

# Des cages de lumière pour les atomes : la physique des pièges et des réseaux optiques

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

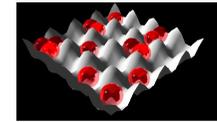
Cours 2012-13



## Le thème du cours de cette année

Lumière laser : « paysage » de potentiel pour contrôler le mouvement d'atomes froids

Un type de confinement important :  
potentiel périodique créé par  
une onde lumineuse stationnaire



*réseaux optiques*

Le mouvement des atomes dans un réseau optique présente une analogie profonde avec celui des électrons dans le potentiel périodique d'un réseau cristallin

*Outil essentiel pour la simulation quantique de phénomènes de la matière condensée ainsi que pour certains aspects métrologiques*

Notre but : présenter les principes qui régissent le mouvement des atomes dans ces réseaux et décrire quelques expériences qui illustrent et exploitent ce confinement

## Plan du cours

### Cours 1 : le potentiel dipolaire

Action d'un faisceau lumineux sur un atome  
 $V(\vec{r}) \propto I(\vec{r})$  intensité lumineuse

### Cours 2 : Principes de base des réseaux

Importer les concepts de physique des solides  
Théorème de Bloch, zone de Brillouin

### Cours 3 : le régime des liaisons fortes

Fonctions de Wannier et Hamiltonien de Hubbard, rôle des interactions

### Cours 4 : réseaux dépendant du temps

Phénomène de localisation dynamique,  
méthode de Floquet, contrôle de l'effet tunnel

### Cours 5 : les oscillations de Bloch

Origine du phénomène et mises en évidence  
expérimentales ; applications métrologiques

### Cours 6 : Topologie dans un réseau

Les points de Dirac ; mise en évidence,  
contrôle et annihilation de ces points

## Cours 1 : le potentiel dipolaire

## Les objectifs de cette leçon

### Evaluer l'action de la lumière sur un atome

Lumière monochromatique, dont l'intensité  $I(\vec{r})$  varie dans l'espace  
Modélisation de l'atome par une (ou quelques) transition(s) simple(s)

Dans une limite perturbative à définir, l'action de la lumière se décrit par un potentiel  $V(\vec{r}) = \beta I(\vec{r})$

*Approche semi-classique, puis traitement quantique complet*

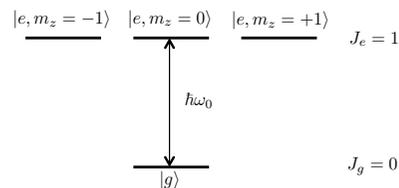
### Evaluer le rôle (néfaste) des phénomènes d'émission spontanée

Chauffage lié au caractère aléatoire de ces processus ; comment le minimiser ?

## Modélisation par un atome « à deux niveaux »

Transition atomique dominante :

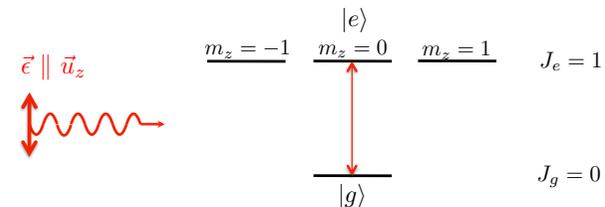
- un état fondamental  $g$  non dégénéré de moment cinétique nul  $J_g = 0$
- un état excité  $e$  de moment cinétique 1, couplé à  $g$  par un couplage dipolaire électrique  $d_0$



*atome d'hydrogène sans spin électronique ni nucléaire, atomes alcalino-terreux*

## 1. Atome à deux niveaux et approche semi-classique

### Le couplage atome - lumière



Onde laser monochromatique de polarisation linéaire parallèle à Oz :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon} \mathcal{E}(\vec{r}) \cos[\omega t - \varphi(\vec{r})]$$

Couplage dipolaire électrique entre les deux niveaux :

$$|g, J_g = 0\rangle \equiv |g\rangle \longleftrightarrow |e, J_e = 1, m_z = 0\rangle \equiv |e\rangle$$

Opérateur de couplage :  $\hat{V}_{\text{dip.elec.}} = -\hat{\vec{D}} \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\hat{D} \mathcal{E}(\vec{r}, t)$

$$\hat{D} = d_0 (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \quad \begin{aligned} \hat{\sigma}_+ &= |e\rangle\langle g| \\ \hat{\sigma}_- &= |g\rangle\langle e| \end{aligned}$$

## L'approche semi-classique

Description classique du mouvement du centre de masse de l'atome et description quantique de sa dynamique interne entre  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$

Calcul de la **force moyenne** sur un atome immobile au point  $\vec{r}$

Moyenne sur l'état stationnaire interne et sur le temps:  $\vec{f}(\vec{r}) = \overline{\langle \hat{F}(\vec{r}, t) \rangle}_{\text{interne}}$

$\hat{F}(\vec{r}, t)$  = opérateur force au point  $\vec{r}$  :

$$\hat{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} [\hat{V}_{\text{dip.elec.}}(\vec{r}, t)] = \hat{D} \vec{\nabla} [\mathcal{E}(\vec{r}) \cos[\omega t - \varphi(\vec{r})]]$$

Il faut calculer la moyenne du dipôle atomique dans l'état stationnaire interne :

$$d(\vec{r}, t) = \langle \hat{D} \rangle_{\text{interne}} = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{stat}}(\vec{r}, t) \hat{D}) \quad \hat{\rho}_{\text{stat}}(\vec{r}, t) : \text{matrice densité (2 x 2) en régime stationnaire}$$

*Equations de Bloch optique*

## Le potentiel dipolaire pour l'atome à deux niveaux

Relation  $\vec{d}(\vec{r}, t) = \alpha(\omega) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  avec  $\alpha(\omega) = -\frac{d_0^2}{\hbar \Delta}$

➡ potentiel moyen en  $-\alpha(\omega) \mathcal{E}^2/4$

Potentiel moyen agissant sur l'atome :  $V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4} \frac{d_0^2}{\hbar \Delta} \mathcal{E}^2(\vec{r}) = \frac{\hbar \Omega^2(\vec{r})}{4 \Delta}$

$$\vec{f}_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}[V_{\text{dip}}(\vec{r})]$$

Selon le signe de  $\Delta$  (= signe du désaccord  $\Delta$ ), le dipôle est en phase ( $\Delta < 0$ ,  $\omega < \omega_0$ ) ou en opposition de phase ( $\Delta > 0$ ,  $\omega > \omega_0$ ) avec le champ.

- désaccord rouge ( $\Delta < 0$ ): l'atome est attiré par les hautes intensités lumineuses
- désaccord bleu ( $\Delta > 0$ ): l'atome est repoussé par les hautes intensités lumineuses

## Et la force de pression de radiation ?



Force liée au gradient de phase :  $\vec{f}_{\text{press.rad.}} = -(\vec{e} \cdot \vec{d}) \mathcal{E} [\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})] \sin(\omega t - \varphi)$

*Cette force est nulle à l'ordre 1 en  $1/\Delta$  de notre calcul*

Force moyenne de P.R. non nulle s.s.i. le dipôle n'est pas en phase ou en opposition de phase avec le champ. A l'ordre 2 en  $1/\Delta$ , on trouve :

$$\frac{1}{\omega - \omega_0 + i\Gamma/2} \approx \frac{1}{\omega - \omega_0} - i \frac{\Gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2}$$

Terme en  $1/\Delta^2$ : signature de processus d'émission spontanée, à éviter sous peine de chauffage lié à leur caractère aléatoire.

- Force dipolaire en  $1/\Delta$  : pas d'émission spontanée à cet ordre
- Pression de radiation en  $1/\Delta^2$ , liée à l'émission spontanée

## Approximation du « champ tournant »

Approximation qui tire parti de  $|\Delta| \ll \omega_0$ ,  $\bar{\Delta} \approx \Delta$ .

- Permet de simplifier les calculs dès le départ en prenant

$$\hat{V}_{\text{d.e.}}^{\text{rwa}} = \frac{\hbar \Omega}{2} [\hat{\sigma}_+ e^{-i(\omega t - \varphi)} + \hat{\sigma}_- e^{+i(\omega t - \varphi)}].$$

- Permet des calculs analytiques même si l'excitation laser est non perturbative ; on ne peut alors plus supposer  $\rho_{gg} \approx 1$ ,  $\rho_{ee} \approx 0$

Contribution du terme non résonant en  $1/(\omega + \omega_0)$

- Renforce le terme résonant pour  $\Delta < 0$  : +15 % pour l'action d'un laser YAG (1064 nm) sur du rubidium ( $\lambda_0=780$  nm)
- S'oppose au terme résonant pour  $\Delta > 0$  : -19 % pour l'action d'un YAG doublé (532 nm) sur du rubidium.

## 2. Le point de vue de l'atome habillé

### Le système atome + mode du laser

Niveaux d'énergie en absence de couplage :

$|g, N\rangle, |e, N\rangle$  où  $N$  est le nombre de photons dans ce mode

Si  $|\Delta| \ll \omega_0$ , niveaux groupés par multiplicités de dimension 2

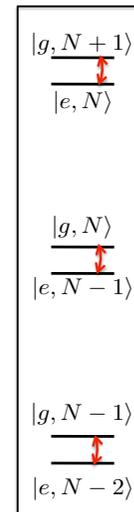
$|g, N\rangle$ , énergie  $N\hbar\omega$        $|e, N-1\rangle$ , énergie  $(N-1)\hbar\omega + \hbar\omega_0$

A l'approximation du champ tournant, interaction atome-laser :

$$\hat{V}_{\text{d.e.}}^{\text{rwa}} = \frac{\hbar\Omega_1(\vec{r})}{2} [\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger] \quad \Omega_1(\vec{r}) : \text{pulsation de Rabi en } \vec{r} \text{ quand un seul photon est présent}$$

→ Couple uniquement deux niveaux d'une même multiplicité:

$$\langle e, N-1 | \hat{V}_{\text{d.e.}}^{\text{rwa}} | g, N \rangle = \frac{\hbar\Omega_1(\vec{r})}{2} \sqrt{N}.$$



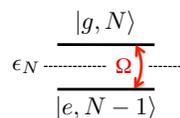
### Les états propres de l'atome habillé

Hamiltonien pour la multiplicité  $\{|g, N\rangle, |e, N-1\rangle\}$

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{pmatrix} + \epsilon_N = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} + \epsilon_N.$$

$$\epsilon_N = (N - \frac{1}{2})\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_0$$

$$\tan[2\theta(\vec{r})] = \Omega(\vec{r})/\Delta$$



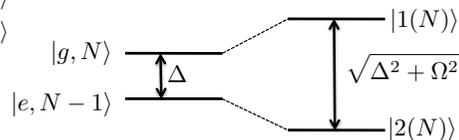
Vecteurs propres :

$$|1(N)\rangle = \cos\theta |g, N\rangle + \sin\theta |e, N-1\rangle$$

$$|2(N)\rangle = \sin\theta |g, N\rangle - \cos\theta |e, N-1\rangle$$

Energies associées :

$$E_{N,\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} + \epsilon_N$$



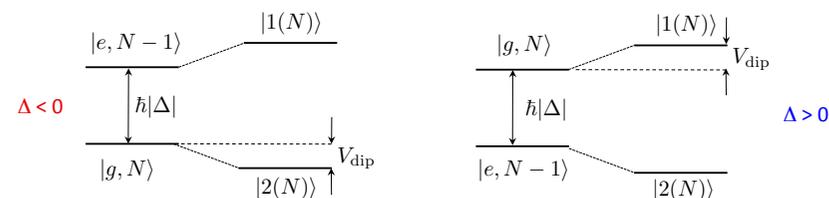
### Le potentiel dipolaire retrouvé

Le résultat  $E_{N,\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} + \epsilon_N$  devient pour  $|\Omega| \ll |\Delta|$

$$N\hbar\omega + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta} \text{ pour } |g\rangle, \quad (N-1)\hbar\omega + \hbar\omega_0 - \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta} \text{ pour } |e\rangle$$

Potentiel dipolaire = déplacement lumineux du niveau  $|g\rangle$

Déplacement vers le bas ou vers le haut, selon que  $\Delta < 0$  ou  $\Delta > 0$  :



## L'état habillé « intéressant »

L'état propre issu de  $|g\rangle$  s'écrit :  $|\overline{g, N}\rangle(\vec{r}) \approx |g, N\rangle + \frac{\Omega(\vec{r})}{2\Delta} e^{i\varphi(\vec{r})} |e, N-1\rangle$ .

Cet état permet de retrouver toutes les quantités atomiques intéressantes dans la limite basse intensité et à l'approximation du champ tournant :

- Élément de matrice  $\rho_{eg}$  conduisant au dipôle moyen :

$$\rho_{eg} = \langle e, N-1 | \left( \overline{|g, N\rangle \langle g, N|} \right) |g, N\rangle = \frac{\Omega e^{i\varphi}}{2\Delta}$$

- Population de l'état excité :  $\Pi_e = \langle e, N-1 | \left( \overline{|g, N\rangle \langle g, N|} \right) |e, N-1\rangle = \frac{\Omega^2}{4\Delta^2}$   
dont on déduit le taux d'émission spontanée  $\gamma = \Gamma \Pi_e$
- Phases géométriques pour générer des champs de jauge artificiels...

## La transition de résonance des alcalins

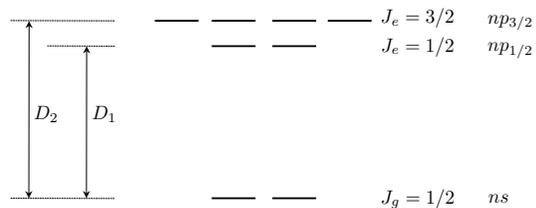
Cas important : atomes utilisés dans la majorité des expériences

Transition de résonance  $ns \leftrightarrow np$ , avec  $n=2$  (Li),...,  $n=6$  (Cs)

Spin électronique non nul : structure fine qui cause un clivage du niveau excité  $np$  en deux sous-niveaux  $np_{1/2}$  et  $np_{3/2}$

Spin nucléaire  $I$  non nul : clivage du niveau fondamental et du niveau excité

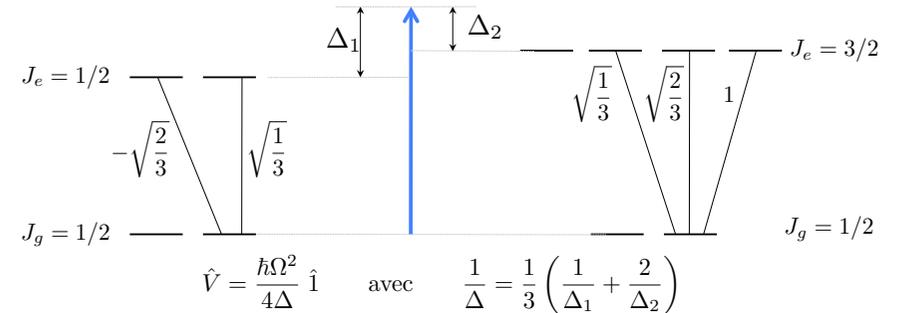
En absence de spin nucléaire :



## 3. Le cas des atomes alcalins

### Alcalin sans spin nucléaire & polarisation linéaire

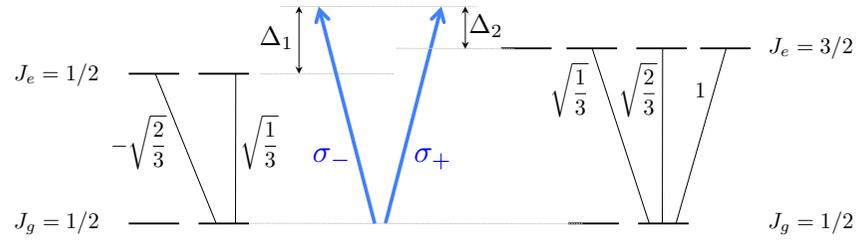
Amplitude des couplages pour les deux transitions  $D_1$  et  $D_2$  :



Si  $|\Delta_{1,2}| \ll$  structure fine,  $\Delta \approx \Delta_1 \approx \Delta_2$ : on retrouve l'atome à deux niveaux

Cas particulier  $\Delta_2 \approx -2 \Delta_1$ : pas de déplacement lumineux pour une polarisation linéaire

## Alcalin sans spin nucléaire & polarisation circulaire



Pour l'état  $m_z=+1/2$ :

$$\begin{cases} \text{Polarisation } \sigma_+ : & \hat{V} = \frac{\hbar\Omega^2}{4} \frac{1}{\Delta_2} \\ \text{Polarisation } \sigma_- : & \hat{V} = \frac{\hbar\Omega^2}{4} \left( \frac{2}{3\Delta_1} + \frac{1}{3\Delta_2} \right) \end{cases}$$

Pour l'état  $m_z=-1/2$ , conclusions inversées

Potentiel dépendant du spin équivalent à un champ magnétique orienté selon l'axe z

## Alcalin sans spin nucléaire & polarisation quelconque

Vecteur polarisation  $\epsilon$  complexe :  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{\epsilon} \mathcal{E}(\vec{r}) e^{i(\omega t - \varphi)} + \text{c.c.}$

Vecteur fréquence de Rabi :  $\hbar\Omega_\alpha = -d_0 \mathcal{E}(\vec{r})(\vec{\epsilon} \cdot \vec{u}_\alpha) \quad \alpha = x, y, z$

Opérateur déplacement lumineux dans le sous-espace  $J_g=1/2$

$$\hat{V} = \frac{\hbar|\vec{\Omega}|^2}{4\Delta} \hat{1} + \vec{B} \cdot \hat{\vec{S}}, \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\Delta_1} + \frac{2}{\Delta_2} \right)$$

où le champ magnétique effectif vaut  $\vec{B} = \frac{i}{6} \left( \frac{1}{\Delta_2} - \frac{1}{\Delta_1} \right) \vec{\Omega} \times \vec{\Omega}^*$

On retrouve les cas particuliers précédents  $\begin{cases} \text{Polarisation linéaire : } \vec{\Omega} \text{ réel, } \vec{B} = 0 \\ \text{Polarisation circulaire } \vec{u}_x \pm i\vec{u}_y : \\ \vec{B} \text{ parallèle à } \vec{u}_z \end{cases}$

## Remarques sur le cas de la polarisation quelconque (1)

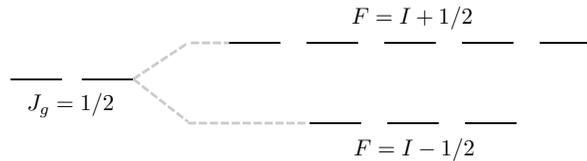
- Pour un désaccord comparable à la structure fine, le déplacement lumineux vectoriel en  $\vec{B} \cdot \hat{\vec{S}}$  est comparable au terme scalaire en  $\frac{\hbar|\vec{\Omega}|^2}{4\Delta} \hat{1}$
- Partie vectorielle non nulle pour le désaccord  $\Delta_2 = -2\Delta_1$  annulant la partie scalaire.
- Pas de transitions directes  $\Delta m \geq 2$

## Remarques sur le cas de la polarisation quelconque (2)

- Pour des grands désaccords, la partie vectorielle décroît comme  $1/\Delta^2$ . Elle devient donc rapidement négligeable devant la partie scalaire, qui ne décroît que comme  $1/\Delta$ .  
Si  $\Delta \gg$  structure fine, cette dernière est négligeable pendant le temps  $\Delta^{-1}$  associé à l'interaction atome-lumière : on se ramène à la transition  $J_g=0 \leftrightarrow J_e=1$ .
- Le champ magnétique fictif peut avoir des variations spatiales sur des échelles de l'ordre de la longueur d'onde optique.

## Prise en compte de la structure hyperfine

Le noyau a un spin nucléaire  $I$  et l'interaction hyperfine clive le niveau fondamental en deux sous-niveaux  $F = I \pm 1/2$  (figure ci-dessous pour  $I = 3/2$ , donc  $F = 1$  et  $2$ )



Pour  $\Delta \gg$  structure hyperfine  $\gg V_{\text{dip}}$ , le théorème de Wigner-Eckart donne :

$$\hat{V}_{\text{dip}} = \frac{\hbar |\vec{\Omega}|^2}{4\Delta} \hat{1} + \vec{B}' \cdot \hat{F} \quad \text{avec} \quad \vec{B}' = \pm \frac{\vec{B}}{2I + 1}$$

*Champs magnétiques effectifs opposés pour les deux niveaux hyperfins*

## Pourquoi une approche quantique ?

Jusqu'ici, nous avons traité classiquement le mouvement de l'atome. Mais beaucoup d'applications des pièges et réseaux optiques font appel à la nature quantique de ce mouvement :

- Bandes d'énergie et effet tunnel
- Etats minimaux
- Oscillations de Bloch
- Phases géométriques, points de Dirac

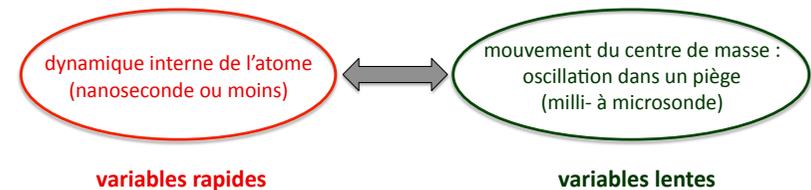
La structure du traitement semi-classique est presque directement transposable.

N.B. Pour simplifier, nous traiterons ici le cas d'un atome à deux niveaux

## 4. Approche quantique

### Variables lentes et variables rapides

Problème « standard » d'élimination de variables rapides au profit de variables lentes



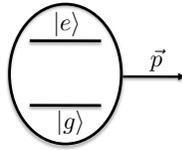
$$\text{Hamiltonien total : } \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}_{\text{dip.elec.}} + \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e|$$

auquel il faut ajouter l'évolution irréversible par émission spontanée.

## Comment faire cette élimination adiabatique (1) ?

L'état de l'atome est décrit par une matrice densité qui agit à la fois dans l'espace interne et l'espace externe

$$\langle \alpha, \vec{r} | \hat{\rho} | \beta, \vec{r}' \rangle \quad \alpha, \beta = e, g$$



Considérons l'évolution de  $\hat{\rho}_{eg} = \langle e | \hat{\rho} | g \rangle$  : opérateur vis-à-vis des variables externes seulement

$$\frac{d\hat{\rho}_{eg}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{\rho}_{eg} \right] - (i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2})\hat{\rho}_{eg} - i\Omega \cos(\omega t - \varphi) (\hat{\rho}_{gg} - \hat{\rho}_{ee})$$

- On néglige la fraction d'atomes dans l'état excité.
- On suppose que l'évolution de  $\rho_{eg}$  due aux variables internes (fréquences  $\Delta = \omega - \omega_0$  et  $\Gamma$ ), est beaucoup plus rapide que celle due aux variables externes (énergie cinétique  $p^2 / 2m$ ).

## Comment faire cette élimination adiabatique (2) ?

A partir de :

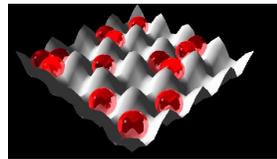
$$\frac{d\hat{\rho}_{eg}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{\rho}_{eg} \right] - (i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2})\hat{\rho}_{eg} - i\Omega \cos(\omega t - \varphi) (\hat{\rho}_{gg} - \hat{\rho}_{ee})$$

on obtient :

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = \frac{\Omega}{2} \left[ \frac{e^{-i(\omega t - \varphi)}}{\omega - \omega_0} - \frac{e^{i(\omega t - \varphi)}}{\omega + \omega_0} \right] \hat{\rho}_{gg}(t)$$

$\hat{\rho}_{eg}$  et  $\hat{\rho}_{ge}$  suivent adiabatiquement l'évolution beaucoup plus lente de l'opérateur densité restreint au niveau fondamental  $|g\rangle$

## Hamiltonien effectif pour le centre de masse atomique



On reporte le résultat obtenu pour  $\hat{\rho}_{eg}$  et  $\hat{\rho}_{ge}$  dans  $\frac{d\hat{\rho}_{gg}}{dt}$

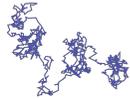
$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}_{gg}}{dt} &= \frac{d\hat{\rho}_{gg}}{dt} \Big|_{\text{em.sp.}} + \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{\rho}_{gg} \right] \pm i\Omega \cos(\omega t - \varphi) (\hat{\rho}_{eg} - \hat{\rho}_{ge}) \\ &\approx \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{\text{dip}}(\hat{r}), \hat{\rho}_{gg} \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire :  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{\text{dip}}(\hat{r})$  avec  $V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\hbar\Omega^2(\vec{r})}{4\Delta}$

- On s'est limité ici à l'ordre le plus bas non nul en  $1/\Delta$
- On a lissé les termes en  $\exp(\pm 2 i \omega t)$
- Les termes en  $\Gamma \rho_{ee}$  sont négligeables à cet ordre du calcul.

## 5. Réseau rouge ou réseau bleu ?

## Emission spontanée : source de chauffage à minimiser

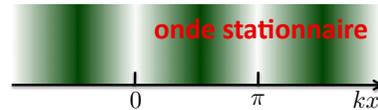


**Première étape :** minimiser la population de l'état excité  $\Pi_e = \Omega^2 / (4\Delta^2)$   
pour une valeur donnée de  $V_{\text{dip}} = \hbar\Omega^2 / (4\Delta)$

Conduit à choisir  $\Omega$  et  $\Delta$  les plus grands possibles :  
en gardant  $\Omega^2/\Delta$  constant, la quantité  $\Omega^2/\Delta^2$  tend vers 0 si  $\Omega, \Delta$  deviennent très grands

Réseau optique :  $\Omega(x) = \Omega_0 \sin(kx)$

$$V_{\text{dip}}(x) = V_0 \sin^2 kx, \quad V_0 = \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\Delta}$$



**Deuxième étape :** une fois déterminé le couple  $\Omega_0, |\Delta|$ , quel signe choisir pour  $\Delta$  ?

- Pour  $\Delta > 0$  (bleu), les atomes sont piégés aux noeuds.
- Pour  $\Delta < 0$  (rouge), les atomes sont piégés aux ventres.

## Une réponse naïve... mais incorrecte ?

Onde stationnaire :

$$\Omega(x) = \Omega_0 \sin(kx)$$



Pour des valeurs données de  $\Omega_0$  et de  $|\Delta|$ , on pourrait penser qu'il vaut mieux prendre  $\Delta > 0$ , pour mettre les atomes aux noeuds ( $kx = 0$  modulo  $\pi$ ) puisqu'il n'y a pas de lumière en ces points.

**Réponse naïve invalidée par Gordon et Ashkin :**

le coefficient de diffusion en impulsion (qui caractérise le chauffage lié à l'émission spontanée) est le même en tout point de l'onde stationnaire (noeud ou ventre en particulier) et il ne dépend pas du signe de  $\Delta$ .

**Comment comprendre ce résultat paradoxal ?**

## Cas d'un réseau très profond (pas d'effet tunnel entre sites)

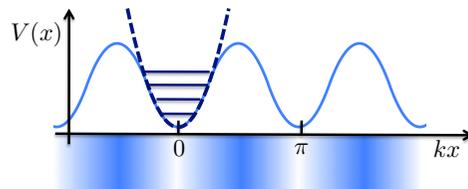
**Désaccord bleu :**

$$V(x) = V_0 \sin^2(kx) \quad V_0 > 0$$

Au voisinage de  $x = 0$  :

$$V(x) \approx V_0 k^2 x^2 \equiv \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

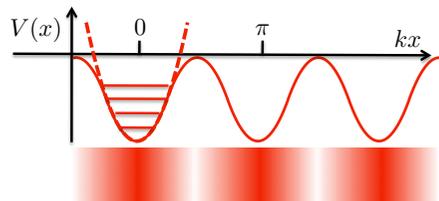
Etats propres : fonctions de Hermite  $H_n(x/a_{\text{oh}})$   $a_{\text{oh}} = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$   $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$



**Désaccord rouge :**

$$V(x) = V_0 \cos^2(kx) \quad V_0 < 0$$

$$V(x) \approx V_0 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$



## Transitions Raman dans un réseau très profond

Processus d'émission spontanée : transitions entre ces niveaux d'énergie



« Cascade radiative » dans le point de vue de l'atome habillé :

- $|g, N + 1\rangle$  a un recouvrement non nul (faible) avec  $|e, N\rangle$  et il est donc instable du point de vue de l'émission spontanée.
- Après émission d'un photon, l'atome tombe sur  $|g, N\rangle$ , qui a lui-même un recouvrement non nul (fort) avec  $|g, N\rangle$

## Les taux de transition $n \rightarrow n'$

Calcul de ces taux par la règle d'or de Fermi

Etat initial :

$$\langle x | \Psi_n^{(N+1)} \rangle = H_n(x) \{ \cos[\theta(x)] |g, N+1\rangle + \sin[\theta(x)] |e, N\rangle \}$$

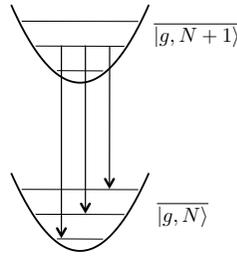
Taux de passage vers un état final  $H_{n'}$  avec un photon spontané  $k'$  :

$$\begin{aligned} \gamma_{n \rightarrow n'}(k') &\propto \left| \int H_{n'}(x) H_n(x) e^{ik'x} \sin[\theta(x)] \cos[\theta(x)] dx \right|^2 \\ &\propto \left| \frac{1}{2\Delta} \int H_{n'}(x) H_n(x) e^{ik'x} \Omega(x) dx \right|^2 \end{aligned}$$

où on a utilisé l'approximation  $\sin(2\theta) \approx \Omega/\Delta$

Simplification liée au régime de Lamb-Dicke: l'extension spatiale des fonctions

$H_n, H_{n'}$  est supposée petite devant la longueur d'onde lumineuse :  $e^{ikx} \approx 1 + ikx$



## Le cas d'un réseau bleu

L'expression générale

$$\gamma_{n \rightarrow n'}(k') \propto \left| \int H_{n'}(x) H_n(x) e^{ik'x} \Omega(x) dx \right|^2$$

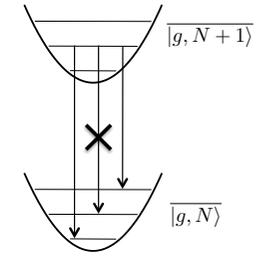
avec  $\Omega(x) = \Omega_0 \sin(kx) \approx \Omega_0 kx$  devient

$$\gamma_{n \rightarrow n'} \propto \Omega_0^2 |\langle H_{n'} | k\hat{x} | H_n \rangle|^2$$

ou encore :  $\gamma_{n \rightarrow n'} = \frac{\gamma_0}{2} (ka_{\text{oh}})^2 [(n+1)\delta_{n',n+1} + n\delta_{n',n-1}]$

où on pose  $\gamma_0 = \Gamma \Omega_0^2 / (4\Delta^2)$  (taux d'émission spontanée à un ventre)

- Forte réduction du taux d'émission par rapport au taux  $\gamma_0$ , par le facteur  $(ka_{\text{oh}})^2 \ll 1$
- L'émission d'un photon s'accompagne forcément d'un changement de niveau.



## Le cas d'un réseau rouge

L'expression générale

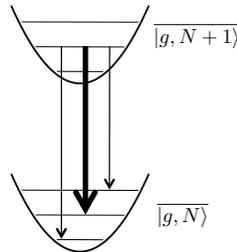
$$\gamma_{n \rightarrow n'}(k') \propto \left| \int H_{n'}(x) H_n(x) e^{ik'x} \Omega(x) dx \right|^2$$

avec  $\Omega(x) = \Omega_0 \cos(kx) \approx \Omega_0$  devient

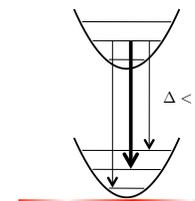
$$\gamma_{n \rightarrow n'} \propto \Omega_0^2 |\langle H_{n'} | 1 + ik'\hat{x} | H_n \rangle|^2$$

ou encore :  $\gamma_{n \rightarrow n'} = \gamma_0 \left\{ \delta_{n,n'} + \frac{(ka_{\text{oh}})^2}{2} [(n+1)\delta_{n',n+1} + n\delta_{n',n-1}] \right\}$

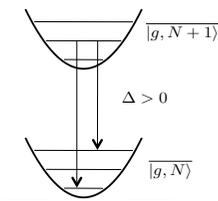
- Le taux de diffusion de photons est élevé :  $\approx \gamma_0$
- Le terme dominant est  $\gamma_0 \delta_{n,n'}$ , c'est-à-dire une émission spontanée de photon sans changement de niveau de vibration.



## Comparaison réseau bleu - réseau rouge



Pour un désaccord rouge, taux d'émission spontanée élevé : les photons sont majoritairement émis sur la raie  $n \rightarrow n$ .



Pour un désaccord bleu, taux d'émission spontanée faible : les photons sont uniquement émis sur les raies  $n \rightarrow n \pm 1$ .

**Les taux  $n \rightarrow n \pm 1$  (et donc le chauffage) sont les mêmes !**

En présence d'effet tunnel dans le réseau, la raie  $n \rightarrow n$  (sans changement de bande) peut néanmoins induire de la décohérence