

Des cages de lumière pour les atomes : la physique des pièges et des réseaux optiques

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

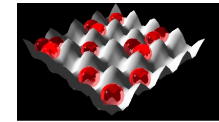
Cours 2012-13



Le thème du cours de cette année

Lumière laser : « paysage » de potentiel pour contrôler le mouvement d'atomes froids

Un type de confinement important :
potentiel périodique créé par
une onde lumineuse stationnaire



réseaux optiques

Le mouvement des atomes dans un réseau optique présente une analogie profonde avec celui des électrons dans le potentiel périodique d'un réseau cristallin

Outil essentiel pour la simulation quantique de phénomènes de la matière condensée ainsi que pour certains aspects métrologiques

Notre but : présenter les principes qui régissent le mouvement des atomes dans ces réseaux et décrire quelques expériences qui illustrent et exploitent ce confinement

Plan du cours

Cours 1 : le potentiel dipolaire

Action d'un faisceau lumineux sur un atome
 $V(\vec{r}) \propto I(\vec{r})$ intensité lumineuse

Cours 2 : Principes de base des réseaux

Importer les concepts de physique des solides
Théorème de Bloch, zone de Brillouin

Cours 3 : le régime des liaisons fortes

Fonctions de Wannier et Hamiltonien de Hubbard, rôle des interactions

Cours 4 : réseaux dépendant du temps

Phénomène de localisation dynamique,
méthode de Floquet, contrôle de l'effet tunnel

Cours 5 : les oscillations de Bloch

Origine du phénomène et mises en évidence
expérimentales ; applications métrologiques

Cours 6 : Topologie dans un réseau

Les points de Dirac ; mise en évidence,
contrôle et annihilation de ces points

Cours 1 : le potentiel dipolaire

Les objectifs de cette leçon

Evaluer l'action de la lumière sur un atome

Lumière monochromatique, dont l'intensité $I(\vec{r})$ varie dans l'espace
Modélisation de l'atome par une (ou quelques) transition(s) simple(s)

Dans une limite perturbative à définir, l'action de la lumière se décrit par un potentiel $V(\vec{r}) = \beta I(\vec{r})$

Approche semi-classique, puis traitement quantique complet

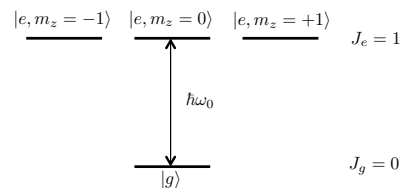
Evaluer le rôle (néfaste) des phénomènes d'émission spontanée

Chauffage lié au caractère aléatoire de ces processus ; comment le minimiser ?

Modélisation par un atome « à deux niveaux »

Transition atomique dominante :

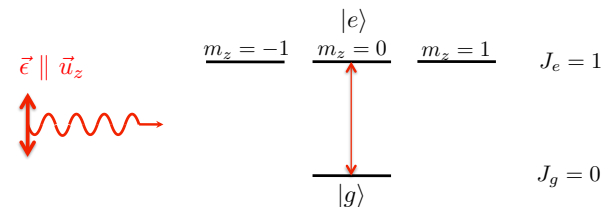
- un état fondamental g non dégénéré de moment cinétique nul $J_g = 0$
- un état excité e de moment cinétique 1, couplé à g par un couplage dipolaire électrique d_0



atome d'hydrogène sans spin électronique ni nucléaire, atomes alcalino-terreux

1. Atome à deux niveaux et approche semi-classique

Le couplage atome - lumière



Onde laser monochromatique de polarisation linéaire parallèle à Oz :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon} \mathcal{E}(\vec{r}) \cos[\omega t - \varphi(\vec{r})]$$

Couplage dipolaire électrique entre les deux niveaux :

$$|g, J_g = 0\rangle \equiv |g\rangle \longleftrightarrow |e, J_e = 1, m_z = 0\rangle \equiv |e\rangle$$

Opérateur de couplage : $\hat{V}_{\text{dip.elec.}} = -\hat{\vec{D}} \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\hat{D} \mathcal{E}(\vec{r}, t)$

$$\hat{D} = d_0 (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \quad \begin{aligned} \hat{\sigma}_+ &= |e\rangle\langle g| \\ \hat{\sigma}_- &= |g\rangle\langle e| \end{aligned}$$

L'approche semi-classique

Description classique du mouvement du centre de masse de l'atome et description quantique de sa dynamique interne entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$

Calcul de la **force moyenne** sur un atome immobile au point \vec{r}

Moyenne sur l'état stationnaire interne et sur le temps: $\vec{f}(\vec{r}) = \overline{\langle \hat{F}(\vec{r}, t) \rangle}_{\text{interne}}$

$\hat{F}(\vec{r}, t)$ = opérateur force au point \vec{r} :

$$\hat{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} [\hat{V}_{\text{dip.elec.}}(\vec{r}, t)] = \hat{D} \vec{\nabla} [\mathcal{E}(\vec{r}) \cos[\omega t - \varphi(\vec{r})]]$$

Il faut calculer la moyenne du dipôle atomique dans l'état stationnaire interne :

$$d(\vec{r}, t) = \langle \hat{D} \rangle_{\text{interne}} = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{stat}}(\vec{r}, t) \hat{D}) \quad \hat{\rho}_{\text{stat}}(\vec{r}, t) : \text{matrice densité (2 x 2) en régime stationnaire}$$

Equations de Bloch optique

Le potentiel dipolaire pour l'atome à deux niveaux

Relation $\vec{d}(\vec{r}, t) = \alpha(\omega) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ avec $\alpha(\omega) = -\frac{d_0^2}{\hbar \Delta}$

➡ potentiel moyen en $-\alpha(\omega) \mathcal{E}^2/4$

Potentiel moyen agissant sur l'atome : $V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4} \frac{d_0^2}{\hbar \Delta} \mathcal{E}^2(\vec{r}) = \frac{\hbar \Omega^2(\vec{r})}{4 \Delta}$

$$\vec{f}_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}[V_{\text{dip}}(\vec{r})]$$

Selon le signe de Δ (= signe du désaccord Δ), le dipôle est en phase ($\Delta < 0$, $\omega < \omega_0$) ou en opposition de phase ($\Delta > 0$, $\omega > \omega_0$) avec le champ.

- désaccord rouge ($\Delta < 0$): l'atome est attiré par les hautes intensités lumineuses
- désaccord bleu ($\Delta > 0$): l'atome est repoussé par les hautes intensités lumineuses

Et la force de pression de radiation ?



Force liée au gradient de phase : $\vec{f}_{\text{press.rad.}} = -(\vec{e} \cdot \vec{d}) \mathcal{E} [\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})] \sin(\omega t - \varphi)$

Cette force est nulle à l'ordre 1 en $1/\Delta$ de notre calcul

Force moyenne de P.R. non nulle s.s.i. le dipôle n'est pas en phase ou en opposition de phase avec le champ. A l'ordre 2 en $1/\Delta$, on trouve :

$$\frac{1}{\omega - \omega_0 + i\Gamma/2} \approx \frac{1}{\omega - \omega_0} - i \frac{\Gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2}$$

Terme en $1/\Delta^2$: signature de processus d'émission spontanée, à éviter sous peine de chauffage lié à leur caractère aléatoire.

- Force dipolaire en $1/\Delta$: pas d'émission spontanée à cet ordre
- Pression de radiation en $1/\Delta^2$, liée à l'émission spontanée

Approximation du « champ tournant »

Approximation qui tire parti de $|\Delta| \ll \omega_0$, $\bar{\Delta} \approx \Delta$.

- Permet de simplifier les calculs dès le départ en prenant

$$\hat{V}_{\text{d.e.}}^{\text{rwa}} = \frac{\hbar \Omega}{2} [\hat{\sigma}_+ e^{-i(\omega t - \varphi)} + \hat{\sigma}_- e^{+i(\omega t - \varphi)}].$$

- Permet des calculs analytiques même si l'excitation laser est non perturbative ; on ne peut alors plus supposer $\rho_{gg} \approx 1$, $\rho_{ee} \approx 0$

Contribution du terme non résonant en $1/(\omega + \omega_0)$

- Renforce le terme résonant pour $\Delta < 0$: +15 % pour l'action d'un laser YAG (1064 nm) sur du rubidium ($\lambda_0=780$ nm)
- S'oppose au terme résonant pour $\Delta > 0$: -19 % pour l'action d'un YAG doublé (532 nm) sur du rubidium.

2. Le point de vue de l'atome habillé

Le système atome + mode du laser

Niveaux d'énergie en absence de couplage :

$|g, N\rangle, |e, N\rangle$ où N est le nombre de photons dans ce mode

Si $|\Delta| \ll \omega_0$, niveaux groupés par multiplicités de dimension 2

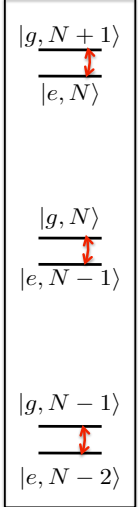
$|g, N\rangle$, énergie $N\hbar\omega$ $|e, N-1\rangle$, énergie $(N-1)\hbar\omega + \hbar\omega_0$

A l'approximation du champ tournant, interaction atome-laser :

$$\hat{V}_{d.e.}^{rwa} = \frac{\hbar\Omega_1(\vec{r})}{2} [\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger] \quad \Omega_1(\vec{r}): \text{ pulsation de Rabi en } \vec{r} \text{ quand un seul photon est présent}$$

→ Couple uniquement deux niveaux d'une même multiplicité:

$$\langle e, N-1 | \hat{V}_{d.e.}^{rwa} | g, N \rangle = \frac{\hbar\Omega_1(\vec{r})}{2} \sqrt{N}$$



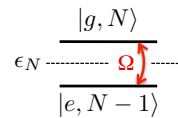
Les états propres de l'atome habillé

Hamiltonien pour la multiplicité $\{|g, N\rangle, |e, N-1\rangle\}$

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{pmatrix} + \epsilon_N = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} + \epsilon_N$$

$$\epsilon_N = (N - \frac{1}{2})\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_0$$

$$\tan[2\theta(\vec{r})] = \Omega(\vec{r})/\Delta$$



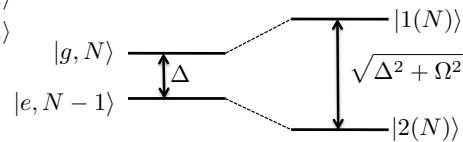
Vecteurs propres :

$$|1(N)\rangle = \cos\theta |g, N\rangle + \sin\theta |e, N-1\rangle$$

$$|2(N)\rangle = \sin\theta |g, N\rangle - \cos\theta |e, N-1\rangle$$

Energies associées :

$$E_{N,\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} + \epsilon_N$$



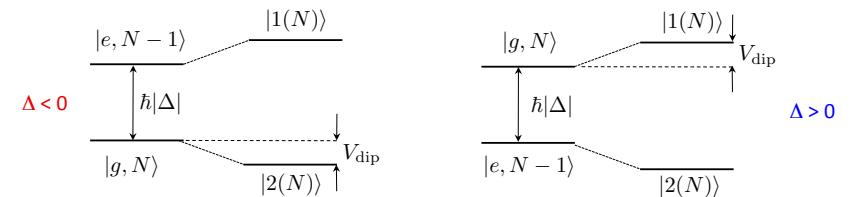
Le potentiel dipolaire retrouvé

Le résultat $E_{N,\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} + \epsilon_N$ devient pour $|\Omega| \ll |\Delta|$

$$N\hbar\omega + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta} \text{ pour } |g\rangle, \quad (N-1)\hbar\omega + \hbar\omega_0 - \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta} \text{ pour } |e\rangle$$

Potentiel dipolaire = déplacement lumineux du niveau $|g\rangle$

Déplacement vers le bas ou vers le haut, selon que $\Delta < 0$ ou $\Delta > 0$:



L'état habillé « intéressant »

L'état propre issu de $|g\rangle$ s'écrit : $|\overline{g, N}\rangle(\vec{r}) \approx |g, N\rangle + \frac{\Omega(\vec{r})}{2\Delta} e^{i\varphi(\vec{r})} |e, N-1\rangle$.

Cet état permet de retrouver toutes les quantités atomiques intéressantes dans la limite basse intensité et à l'approximation du champ tournant :

- Élément de matrice ρ_{eg} conduisant au dipôle moyen :

$$\rho_{eg} = \langle e, N-1 | \left(\overline{|g, N\rangle \langle g, N|} \right) |g, N\rangle = \frac{\Omega e^{i\varphi}}{2\Delta}$$

- Population de l'état excité : $\Pi_e = \langle e, N-1 | \left(\overline{|g, N\rangle \langle g, N|} \right) |e, N-1\rangle = \frac{\Omega^2}{4\Delta^2}$
dont on déduit le taux d'émission spontanée $\gamma = \Gamma\Pi_e$
- Phases géométriques pour générer des champs de jauge artificiels...

La transition de résonance des alcalins

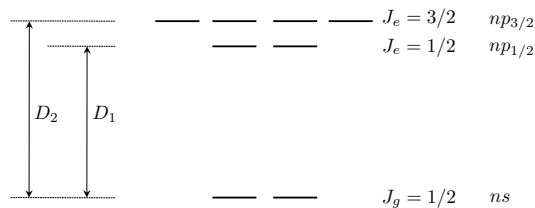
Cas important : atomes utilisés dans la majorité des expériences

Transition de résonance $ns \leftrightarrow np$, avec $n=2$ (Li),..., $n=6$ (Cs)

Spin électronique non nul : structure fine qui cause un clivage du niveau excité np en deux sous-niveaux $np_{1/2}$ et $np_{3/2}$

Spin nucléaire I non nul : clivage du niveau fondamental et du niveau excité

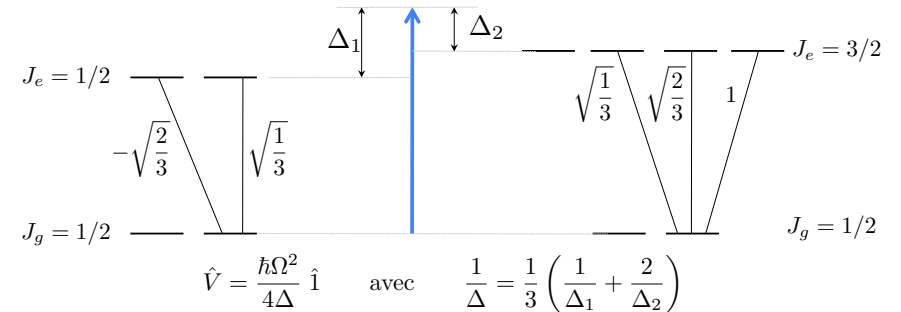
En absence de spin nucléaire :



3. Le cas des atomes alcalins

Alcalin sans spin nucléaire & polarisation linéaire

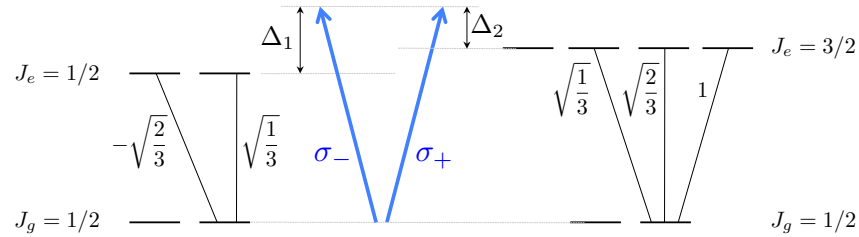
Amplitude des couplages pour les deux transitions D_1 et D_2 :



Si $|\Delta_{1,2}| \ll$ structure fine, $\Delta \approx \Delta_1 \approx \Delta_2$; on retrouve l'atome à deux niveaux

Cas particulier $\Delta_2 \approx -2\Delta_1$: pas de déplacement lumineux pour une polarisation linéaire

Alcalin sans spin nucléaire & polarisation circulaire



Pour l'état $m_z=+1/2$:

$$\begin{cases} \text{Polarisation } \sigma_+ : & \hat{V} = \frac{\hbar\Omega^2}{4} \frac{1}{\Delta_2} \\ \text{Polarisation } \sigma_- : & \hat{V} = \frac{\hbar\Omega^2}{4} \left(\frac{2}{3\Delta_1} + \frac{1}{3\Delta_2} \right) \end{cases}$$

Pour l'état $m_z=-1/2$, conclusions inversées

Potentiel dépendant du spin équivalent à un champ magnétique orienté selon l'axe z

Alcalin sans spin nucléaire & polarisation quelconque

Vecteur polarisation ϵ complexe : $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{\epsilon} \mathcal{E}(\vec{r}) e^{i(\omega t - \varphi)} + \text{c.c.}$

Vecteur fréquence de Rabi : $\hbar\Omega_\alpha = -d_0 \mathcal{E}(\vec{r})(\vec{\epsilon} \cdot \vec{u}_\alpha) \quad \alpha = x, y, z$

Opérateur déplacement lumineux dans le sous-espace $J_g=1/2$

$$\hat{V} = \frac{\hbar|\vec{\Omega}|^2}{4\Delta} \hat{1} + \vec{B} \cdot \hat{S}, \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{2}{\Delta_2} \right)$$

où le champ magnétique effectif vaut $\vec{B} = \frac{i}{6} \left(\frac{1}{\Delta_2} - \frac{1}{\Delta_1} \right) \vec{\Omega} \times \vec{\Omega}^*$

On retrouve les cas particuliers précédents $\begin{cases} \text{Polarisation linéaire : } \vec{\Omega} \text{ réel, } \vec{B} = 0 \\ \text{Polarisation circulaire } \vec{u}_x \pm i\vec{u}_y : \\ \vec{B} \text{ parallèle à } \vec{u}_z \end{cases}$

Remarques sur le cas de la polarisation quelconque (1)

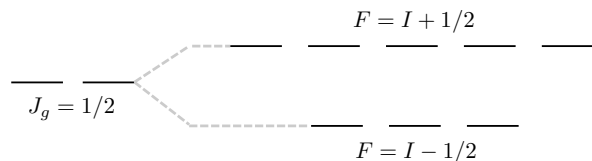
- Pour un désaccord comparable à la structure fine, le déplacement lumineux vectoriel en $\vec{B} \cdot \hat{S}$ est comparable au terme scalaire en $\frac{\hbar|\vec{\Omega}|^2}{4\Delta} \hat{1}$
- Partie vectorielle non nulle pour le désaccord $\Delta_2 = -2\Delta_1$ annulant la partie scalaire.
- Pas de transitions directes $\Delta m \geq 2$

Remarques sur le cas de la polarisation quelconque (2)

- Pour des grands désaccords, la partie vectorielle décroît comme $1/\Delta^2$. Elle devient donc rapidement négligeable devant la partie scalaire, qui ne décroît que comme $1/\Delta$.
- Si $\Delta \gg$ structure fine, cette dernière est négligeable pendant le temps Δ^{-1} associé à l'interaction atome-lumière : on se ramène à la transition $J_g=0 \leftrightarrow J_e=1$.
- Le champ magnétique fictif peut avoir des variations spatiales sur des échelles de l'ordre de la longueur d'onde optique.

Prise en compte de la structure hyperfine

Le noyau a un spin nucléaire I et l'interaction hyperfine clive le niveau fondamental en deux sous-niveaux $F = I \pm 1/2$ (figure ci-dessous pour $I = 3/2$, donc $F = 1$ et 2)



Pour $\Delta \gg$ structure hyperfine $\gg V_{\text{dip}}$, le théorème de Wigner-Eckart donne :

$$\hat{V}_{\text{dip}} = \frac{\hbar |\vec{\Omega}|^2}{4\Delta} \hat{1} + \vec{B}' \cdot \hat{\vec{F}} \quad \text{avec} \quad \vec{B}' = \pm \frac{\vec{B}}{2I + 1}$$

Champs magnétiques effectifs opposés pour les deux niveaux hyperfins

Pourquoi une approche quantique ?

Jusqu'ici, nous avons traité classiquement le mouvement de l'atome. Mais beaucoup d'applications des pièges et réseaux optiques font appel à la nature quantique de ce mouvement :

- Bandes d'énergie et effet tunnel
- Etats minimaux
- Oscillations de Bloch
- Phases géométriques, points de Dirac

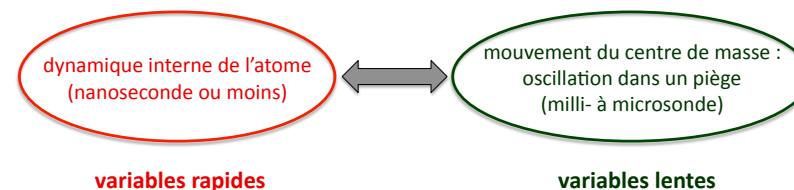
La structure du traitement semi-classique est presque directement transposable.

N.B. Pour simplifier, nous traiterons ici le cas d'un atome à deux niveaux

4. Approche quantique

Variables lentes et variables rapides

Problème « standard » d'élimination de variables rapides au profit de variables lentes



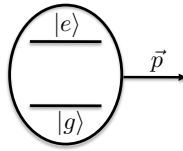
$$\text{Hamiltonien total : } \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{dip.elec.}} + \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e|$$

auquel il faut ajouter l'évolution irréversible par émission spontanée.

Comment faire cette élimination adiabatique (1) ?

L'état de l'atome est décrit par une matrice densité qui agit à la fois dans l'espace interne et l'espace externe

$$\langle \alpha, \vec{r} | \hat{\rho} | \beta, \vec{r}' \rangle \quad \alpha, \beta = e, g$$



Considérons l'évolution de $\hat{\rho}_{eg} = \langle e | \hat{\rho} | g \rangle$: opérateur vis-à-vis des variables externes seulement

$$\frac{d\hat{\rho}_{eg}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{\rho}_{eg} \right] - (i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2})\hat{\rho}_{eg} - i\Omega \cos(\omega t - \varphi) (\hat{\rho}_{gg} - \hat{\rho}_{ee})$$

- On néglige la fraction d'atomes dans l'état excité.
- On suppose que l'évolution de ρ_{eg} due aux variables internes (fréquences $\Delta = \omega - \omega_0$ et Γ), est beaucoup plus rapide que celle due aux variables externes (énergie cinétique $p^2 / 2m$).

Comment faire cette élimination adiabatique (2) ?

A partir de :

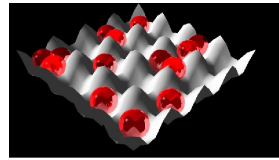
$$\frac{d\hat{\rho}_{eg}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{\rho}_{eg} \right] - (i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2})\hat{\rho}_{eg} - i\Omega \cos(\omega t - \varphi) (\hat{\rho}_{gg} - \hat{\rho}_{ee})$$

on obtient :

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = \frac{\Omega}{2} \left[\frac{e^{-i(\omega t - \varphi)}}{\omega - \omega_0} - \frac{e^{i(\omega t - \varphi)}}{\omega + \omega_0} \right] \hat{\rho}_{gg}(t)$$

$\hat{\rho}_{eg}$ et $\hat{\rho}_{ge}$ suivent adiabatiquement l'évolution beaucoup plus lente de l'opérateur densité restreint au niveau fondamental |g>

Hamiltonien effectif pour le centre de masse atomique



On reporte le résultat obtenu pour $\hat{\rho}_{eg}$ et $\hat{\rho}_{ge}$ dans $\frac{d\hat{\rho}_{gg}}{dt}$

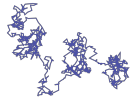
$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{gg}}{dt} &= \frac{d\hat{\rho}_{gg}}{dt} \Big|_{\text{em.sp.}} + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{\rho}_{gg} \right] \pm i\Omega \cos(\omega t - \varphi) (\hat{\rho}_{eg} - \hat{\rho}_{ge}) \\ &\approx \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{\text{dip}}(\hat{r}), \hat{\rho}_{gg} \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{\text{dip}}(\hat{r})$ avec $V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\hbar\Omega^2(\vec{r})}{4\Delta}$

- On s'est limité ici à l'ordre le plus bas non nul en $1/\Delta$
- On a lissé les termes en $\exp(\pm 2 i \omega t)$
- Les termes en $\Gamma \rho_{ee}$ sont négligeables à cet ordre du calcul.

5. Réseau rouge ou réseau bleu ?

Emission spontanée : source de chauffage à minimiser

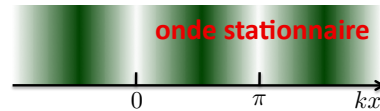


Première étape : minimiser la population de l'état excité $\Pi_e = \Omega^2 / (4\Delta^2)$
pour une valeur donnée de $V_{\text{dip}} = \hbar\Omega^2 / (4\Delta)$

Conduit à choisir Ω et Δ les plus grands possibles :
en gardant Ω^2/Δ constant, la quantité Ω^2/Δ^2 tend vers 0 si Ω, Δ deviennent très grands

Réseau optique : $\Omega(x) = \Omega_0 \sin(kx)$

$$V_{\text{dip}}(x) = V_0 \sin^2 kx, \quad V_0 = \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\Delta}$$



Deuxième étape : une fois déterminé le couple $\Omega_0, |\Delta|$, quel signe choisir pour Δ ?

- Pour $\Delta > 0$ (bleu), les atomes sont piégés aux noeuds.
- Pour $\Delta < 0$ (rouge), les atomes sont piégés aux ventres.

Une réponse naïve... mais incorrecte ?

Onde stationnaire :

$$\Omega(x) = \Omega_0 \sin(kx)$$



Pour des valeurs données de Ω_0 et de $|\Delta|$, on pourrait penser qu'il vaut mieux prendre $\Delta > 0$, pour mettre les atomes aux noeuds ($kx = 0$ modulo π) puisqu'il n'y a pas de lumière en ces points.

Réponse naïve invalidée par Gordon et Ashkin :

le coefficient de diffusion en impulsion (qui caractérise le chauffage lié à l'émission spontanée) est le même en tout point de l'onde stationnaire (noeud ou ventre en particulier) et il ne dépend pas du signe de Δ .

Comment comprendre ce résultat paradoxal ?

Cas d'un réseau très profond (pas d'effet tunnel entre sites)

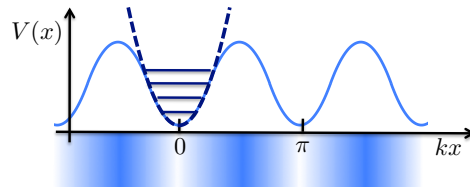
Désaccord bleu :

$$V(x) = V_0 \sin^2(kx) \quad V_0 > 0$$

Au voisinage de $x = 0$:

$$V(x) \approx V_0 k^2 x^2 \equiv \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

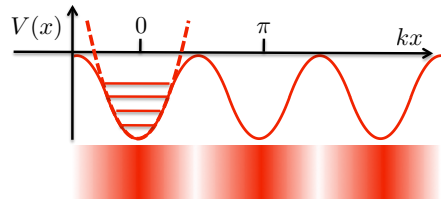
Etats propres : fonctions de Hermite $H_n(x/a_{\text{oh}})$ $a_{\text{oh}} = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$



Désaccord rouge :

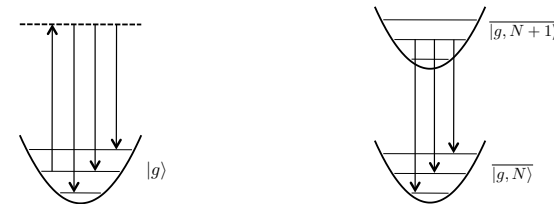
$$V(x) = V_0 \cos^2(kx) \quad V_0 < 0$$

$$V(x) \approx V_0 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$



Transitions Raman dans un réseau très profond

Processus d'émission spontanée : transitions entre ces niveaux d'énergie



« Cascade radiative » dans le point de vue de l'atome habillé :

- $|g, N + 1\rangle$ a un recouvrement non nul (faible) avec $|e, N\rangle$ et il est donc instable du point de vue de l'émission spontanée.
- Après émission d'un photon, l'atome tombe sur $|g, N\rangle$, qui a lui-même un recouvrement non nul (fort) avec $|g, N\rangle$

Les taux de transition $n \rightarrow n'$

Calcul de ces taux par la règle d'or de Fermi

Etat initial :

$$\langle x | \Psi_n^{(N+1)} \rangle = H_n(x) \{ \cos[\theta(x)] |g, N+1\rangle + \sin[\theta(x)] |e, N\rangle \}$$

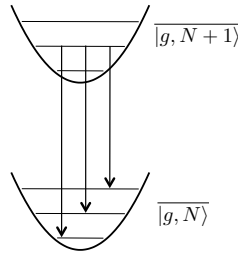
Taux de passage vers un état final $H_{n'}$ avec un photon spontané k' :

$$\begin{aligned} \gamma_{n \rightarrow n'}(k') &\propto \left| \int H_{n'}(x) H_n(x) e^{ik'x} \sin[\theta(x)] \cos[\theta(x)] dx \right|^2 \\ &\propto \left| \frac{1}{2\Delta} \int H_{n'}(x) H_n(x) e^{ik'x} \Omega(x) dx \right|^2 \end{aligned}$$

où on a utilisé l'approximation $\sin(2\theta) \approx \Omega/\Delta$

Simplification liée au régime de Lamb-Dicke: l'extension spatiale des fonctions

$H_n, H_{n'}$ est supposée petite devant la longueur d'onde lumineuse : $e^{ikx} \approx 1 + ikx$



Le cas d'un réseau bleu

L'expression générale

$$\gamma_{n \rightarrow n'}(k') \propto \left| \int H_{n'}(x) H_n(x) e^{ik'x} \Omega(x) dx \right|^2$$

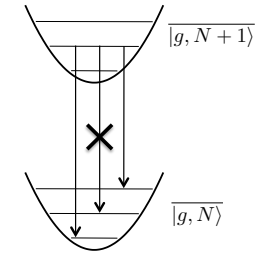
avec $\Omega(x) = \Omega_0 \sin(kx) \approx \Omega_0 kx$ devient

$$\gamma_{n \rightarrow n'} \propto \Omega_0^2 |\langle H_{n'} | k\hat{x} | H_n \rangle|^2$$

ou encore : $\gamma_{n \rightarrow n'} = \frac{\gamma_0}{2} (ka_{\text{oh}})^2 [(n+1)\delta_{n',n+1} + n\delta_{n',n-1}]$

où on pose $\gamma_0 = \Gamma \Omega_0^2 / (4\Delta^2)$ (taux d'émission spontanée à un ventre)

- Forte réduction du taux d'émission par rapport au taux γ_0 , par le facteur $(ka_{\text{oh}})^2 \ll 1$
- L'émission d'un photon s'accompagne forcément d'un changement de niveau.



Le cas d'un réseau rouge

L'expression générale

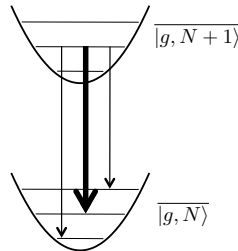
$$\gamma_{n \rightarrow n'}(k') \propto \left| \int H_{n'}(x) H_n(x) e^{ik'x} \Omega(x) dx \right|^2$$

avec $\Omega(x) = \Omega_0 \cos(kx) \approx \Omega_0$ devient

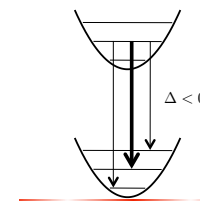
$$\gamma_{n \rightarrow n'} \propto \Omega_0^2 |\langle H_{n'} | 1 + ik'\hat{x} | H_n \rangle|^2$$

ou encore : $\gamma_{n \rightarrow n'} = \gamma_0 \left\{ \delta_{n,n'} + \frac{(ka_{\text{oh}})^2}{2} [(n+1)\delta_{n',n+1} + n\delta_{n',n-1}] \right\}$

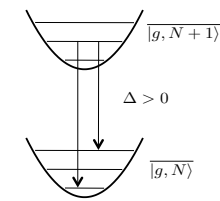
- Le taux de diffusion de photons est élevé : $\approx \gamma_0$
- Le terme dominant est $\gamma_0 \delta_{n,n'}$, c'est-à-dire une émission spontanée de photon sans changement de niveau de vibration.



Comparaison réseau bleu - réseau rouge



Pour un désaccord rouge, taux d'émission spontanée élevé : les photons sont majoritairement émis sur la raie $n \rightarrow n$.



Pour un désaccord bleu, taux d'émission spontanée faible : les photons sont uniquement émis sur les raies $n \rightarrow n \pm 1$.

Les taux $n \rightarrow n \pm 1$ (et donc le chauffage) sont les mêmes !

En présence d'effet tunnel dans le réseau, la raie $n \rightarrow n$ (sans changement de bande) peut néanmoins induire de la décohérence