition: Soit $f \in \text{Diff}_+^\omega(\mathbb{T})$, et soit $R > 0$ un nombre réel suffisamment petit pour que f se prolonge en une application holomorphe et injective, à valeurs dans \mathbb{C}/\mathbb{Z} , dans la bande $\Delta_R := \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}, |\Im z| < R\}$.

En recollant les extrémités de I_n par f^{q_n-1} , on obtient une variété T_n difféomorphe à un cercle, sur laquelle f_n induit un difféomorphisme \bar{f}_n . Le nombre de rotation de \bar{f}_n est $\pm\alpha_n := \pm G^n(\alpha)$ (où G désigne l'application de Gauss).

Le critère de linéarisabilité suivant est analogue à celui déjà vu pour les germes.

Proposition: Soit $f \in \text{Diff}_+^{\omega}(\mathbb{T})$, et soit $R > 0$ un nombre réel suffisamment petit pour que f se prolonge en une application holomorphe et injective, à valeurs dans \mathbb{C}/\mathbb{Z} , dans la bande $\Delta_R := \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}, |\Im z| < R\}$. S'il existe $r > 0$ tel qu'on ait $f^n(\Delta_r) \subset \Delta_R$ pour tout $n \geq 0$, alors f est conjugué à $R_{\rho(f)}$ dans $\text{Diff}_+^{\omega}(\mathbb{T})$, et le domaine de linéarisation contient Δ_r .

En recollant les extrémités de I_n par f^{q_n-1} , on obtient une variété T_n difféomorphe à un cercle, sur laquelle f_n induit un difféomorphisme \bar{f}_n . Le nombre de rotation de \bar{f}_n est $\pm\alpha_n := \pm G^n(\alpha)$ (où G désigne l'application de Gauss).

Le critère de linéarisabilité suivant est analogue à celui déjà vu pour les germes.

Proposition: Soit $f \in \text{Diff}_+^{\omega}(\mathbb{T})$, et soit $R > 0$ un nombre réel suffisamment petit pour que f se prolonge en une application holomorphe et injective, à valeurs dans \mathbb{C}/\mathbb{Z} , dans la bande $\Delta_R := \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}, |\Im z| < R\}$. S'il existe $r > 0$ tel qu'on ait $f^n(\Delta_r) \subset \Delta_R$ pour tout $n \geq 0$, alors f est conjugué à $R_{\rho(f)}$ dans $\text{Diff}_+^{\omega}(\mathbb{T})$, et le domaine de linéarisation contient Δ_r .

La preuve est essentiellement la même que dans le cas des germes.

Le théorème de linéarisation pour de larges bandes

Le théorème de linéarisation pour de larges bandes

Rappelons que la fonction de Brjuno est définie par

$$\Phi(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} \in (0, +\infty],$$

avec $\alpha_n := G^n(\alpha)$, $\beta_{n-1} := \prod_{m=0}^{n-1} \alpha_m$.

Le théorème de linéarisation pour de larges bandes

Rappelons que la fonction de Brjuno est définie par

$$\Phi(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} \in (0, +\infty],$$

avec $\alpha_n := G^n(\alpha)$, $\beta_{n-1} := \prod_{m=0}^{n-1} \alpha_m$.

Théorème: Il existe une constante universelle $r_0 > 0$ telle que, pour tout nombre de Brjuno α , pour tout $R > \frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha) + r_0$, un difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+^\omega(\mathbb{T})$, qui vérifie $\rho(f) = \alpha$ et s'étend de façon holomorphe et injective dans Δ_R , est analytiquement conjugué à R_α dans un domaine qui contient la bande Δ_r , avec $r = R - \frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha) - r_0$.

Quelques indications de preuve

On va montrer qu'on a $f^n(\Delta_r) \subset \Delta_R$ pour tout $n \geq 0$.

Quelques indications de preuve

On va montrer qu'on a $f^n(\Delta_r) \subset \Delta_R$ pour tout $n \geq 0$.

Relevons f en $F \in D^\omega(\mathbb{T})$, avec $\rho(F) = \alpha \in (0, 1)$. Ecrivons

$$F(z) = z + \alpha + \phi(z),$$

pour une fonction \mathbb{Z} -périodique ϕ dans $\{|\Im z| < R\}$.

Quelques indications de preuve

On va montrer qu'on a $f^n(\Delta_r) \subset \Delta_R$ pour tout $n \geq 0$.

Relevons f en $F \in D^\omega(\mathbb{T})$, avec $\rho(F) = \alpha \in (0, 1)$. Ecrivons

$$F(z) = z + \alpha + \phi(z),$$

pour une fonction \mathbb{Z} -périodique ϕ dans $\{|\Im z| < R\}$. Comme f est injective dans Δ_R , une inégalité de Grötzsch garantit que

$$\Im \phi(z) \geq -\frac{1}{2\pi} \log 4.$$

Quelques indications de preuve

On va montrer qu'on a $f^n(\Delta_r) \subset \Delta_R$ pour tout $n \geq 0$.

Relevons f en $F \in D^\omega(\mathbb{T})$, avec $\rho(F) = \alpha \in (0, 1)$. Ecrivons

$$F(z) = z + \alpha + \phi(z),$$

pour une fonction \mathbb{Z} -périodique ϕ dans $\{|\Im z| < R\}$. Comme f est injective dans Δ_R , une inégalité de Grötzsch garantit que

$$\Im \phi(z) \geq -\frac{1}{2\pi} \log 4.$$

On en déduit que les coefficients de Fourier de ϕ vérifient, pour $m \neq 0$

$$|\hat{\phi}(m)| \leq c_0 \exp -2\pi|m|R.$$

Quelques indications de preuve

On va montrer qu'on a $f^n(\Delta_r) \subset \Delta_R$ pour tout $n \geq 0$.

Relevons f en $F \in D^\omega(\mathbb{T})$, avec $\rho(F) = \alpha \in (0, 1)$. Ecrivons

$$F(z) = z + \alpha + \phi(z),$$

pour une fonction \mathbb{Z} -périodique ϕ dans $\{|\Im z| < R\}$. Comme f est injective dans Δ_R , une inégalité de Grötzsch garantit que

$$\Im \phi(z) \geq -\frac{1}{2\pi} \log 4.$$

On en déduit que les coefficients de Fourier de ϕ vérifient, pour $m \neq 0$

$$|\hat{\phi}(m)| \leq c_0 \exp -2\pi|m|R.$$

On a alors, pour $j = 0, 1, 2$ et $z \in \Delta_{R-1}$

$$|D^j \phi(z)| \leq c_1 \exp -2\pi(R - |\Im z|).$$

Posons $R^* := R - 1/2\pi \log \alpha^{-1} - r_1$.

Posons $R^* := R - 1/2\pi \log \alpha^{-1} - r_1$. Pour $|\Im z| < R^*$, on a

$$|F(z) - z - \alpha| < \alpha/10, \quad |DF(z) - 1| < 1/10, \quad |D^2F(z)| < 1/10.$$

Posons $R^* := R - 1/2\pi \log \alpha^{-1} - r_1$. Pour $|\Im z| < R^*$, on a

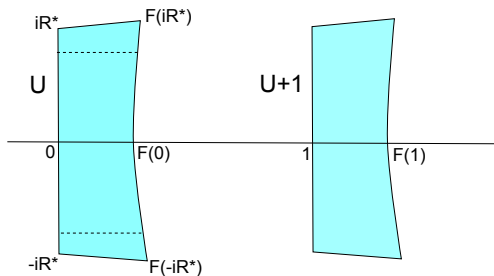
$$|F(z) - z - \alpha| < \alpha/10, \quad |DF(z) - 1| < 1/10, \quad |D^2F(z)| < 1/10.$$

Les trois segments $[-iR^*, iR^*]$, $[iR^*, F(iR^*)]$, $[-iR^*, F(-iR^*)]$ et la courbe $F([-iR^*, iR^*])$ forment le bord d'un quadrilatère curviligne U .

Posons $R^* := R - 1/2\pi \log \alpha^{-1} - r_1$. Pour $|\Im z| < R^*$, on a

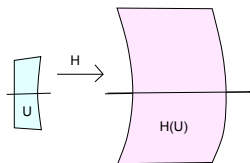
$$|F(z) - z - \alpha| < \alpha/10, \quad |DF(z) - 1| < 1/10, \quad |D^2F(z)| < 1/10.$$

Les trois segments $[-iR^*, iR^*]$, $[iR^*, F(iR^*)]$, $[-iR^*, F(-iR^*)]$ et la courbe $F([-iR^*, iR^*])$ forment le bord d'un quadrilatère curviligne U .



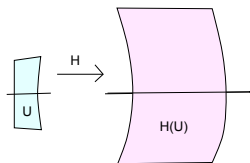
Uniformisation

L'uniformisation du domaine annulaire obtenu en recollant par F les bords verticaux de U fournit une fonction holomorphe H sur \bar{U} telle que



Uniformisation

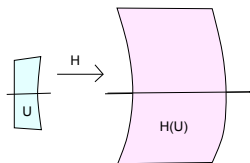
L'uniformisation du domaine annulaire obtenu en recollant par F les bords verticaux de U fournit une fonction holomorphe H sur \bar{U} telle que



► $H(F(z)) = H(z) + 1, \forall z \in [-iR^*, iR^*],$

Uniformisation

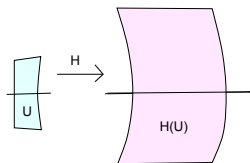
L'uniformisation du domaine annulaire obtenu en recollant par F les bords verticaux de U fournit une fonction holomorphe H sur \bar{U} telle que



- ▶ $H(F(z)) = H(z) + 1, \forall z \in [-iR^*, iR^*],$
- ▶ $\Im H(z) = \Im H(iR^*), \forall z \in [iR^*, F(iR^*)],$

Uniformisation

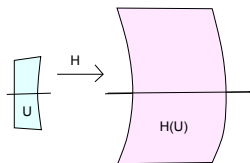
L'uniformisation du domaine annulaire obtenu en recollant par F les bords verticaux de U fournit une fonction holomorphe H sur \bar{U} telle que



- ▶ $H(F(z)) = H(z) + 1, \forall z \in [-iR^*, iR^*],$
- ▶ $\Im H(z) = \Im H(iR^*), \forall z \in [iR^*, F(iR^*)],$
- ▶ $\Im H(z) = \Im H(-iR^*), \forall z \in [-iR^*, F(-iR^*)],$

Uniformisation

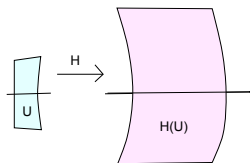
L'uniformisation du domaine annulaire obtenu en recollant par F les bords verticaux de U fournit une fonction holomorphe H sur \bar{U} telle que



- ▶ $H(F(z)) = H(z) + 1, \forall z \in [-iR^*, iR^*],$
- ▶ $\Im H(z) = \Im H(iR^*), \forall z \in [iR^*, F(iR^*)],$
- ▶ $\Im H(z) = \Im H(-iR^*), \forall z \in [-iR^*, F(-iR^*)],$
- ▶ $|\Im H(z)| \leq \Im H(iR^*), \forall z \in \bar{U},$

Uniformisation

L'uniformisation du domaine annulaire obtenu en recollant par F les bords verticaux de U fournit une fonction holomorphe H sur \bar{U} telle que



- ▶ $H(F(z)) = H(z) + 1, \forall z \in [-iR^*, iR^*],$
- ▶ $\Im H(z) = \Im H(iR^*), \forall z \in [iR^*, F(iR^*)],$
- ▶ $\Im H(z) = \Im H(-iR^*), \forall z \in [-iR^*, F(-iR^*)],$
- ▶ $|\Im H(z)| \leq \Im H(iR^*), \forall z \in \bar{U},$
- ▶ $H(0) = 0.$

Fin de l'étape de renormalisation

L'équation fonctionnelle $H(F(z)) = H(z) + 1$ permet de prolonger la fonction H au rectangle $\{|\Re z| \leq 2, |\Im z| \leq R^* - 1\}$.

Fin de l'étape de renormalisation

L'équation fonctionnelle $H(F(z)) = H(z) + 1$ permet de prolonger la fonction H au rectangle $\{|\Re z| \leq 2, |\Im z| \leq R^* - 1\}$. Elle y vérifie

$$(\star) \quad |\Im(\alpha H(z) - z)| \leq c_2.$$

Fin de l'étape de renormalisation

L'équation fonctionnelle $H(F(z)) = H(z) + 1$ permet de prolonger la fonction H au rectangle $\{|\Re z| \leq 2, |\Im z| \leq R^* - 1\}$. Elle y vérifie

$$(\star) \quad |\Im(\alpha H(z) - z)| \leq c_2.$$

Posons $\alpha^{-1} = a_1 + \alpha_1$.

Fin de l'étape de renormalisation

L'équation fonctionnelle $H(F(z)) = H(z) + 1$ permet de prolonger la fonction H au rectangle $\{|\Re z| \leq 2, |\Im z| \leq R^* - 1\}$. Elle y vérifie

$$(\star) \quad |\Im(\alpha H(z) - z)| \leq c_2.$$

Posons $\alpha^{-1} = a_1 + \alpha_1$. L'application de premier retour de F dans $U + \mathbb{Z}$, lue dans la coordonnée définie par H , est l'application F_1 vérifiant

$$F_1(H(z)) = H(F^{a_1}(z - 1)) = H(z - 1) + a_1.$$

Fin de l'étape de renormalisation

L'équation fonctionnelle $H(F(z)) = H(z) + 1$ permet de prolonger la fonction H au rectangle $\{|\Re z| \leq 2, |\Im z| \leq R^* - 1\}$. Elle y vérifie

$$(\star) \quad |\Im(\alpha H(z) - z)| \leq c_2.$$

Posons $\alpha^{-1} = a_1 + \alpha_1$. L'application de premier retour de F dans $U + \mathbb{Z}$, lue dans la coordonnée définie par H , est l'application F_1 vérifiant

$$F_1(H(z)) = H(F^{a_1}(z - 1)) = H(z - 1) + a_1.$$

On a $F_1 \in D^\omega(\mathbb{T})$ et $\rho(F_1) = -\alpha_1$.

Fin de l'étape de renormalisation

L'équation fonctionnelle $H(F(z)) = H(z) + 1$ permet de prolonger la fonction H au rectangle $\{|\Re z| \leq 2, |\Im z| \leq R^* - 1\}$. Elle y vérifie

$$(\star) \quad |\Im(\alpha H(z) - z)| \leq c_2.$$

Posons $\alpha^{-1} = a_1 + \alpha_1$. L'application de premier retour de F dans $U + \mathbb{Z}$, lue dans la coordonnée définie par H , est l'application F_1 vérifiant

$$F_1(H(z)) = H(F^{a_1}(z - 1)) = H(z - 1) + a_1.$$

On a $F_1 \in D^\omega(\mathbb{T})$ et $\rho(F_1) = -\alpha_1$. L'estimation (\star) permet de montrer que F_1 est holomorphe et injective dans la bande Δ_{R_1} avec

$$R_1 := \alpha^{-1} \left(R - \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} - r_2 \right).$$

Fin de l'étape de renormalisation

L'équation fonctionnelle $H(F(z)) = H(z) + 1$ permet de prolonger la fonction H au rectangle $\{|\Re z| \leq 2, |\Im z| \leq R^* - 1\}$. Elle y vérifie

$$(\star) \quad |\Im(\alpha H(z) - z)| \leq c_2.$$

Posons $\alpha^{-1} = a_1 + \alpha_1$. L'application de premier retour de F dans $U + \mathbb{Z}$, lue dans la coordonnée définie par H , est l'application F_1 vérifiant

$$F_1(H(z)) = H(F^{a_1}(z - 1)) = H(z - 1) + a_1.$$

On a $F_1 \in D^\omega(\mathbb{T})$ et $\rho(F_1) = -\alpha_1$. L'estimation (\star) permet de montrer que F_1 est holomorphe et injective dans la bande Δ_{R_1} avec

$$R_1 := \alpha^{-1} \left(R - \frac{1}{2\pi} \log \alpha^{-1} - r_2 \right).$$

A une orbite de F_1 de longueur $\sim L$ contenue dans Δ_{R_1} correspond une orbite de F de longueur $\sim \alpha^{-1} L$ contenue dans $\Delta_{R^*} \subset \Delta_R$.

Fin de la preuve du théorème

Choisissons $r_0 \gg r_2$.

Fin de la preuve du théorème

Choisissons $r_0 \gg r_2$.

Comme on a

$$\Phi(\alpha) = \alpha\Phi(\alpha_1) + \log \alpha^{-1},$$

Fin de la preuve du théorème

Choisissons $r_0 \gg r_2$.

Comme on a

$$\Phi(\alpha) = \alpha\Phi(\alpha_1) + \log \alpha^{-1},$$

la relation

$$R > \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) + r_0$$

implique

$$R_1 > \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha_1) + r_0.$$

Fin de la preuve du théorème

Choisissons $r_0 \gg r_2$.

Comme on a

$$\Phi(\alpha) = \alpha\Phi(\alpha_1) + \log \alpha^{-1},$$

la relation

$$R > \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) + r_0$$

implique

$$R_1 > \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha_1) + r_0.$$

Un argument de *descente infinie* montre que les orbites de F issues de Δ_r , $r = R - \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) - r_0$, ne peuvent s'échapper de Δ_R . \square

Théorème:

Soient α un nombre de Brjuno, $r > 0$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, r) > 0$ tel que, si le difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+^\omega(\mathbb{T})$ a pour nombre de rotation α , est holomorphe dans la bande $\Delta_r := \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}, |\Im(z)| < r\}$ et y vérifie

$$|f(z) - z - \alpha| < \varepsilon,$$

alors la conjugaison h entre f et R_α appartient à $\text{Diff}_+^\omega(\mathbb{T})$.

Théorème:

Soient α un nombre de Brjuno, $r > 0$. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, r) > 0$ tel que, si le difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+^{\omega}(\mathbb{T})$ a pour nombre de rotation α , est holomorphe dans la bande $\Delta_r := \{z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}, |\Im(z)| < r\}$ et y vérifie

$$|f(z) - z - \alpha| < \varepsilon,$$

alors la conjugaison h entre f et R_{α} appartient à $\text{Diff}_+^{\omega}(\mathbb{T})$.

On peut supposer que $\alpha \in (0, 1)$ et on note à nouveau $\alpha_N = G^N(\alpha)$.

Lemme: Soient $r > 0$, $0 < r_1 < \alpha^{-1}r$, $\varepsilon_1 > 0$.

Lemme: Soient $r > 0$, $0 < r_1 < \alpha^{-1}r$, $\varepsilon_1 > 0$.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si F est holomorphe sur Δ_r et y vérifie

$$|F(z) - z - \alpha| < \varepsilon,$$

Lemme: Soient $r > 0$, $0 < r_1 < \alpha^{-1}r$, $\varepsilon_1 > 0$.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si F est holomorphe sur Δ_r et y vérifie

$$|F(z) - z - \alpha| < \varepsilon,$$

alors le difféomorphisme F_1 produit par la construction de renormalisation est holomorphe dans la bande Δ_{r_1} et y vérifie

$$|F_1(z) - z + \alpha_1| < \varepsilon_1.$$

Lemme: Soient $r > 0$, $0 < r_1 < \alpha^{-1}r$, $\varepsilon_1 > 0$.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si F est holomorphe sur Δ_r et y vérifie

$$|F(z) - z - \alpha| < \varepsilon,$$

alors le difféomorphisme F_1 produit par la construction de renormalisation est holomorphe dans la bande Δ_{r_1} et y vérifie

$$|F_1(z) - z + \alpha_1| < \varepsilon_1.$$

La preuve est par "continuité" à partir du cas des rotations.

Soit $r > 0$. Comme α est un nombre de Brjuno, on peut choisir $N > 0$ tel qu'on ait

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq N} \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} < r/2$$

Soit $r > 0$. Comme α est un nombre de Brjuno, on peut choisir $N > 0$ tel qu'on ait

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq N} \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} < r/2$$

qui est équivalent à

$$\frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha_N) < \frac{1}{2} \beta_{N-1}^{-1} r.$$

Soit $r > 0$. Comme α est un nombre de Brjuno, on peut choisir $N > 0$ tel qu'on ait

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq N} \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} < r/2$$

qui est équivalent à

$$\frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha_N) < \frac{1}{2} \beta_{N-1}^{-1} r.$$

Soient $\varepsilon_N > 0$, $r_N := \frac{3}{4} \beta_{N-1}^{-1} r$.

Soit $r > 0$. Comme α est un nombre de Brjuno, on peut choisir $N > 0$ tel qu'on ait

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq N} \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} < r/2$$

qui est équivalent à

$$\frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha_N) < \frac{1}{2} \beta_{N-1}^{-1} r.$$

Soient $\varepsilon_N > 0$, $r_N := \frac{3}{4} \beta_{N-1}^{-1} r$. En appliquant N fois le lemme précédent, on trouve $\varepsilon > 0$ tel que, si F est holomorphe dans Δ_r et y vérifie

$$|F(z) - z - \alpha| < \varepsilon,$$

Soit $r > 0$. Comme α est un nombre de Brjuno, on peut choisir $N > 0$ tel qu'on ait

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq N} \beta_{n-1} \log \alpha_n^{-1} < r/2$$

qui est équivalent à

$$\frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha_N) < \frac{1}{2} \beta_{N-1}^{-1} r.$$

Soient $\varepsilon_N > 0$, $r_N := \frac{3}{4} \beta_{N-1}^{-1} r$. En appliquant N fois le lemme précédent, on trouve $\varepsilon > 0$ tel que, si F est holomorphe dans Δ_r et y vérifie

$$|F(z) - z - \alpha| < \varepsilon,$$

alors le difféomorphisme F_N produit par N étapes de renormalisation est holomorphe dans Δ_{r_N} et y vérifie

$$|F_N(z) - z - (-1)^N \alpha_N| < \varepsilon_N.$$

Pour ε_N assez petit, l'estimation précédente implique (Cauchy) que F_N est injective dans la bande Δ_{R_N} , avec $R_N := \frac{2}{3} \beta_{N-1}^{-1} r$.

Pour ε_N assez petit, l'estimation précédente implique (Cauchy) que F_N est injective dans la bande Δ_{R_N} , avec $R_N := \frac{2}{3} \beta_{N-1}^{-1} r$. Si N est assez grand, on a

$$R_N > \frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha_N) + r_0.$$

Pour ε_N assez petit, l'estimation précédente implique (Cauchy) que F_N est injective dans la bande Δ_{R_N} , avec $R_N := \frac{2}{3} \beta_{N-1}^{-1} r$. Si N est assez grand, on a

$$R_N > \frac{1}{2\pi} \Phi(\alpha_N) + r_0.$$

On conclut que F_N est analytiquement linéarisable et F l'est donc aussi. \square

1. La condition de Brjuno est optimale pour le théorème local de conjugaison analytique:

1. La condition de Brjuno est optimale pour le théorème local de conjugaison analytique: pour tout $\alpha \notin \mathcal{B}$, il existe des suites (r_k) , (ε_k) , (F_k) telles que
 - ▶ $\lim r_k = +\infty$, $\lim \varepsilon_k = 0$;

1. La condition de Brjuno est optimale pour le théorème local de conjugaison analytique: pour tout $\alpha \notin \mathcal{B}$, il existe des suites (r_k) , (ε_k) , (F_k) telles que
 - ▶ $\lim r_k = +\infty$, $\lim \varepsilon_k = 0$;
 - ▶ $F_k \in D^\omega(\mathbb{T})$, $\rho(F_k) = \alpha$;

1. La condition de Brjuno est optimale pour le théorème local de conjugaison analytique: pour tout $\alpha \notin \mathcal{B}$, il existe des suites (r_k) , (ε_k) , (F_k) telles que
 - ▶ $\lim r_k = +\infty$, $\lim \varepsilon_k = 0$;
 - ▶ $F_k \in D^\omega(\mathbb{T})$, $\rho(F_k) = \alpha$;
 - ▶ F_k est holomorphe dans la bande Δ_{r_k} et y vérifie $|F_k(z) - z - \alpha| < \varepsilon_k$;

1. La condition de Brjuno est optimale pour le théorème local de conjugaison analytique: pour tout $\alpha \notin \mathcal{B}$, il existe des suites (r_k) , (ε_k) , (F_k) telles que
 - ▶ $\lim r_k = +\infty$, $\lim \varepsilon_k = 0$;
 - ▶ $F_k \in D^\omega(\mathbb{T})$, $\rho(F_k) = \alpha$;
 - ▶ F_k est holomorphe dans la bande Δ_{r_k} et y vérifie $|F_k(z) - z - \alpha| < \varepsilon_k$;
 - ▶ F_k n'est pas topologiquement stable.

1. La condition de Brjuno est optimale pour le théorème local de conjugaison analytique: pour tout $\alpha \notin \mathcal{B}$, il existe des suites (r_k) , (ε_k) , (F_k) telles que
 - ▶ $\lim r_k = +\infty$, $\lim \varepsilon_k = 0$;
 - ▶ $F_k \in D^\omega(\mathbb{T})$, $\rho(F_k) = \alpha$;
 - ▶ F_k est holomorphe dans la bande Δ_{r_k} et y vérifie $|F_k(z) - z - \alpha| < \varepsilon_k$;
 - ▶ F_k n'est pas topologiquement stable.
2. Il existe des difféomorphismes $F \in D^\omega(\mathbb{T})$ tels que $\rho(F)$ soit un nombre de Brjuno, mais F ne soit pas analytiquement linéarisable.

Renormalisation "loin" des rotations

La condition $R > \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) + r_0$ d'un des théorèmes précédents montre qu'il y a compétition entre la **proximité aux rotations** (représentée par la taille de R) et les **propriétés arithmétiques** du nombre de rotation α .

Renormalisation "loin" des rotations

La condition $R > \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) + r_0$ d'un des théorèmes précédents montre qu'il y a compétition entre la **proximité aux rotations** (représentée par la taille de R) et les **propriétés arithmétiques** du nombre de rotation α .

Soit $F \in D^\omega(\mathbb{T})$ un difféomorphisme dont le nombre de rotation α est un nombre de Brjuno.

Renormalisation "loin" des rotations

La condition $R > \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) + r_0$ d'un des théorèmes précédents montre qu'il y a compétition entre la **proximité aux rotations** (représentée par la taille de R) et les **propriétés arithmétiques** du nombre de rotation α .

Soit $F \in D^\omega(\mathbb{T})$ un difféomorphisme dont le nombre de rotation α est un nombre de Brjuno.

Le processus de renormalisation produit une suite de difféomorphismes F_n , avec $\rho(F_n) = (-1)^n \alpha_n$, qui sont de plus en plus proches des rotations correspondantes.

Renormalisation "loin" des rotations

La condition $R > \frac{1}{2\pi}\Phi(\alpha) + r_0$ d'un des théorèmes précédents montre qu'il y a compétition entre la **proximité aux rotations** (représentée par la taille de R) et les **propriétés arithmétiques** du nombre de rotation α .

Soit $F \in D^\omega(\mathbb{T})$ un difféomorphisme dont le nombre de rotation α est un nombre de Brjuno.

Le processus de renormalisation produit une suite de difféomorphismes F_n , avec $\rho(F_n) = (-1)^n \alpha_n$, qui sont de plus en plus proches des rotations correspondantes.

Cependant, dans le même temps, la qualité arithmétique des α_n peut se détériorer: il est possible que la suite $\Phi(\alpha_n)$ tende vers $+\infty$.

Etapes du processus de renormalisation

Etapas du processus de renormalisation

- ▶ On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \| D \log DF_n \|_{C^0(\mathbb{T})} = 0$.

Etapas du processus de renormalisation

- ▶ On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \| D \log DF_n \|_{C^0(\mathbb{T})} = 0$.
- ▶ Pour tout $R > 0$, F_n est holomorphe et injective dans Δ_R si n est assez grand.

Etapas du processus de renormalisation

- ▶ On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \| D \log DF_n \|_{C^0(\mathbb{T})} = 0$.
- ▶ Pour tout $R > 0$, F_n est holomorphe et injective dans Δ_R si n est assez grand. Donc F est analytiquement linéarisable si $\liminf \Phi(\alpha_n) < +\infty$.

Etapas du processus de renormalisation

- ▶ On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \| D \log DF_n \|_{C^0(\mathbb{T})} = 0$.
- ▶ Pour tout $R > 0$, F_n est holomorphe et injective dans Δ_R si n est assez grand. Donc F est analytiquement linéarisable si $\liminf \Phi(\alpha_n) < +\infty$.
- ▶ Supposons que F_n soit holomorphe et injective dans Δ_{R_n} , avec

$$R_n > \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} + r_0.$$

Etapes du processus de renormalisation

- ▶ On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \| D \log DF_n \|_{C^0(\mathbb{T})} = 0$.
- ▶ Pour tout $R > 0$, F_n est holomorphe et injective dans Δ_R si n est assez grand. Donc F est analytiquement linéarisable si $\liminf \Phi(\alpha_n) < +\infty$.
- ▶ Supposons que F_n soit holomorphe et injective dans Δ_{R_n} , avec

$$R_n > \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} + r_0.$$

Alors F_{n+1} est holomorphe et injective dans $\Delta_{R_{n+1}}$, avec

$$R_{n+1} = \alpha_n^{-1} (R_n - \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} - r_0 + 1).$$

Etapas du processus de renormalisation

- ▶ On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \| D \log DF_n \|_{C^0(\mathbb{T})} = 0$.
- ▶ Pour tout $R > 0$, F_n est holomorphe et injective dans Δ_R si n est assez grand. Donc F est analytiquement linéarisable si $\liminf \Phi(\alpha_n) < +\infty$.
- ▶ Supposons que F_n soit holomorphe et injective dans Δ_{R_n} , avec

$$R_n > \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} + r_0.$$

Alors F_{n+1} est holomorphe et injective dans $\Delta_{R_{n+1}}$, avec

$$R_{n+1} = \alpha_n^{-1} (R_n - \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} - r_0 + 1).$$

- ▶ Supposons que F_n soit holomorphe et injective dans Δ_{R_n} , avec

$$R_n \leq \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} + r_0.$$

Etapas du processus de renormalisation

- ▶ On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \| D \log DF_n \|_{C^0(\mathbb{T})} = 0$.
- ▶ Pour tout $R > 0$, F_n est holomorphe et injective dans Δ_R si n est assez grand. Donc F est analytiquement linéarisable si $\liminf \Phi(\alpha_n) < +\infty$.
- ▶ Supposons que F_n soit holomorphe et injective dans Δ_{R_n} , avec

$$R_n > \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} + r_0.$$

Alors F_{n+1} est holomorphe et injective dans $\Delta_{R_{n+1}}$, avec

$$R_{n+1} = \alpha_n^{-1} (R_n - \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} - r_0 + 1).$$

- ▶ Supposons que F_n soit holomorphe et injective dans Δ_{R_n} , avec

$$R_n \leq \frac{1}{2\pi} \log \alpha_n^{-1} + r_0.$$

Alors F_{n+1} est holomorphe et injective dans $\Delta_{R_{n+1}}$, avec

$$R_{n+1} = c^* \exp 2\pi R_n.$$

La condition arithmétique \mathcal{H}

La condition arithmétique \mathcal{H}

Pour $\alpha \in (0, 1)$, $r > 0$, définissons

$$\mathcal{R}_\alpha(r) := \begin{cases} \alpha^{-1}(r - \log \alpha^{-1} + 1) & \text{pour } r \geq \log \alpha^{-1} \\ \exp r & \text{pour } r \leq \log \alpha^{-1} \end{cases}$$

La condition arithmétique \mathcal{H}

Pour $\alpha \in (0, 1)$, $r > 0$, définissons

$$\mathcal{R}_\alpha(r) := \begin{cases} \alpha^{-1}(r - \log \alpha^{-1} + 1) & \text{pour } r \geq \log \alpha^{-1} \\ \exp r & \text{pour } r \leq \log \alpha^{-1} \end{cases}$$

Définissons ensuite inductivement $R_n(\alpha)$ par $R_0(\alpha) = 0$ et

$$R_{n+1}(\alpha) := \mathcal{R}_{\alpha_n}(R_n(\alpha)).$$

La condition arithmétique \mathcal{H}

Pour $\alpha \in (0, 1)$, $r > 0$, définissons

$$\mathcal{R}_\alpha(r) := \begin{cases} \alpha^{-1}(r - \log \alpha^{-1} + 1) & \text{pour } r \geq \log \alpha^{-1} \\ \exp r & \text{pour } r \leq \log \alpha^{-1} \end{cases}$$

Définissons ensuite inductivement $R_n(\alpha)$ par $R_0(\alpha) = 0$ et

$$R_{n+1}(\alpha) := \mathcal{R}_{\alpha_n}(R_n(\alpha)).$$

Définition: Un nombre de Brjuno α vérifie la condition \mathcal{H} si, pour tout $m \geq 0$, il existe $k \geq 0$ tel que

$$R_k(\alpha_m) \geq \Phi(\alpha_{m+k}).$$

La condition arithmétique \mathcal{H}

Pour $\alpha \in (0, 1)$, $r > 0$, définissons

$$\mathcal{R}_\alpha(r) := \begin{cases} \alpha^{-1}(r - \log \alpha^{-1} + 1) & \text{pour } r \geq \log \alpha^{-1} \\ \exp r & \text{pour } r \leq \log \alpha^{-1} \end{cases}$$

Définissons ensuite inductivement $R_n(\alpha)$ par $R_0(\alpha) = 0$ et

$$R_{n+1}(\alpha) := \mathcal{R}_{\alpha_n}(R_n(\alpha)).$$

Définition: Un nombre de Brjuno α vérifie la condition \mathcal{H} si, pour tout $m \geq 0$, il existe $k \geq 0$ tel que

$$R_k(\alpha_m) \geq \Phi(\alpha_{m+k}).$$

On a $DC \subsetneq \mathcal{H} \subsetneq \mathcal{B}$.

Théorème: (Y. 2002) Tout $f \in \text{Diff}_+^\omega(\mathbb{T})$ dont le nombre de rotation vérifie \mathcal{H} est analytiquement linéarisable.

Théorème: (Y. 2002) Tout $f \in \text{Diff}_+^\omega(\mathbb{T})$ dont le nombre de rotation vérifie \mathcal{H} est analytiquement linéarisable.
Inversement, si α ne vérifie pas \mathcal{H} , il existe $f \in \text{Diff}_+^\omega(\mathbb{T})$ avec $\rho(f) = \alpha$ tel que f ne soit pas analytiquement linéarisable.

Théorème: (Y. 2002) Tout $f \in \text{Diff}_+^\omega(\mathbb{T})$ dont le nombre de rotation vérifie \mathcal{H} est analytiquement linéarisable.
Inversement, si α ne vérifie pas \mathcal{H} , il existe $f \in \text{Diff}_+^\omega(\mathbb{T})$ avec $\rho(f) = \alpha$ tel que f ne soit pas analytiquement linéarisable.

La construction de contre-exemples, ici et pour le théorème local, repose sur la possibilité d'inverser le processus de renormalisation.