

Cohérence et superfluidité dans les gaz atomiques

Cours 3

Gaz en interaction et critère de Landau

Jean Dalibard

Chaire *Atomes et rayonnement*

Année 2015-16



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

Le but de ce chapitre

Ce que nous avons vu aux cours précédents

- Le gaz parfait saturé
- Les deux critères de superfluidité
 - Rigidité de phase (vrai aussi pour le gaz parfait)*
 - Métastabilité des courants permanents (interactions indispensables)*

Aujourd'hui : description plus détaillée du rôle des interactions

- Discussion qualitative de différents rôles possibles
- Traitement quantitatif dans un modèle de champ moyen
 - L'équation de Gross-Pitaevskii et l'approche de Bogoliubov*

1.

Quels rôles pour les interactions ?

Elles empêchent la fragmentation

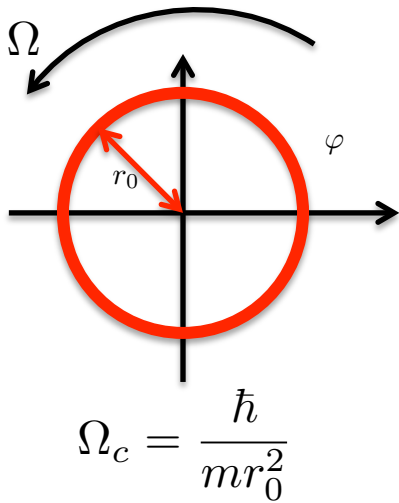
Elles peuvent favoriser l'hybridation

Elles conduisent à une intrication

+ modification du point critique et du comportement au voisinage de ce point

Anneau tournant et dégénérescences

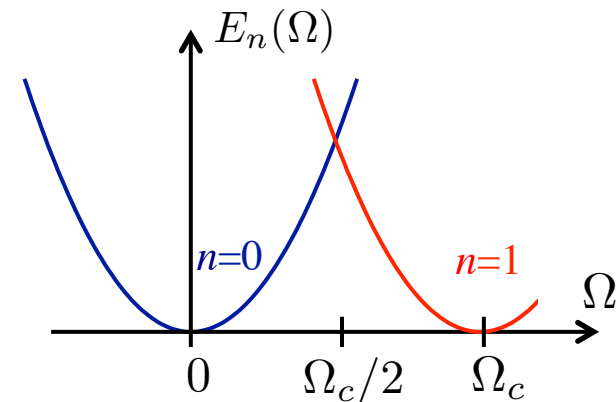
L'hamiltonien d'une particule dans un anneau tournant :



$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m r_0^2} \left(i \frac{d}{d\varphi} + \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2$$

Etats propres : $e^{i n \varphi} / \sqrt{2\pi}$

$$E_n(\Omega) = \frac{\hbar^2}{2m r_0^2} \left(n - \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2$$



Au point $\Omega_c/2$, dégénérescence des états propres à une particule

$$\psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (n = 0)$$

$$\psi_b(x) = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (n = 1)$$

Gaz parfait dans un anneau tournant

Puisque les états à une particule ψ_a et ψ_b sont dégénérés, tous les états à N particules du type

$$|N_a, N_b\rangle \equiv |N_a : \psi_a ; N_b : \psi_b\rangle \quad \text{avec} \quad N_a + N_b = N$$

sont également dégénérés

Ce sont des états fragmentés :

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} N_a & 0 \\ 0 & N_b \end{pmatrix}$$

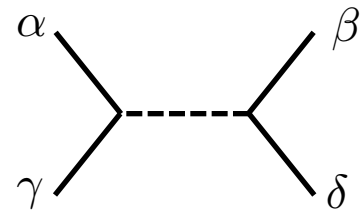
Comment les interactions modifient-elles ce résultat ?

Interaction de contact : $V(x_1 - x_2) = g \delta(x_1 - x_2)$

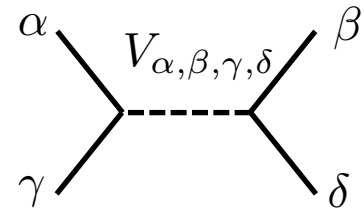
Éléments de matrice :

$$V_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \langle 1 : \psi_\alpha ; 2 : \psi_\beta | \hat{V} | 1 : \psi_\gamma ; 2 : \psi_\delta \rangle$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{a, b\}$$



Le potentiel d'interaction



Parmi les 16 éléments de matrice possibles, la conservation du moment cinétique et l'uniformité de la densité entraînent que 6 seulement sont non nuls

termes « directs » : $V_{\text{dir}} \equiv V_{aaaa} = V_{bbbb} = V_{abab} = V_{baba} = \frac{g}{2\pi r_0}$

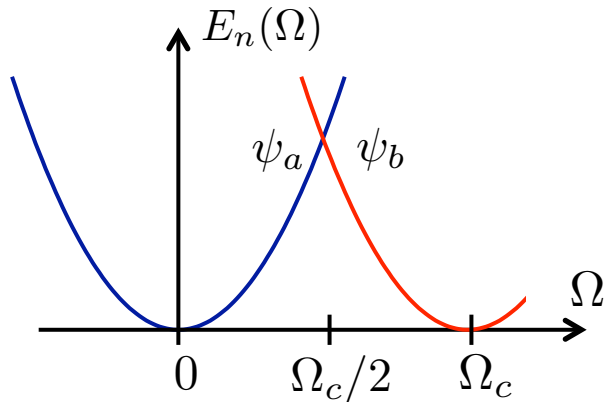
termes « d'échange » : $V_{\text{ech}} \equiv V_{abba} = V_{baab} = \frac{g}{2\pi r_0}$

La forme générale du potentiel d'interaction en seconde quantification se simplifie alors pour donner :

$$\begin{aligned}\hat{V} &= \frac{V_{\text{dir}}}{2} \left[\hat{N}_a(\hat{N}_a - 1) + \hat{N}_b(\hat{N}_b - 1) + 2\hat{N}_a\hat{N}_b \right] + V_{\text{ech}} \hat{N}_a\hat{N}_b \\ &= \frac{V_{\text{dir}}}{2} \hat{N}(\hat{N} - 1) + V_{\text{ech}} \hat{N}_a\hat{N}_b\end{aligned}$$

Les interactions empêchent la fragmentation

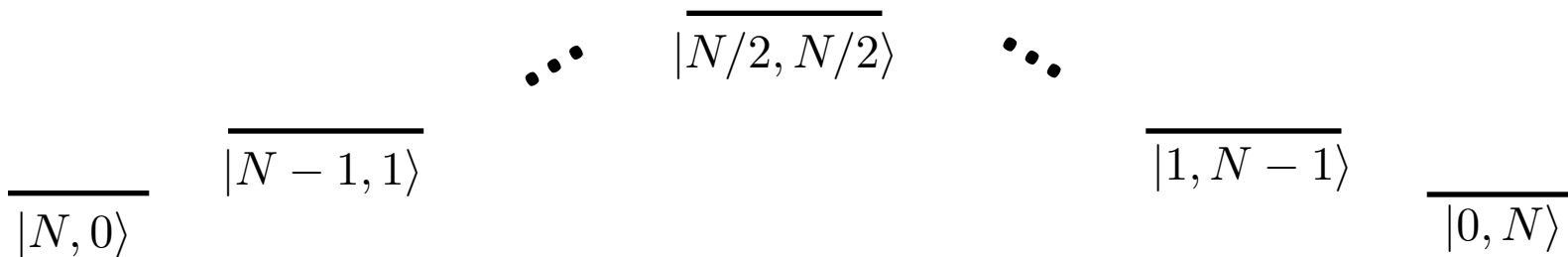
En absence d'interaction, dégénérescence des états $|N_a, N_b\rangle$ avec $N_a + N_b = N$



La contribution du terme d'échange dans

$$\hat{V} = \frac{V_{\text{dir}}}{2} \hat{N}(\hat{N} - 1) + V_{\text{ech}} \hat{N}_a \hat{N}_b$$

va lever cette dégénérescence



Barrière d'énergie macroscopique ($\sim N g\rho^{1D}$) qui protège $|N, 0\rangle$ et $|0, N\rangle$

Les interactions empêchent la fragmentation

Les interactions peuvent favoriser l'hybridation

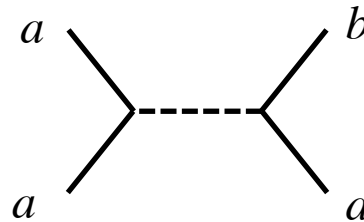
Les interactions conduisent à une intrication

Gaz dans une boîte

Conditions aux limites de Dirichlet $\psi(0) = \psi(L) = 0$

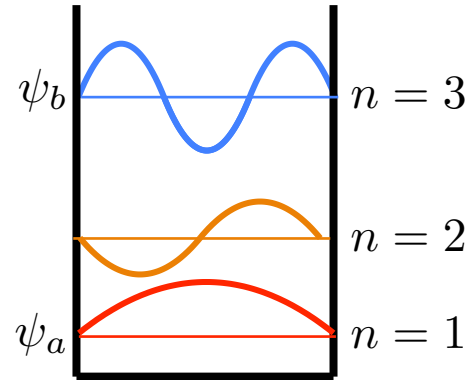
Interactions de contact : $V(x_1 - x_2) = g \delta(x_1 - x_2)$

Dans cette géométrie, on a un élément de matrice non nul pour le processus



Élément de matrice :
$$V_{aaab} = \iint \psi_a^*(x_1) \psi_b^*(x_2) g \delta(x_1 - x_2) \psi_a(x_1) \psi_a(x_2) dx_1 dx_2$$

$$= g \int |\psi_a(x)|^2 \psi_b^*(x) \psi_a(x) dx$$



$$\psi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$$

Avec une fonction d'onde « hybridée » du type $\sqrt{1 - \epsilon^2} \psi_a(x) + \epsilon \psi_b(x)$, on augmente la probabilité de présence au voisinage du bord : plus grande taille effective

Abaissement de l'énergie par hybridation

On considère un état de condensat pur :

$$|\Psi\rangle = |1 : \psi\rangle \otimes |2 : \psi\rangle \otimes \dots \otimes |N : \psi\rangle \quad \text{avec} \quad \psi(x) = \sqrt{1 - \epsilon^2} \psi_a(x) + \epsilon \psi_b(x)$$

et on calcule l'énergie moyenne. Est-elle abaissée pour $\epsilon \neq 0$?

Pour le gaz parfait, non.

Pour le gaz en interactions répulsives, c'est possible :

- On paye l'énergie à une particule supplémentaire $N(E_b - E_a) \epsilon^2$
- On gagne l'énergie d'interaction $2N^2 V_{aaab} \epsilon$

Pour ϵ assez petit, le gain l'emporte toujours sur le coût

L'optimisation de l'hybridation

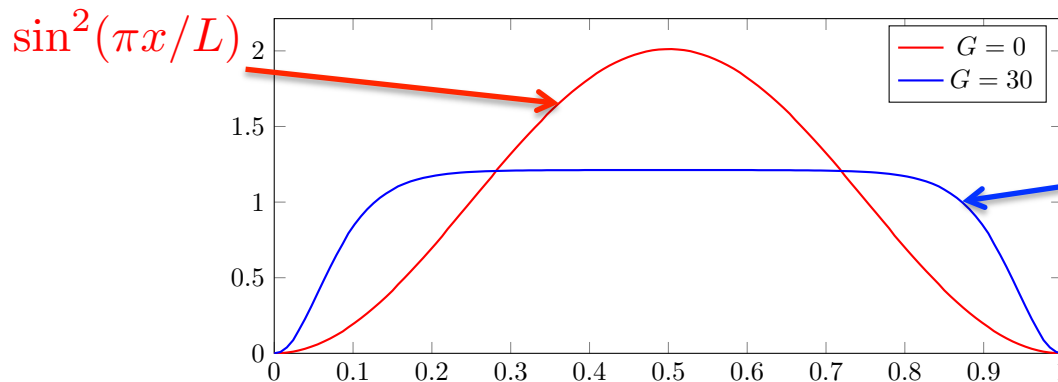
On a intérêt à fabriquer un état condensé

$$|\Psi\rangle = |1 : \psi\rangle \otimes |2 : \psi\rangle \otimes \dots \otimes |N : \psi\rangle$$

en mélangeant l'état fondamental à une particule ψ_a avec plusieurs états ψ_b

$$\psi(x) = \alpha\psi_a(x) + \sum_b \gamma_b\psi_b(x)$$

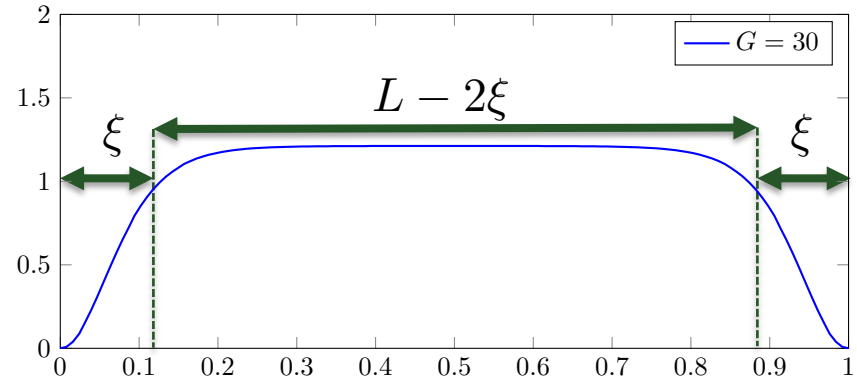
Les coefficients γ_b sont déterminés par une méthode variationnelle qui consiste à minimiser l'énergie moyenne : équation de Gross-Pitaevskii



Solution d'énergie minimale de l'équation de Gross-Pitaevskii

La longueur de cicatrison (*healing length*)

Quelle est la taille optimale de la « couche limite » au voisinage de la paroi ?



Energie moyenne à minimiser :

$$\underbrace{N \frac{\hbar^2}{2m\xi^2} \frac{2\xi}{L}} + \underbrace{\frac{N(N-1)}{2} \frac{g}{L-2\xi}}$$

Energie cinétique liée au gradient de la fonction d'onde sur la distance ξ

Energie d'interaction (contact) pour N atomes occupant une longueur $L - 2\xi$

A un facteur numérique près : $\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2mg\rho}} \quad \rho = N/L$

Se généralise immédiatement à 2D et 3D

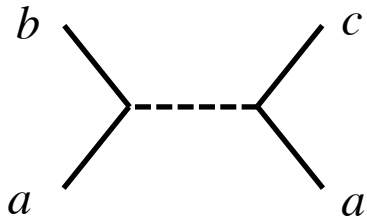
Les interactions empêchent la fragmentation

Les interactions peuvent favoriser l'hybridation

Les interactions conduisent à une intrication

Interactions et intrication

Les interactions peuvent également conduire à des diagrammes du type



Par exemple, une interaction de contact $g \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ entre deux atomes condensés dans l'état $\mathbf{p} = 0$ peut produire une paire d'atomes $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{q}$, $\mathbf{p} = -\hbar\mathbf{q}$

$$V_{bcaa} = \iint \left[\frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1}}{L^{3/2}} \right]^* \left[\frac{e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_2}}{L^{3/2}} \right]^* g \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \left[\frac{1}{L^{3/2}} \right] \left[\frac{1}{L^{3/2}} \right] d^3r_1 d^3r_2 = \frac{g}{L^3}$$

On abaisse alors l'énergie du fondamental en considérant un état du type

$$\alpha_0 |N : \psi_a, 0, 0\rangle + \alpha_2 |N - 2 : \psi_a, 1 : \psi_b, 1 : \psi_c\rangle + \dots$$

Interactions et intrication (2)

Un état du type $\alpha_0|N : \psi_a, 0, 0\rangle + \alpha_2|N - 2 : \psi_a, 1 : \psi_b, 1 : \psi_c\rangle$

n'est pas un condensat pur.

$$\text{Fraction condensée : } 1 - \frac{2|\alpha_2|^2}{N}$$

Méthode de Bogoliubov quantique (avec beaucoup de paires bc possibles)

Intrication due aux interactions, qui diminue la fraction condensée et induit l'état superfluide

2.

L'équation de Gross-Pitaevskii
ou
équation de Schrödinger non linéaire

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + G |\phi|^2 \phi$$

Le statut de l'équation de Gross-Pitaevskii

Pour l'hélium liquide, équation phénoménologique donnant l'évolution du paramètre d'ordre, sans relation directe avec la fonction d'onde à N corps

En optique, propagation d'une onde dans un milieu non linéaire à l'approximation paraxiale : décrit l'évolution du champ dans le plan orthogonal à l'axe de propagation

Pour des gaz d'atomes froids, se justifie à partir d'un modèle microscopique dans le cadre d'une approche variationnelle

Approche de Hartree

On considère N atomes en interaction dans un piège

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j) \quad \text{longueur de diffusion : } a_s$$

On cherche des solutions approchées, inspirées de la notion de condensat de BE

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \phi(\mathbf{r}_1) \dots \phi(\mathbf{r}_N)$$

Remplace le problème à N corps initial par un problème (non linéaire) à un corps

Fonctionnelle d'énergie pour une interaction de contact $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$
 $g = 4\pi\hbar^2 a_s / m$

$$\epsilon_{\text{GP}}(\phi) = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi|^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{Ng}{2} |\phi(\mathbf{r})|^4 \right) d^3r \quad N \gg 1$$

avec $\epsilon_{\text{GP}}(\phi) = \frac{1}{N} \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle$: énergie moyenne par particule

L'équation de Gross-Pitaevskii

Méthode variationnelle dépendant du temps :

Quelle est la variation temporelle à donner à la fonction de Hartree pour reproduire le plus fidèlement possible l'évolution de l'état à N corps ?

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \longrightarrow \phi(\mathbf{r}_1) \dots \phi(\mathbf{r}_N)$$

Lagrangien :
$$L(\Phi) = \int \frac{i\hbar}{2} \left(\Phi^* \dot{\Phi} - \dot{\Phi}^* \Phi \right) - \Phi^* \left(\hat{H} \Phi \right) d^3r_1 \dots d^3r_N$$

$$\longrightarrow L(\phi) = \int \frac{i\hbar}{2} \left(\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi \right) d^3r - \epsilon_{\text{GP}}(\phi)$$

Equation de Lagrange associée :

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) \phi + Ng |\phi|^2 \phi$$

Solutions stationnaires pour un système homogène

Les ondes planes sont solutions stationnaires de $i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + Ng |\phi|^2 \phi$

$$\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \mu t / \hbar)} \quad \text{normalisée dans une boîte de taille } L^3$$

$$\mu = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{Ng}{L^3} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + g\rho \quad \rho = N/L^3 \quad : \text{ densité spatiale}$$

potentiel chimique

L'énergie totale se calcule simplement pour ces solutions

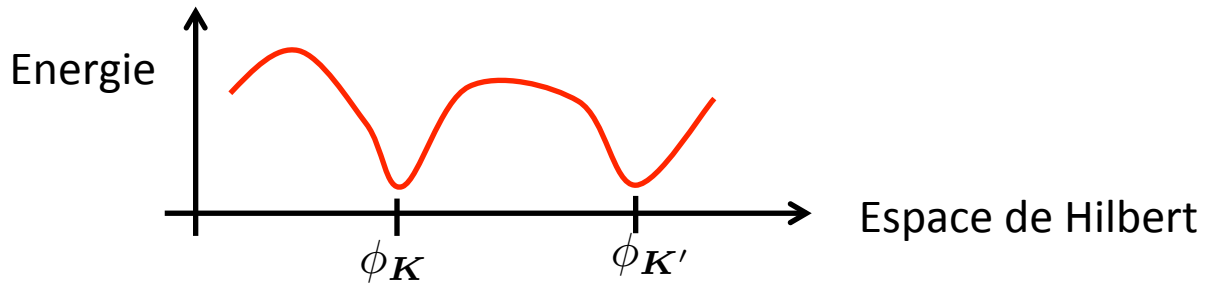
$$E = N\epsilon_{\text{GP}} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} N + \frac{N^2 g}{2L^3}$$

et on retrouve donc bien la définition du potentiel chimique :

$$\mu = \left. \frac{\partial E}{\partial N} \right|_{L^3}$$

Comment analyser les solutions de l'équation de GP

- La solution stationnaire $\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \mu t / \hbar)}$, correspondant à la vitesse $\mathbf{V} = \hbar \mathbf{K} / m$, est-elle stable ?



- Quel est le spectre d'excitation au voisinage d'une solution stationnaire donnée, par exemple $\phi_{\mathbf{K}=0}$?

Les deux questions conduisent à la même réponse : le critère de Landau

Métastabilité des solutions de l'équation de GP

Est-ce qu'une petite perturbation $\phi_{\mathbf{K}} \longrightarrow \phi_{\mathbf{K}} + \delta\phi$ augmente toujours l'énergie moyenne ?

Que prendre pour $\delta\phi$? On va choisir des perturbations en ondes planes

- une seule onde plane $\delta\phi \propto e^{i(\mathbf{K}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}$?
Dangereux compte tenu du caractère non-linéaire de l'équation

$$\phi\phi\phi^* = [e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}] e^{-i(\mathbf{K}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}} = e^{i(\mathbf{K}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}$$

- une somme de deux ondes plane : OK

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}}{L^{3/2}} (\phi_0 + u e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + v^* e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}})$$

$$\text{avec } \phi_0 = \sqrt{1 - |u|^2 - |v|^2} \quad \text{et} \quad |u|, |v| \ll 1$$

Comment l'énergie moyenne varie-t-elle avec les coefficients (u, v) ?

Surcoût en énergie de la perturbation

Calcul à l'ordre le plus bas non nul en (u, v) : forme quadratique

$$\Delta\epsilon = \epsilon_{\text{GP}}(u, v) - \epsilon_{\text{GP}}(0) = (u^*, v^*) \hat{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

où $\hat{\mathcal{H}}$ est une matrice 2x2 fonction de \mathbf{K} , \mathbf{q} , $g\rho$

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 + 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho & g\rho \\ g\rho & \frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{q}) + g\rho \end{pmatrix}$$

Il faut que cette forme quadratique soit positive quel que soit \mathbf{q}

- Interactions répulsives: $g > 0$ $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$
- Vitesse associée à l'onde principale pas trop grande : $V = \frac{\hbar K}{m} < c_s$

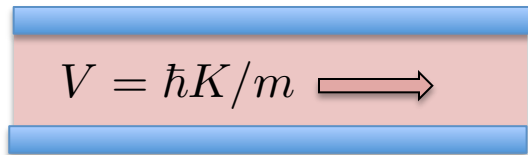
où la « vitesse du son » $c_s = \sqrt{g\rho/m}$ est liée à la force des interactions
 $mc_s^2 = g\rho$

Conclusion de cette première approche

Pour la solution stationnaire

$$\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \mu t / \hbar)}$$

la métastabilité (au moins vis-à-vis des perturbations de type onde plane) est assurée si la vitesse du condensat $\hbar K/m$ est inférieure à la vitesse du son



Écoulement sans dissipation

Vitesse du son : $c_s = \sqrt{g\rho/m}$

- Quelques millimètres/seconde pour les gaz d'atomes froids
- Pour He liquide superfluide, 240 m/s (mais la relation de dispersion est plus complexe que celle déduite de l'équation de Gross-Pitaevskii)

3.

L'approche de Bogoliubov (champ classique)

Quelle est la dynamique de $\phi(\mathbf{r}, t)$ au voisinage d'une solution stationnaire ?

$$\phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \mu t / \hbar)}$$

Equations du mouvement linéarisées

On reprend l'ansatz $\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} - \mu t/\hbar)}}{L^{3/2}} [\phi_0(t) + u(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + v^*(t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}]$

avec le choix de phase $\phi_0 \sim 1$. On l'injecte dans l'équation de GP

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{du}{dt} &= \mathcal{H}_{11}u + \mathcal{H}_{12}v \\ i\hbar \frac{dv^*}{dt} &= \mathcal{H}_{21}u^* + \mathcal{H}_{22}v^* \end{aligned} \quad \hat{\mathcal{H}} : \text{matrice réelle symétrique} \\ & \quad \text{obtenue plus haut}$$

Faut-il diagonaliser $[\mathcal{H}]$ pour avoir les modes propres ? Pas vraiment...

Il faut d'abord disposer d'équation fermées sur (u, v)

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \hat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} \\ -\mathcal{H}_{21} & -\mathcal{H}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{opérateur de Bogoliubov}$$

... complique quelque peu la situation car $\hat{\mathcal{L}}$ n'est pas hermitien, mais il reste heureusement diagonalisable (presque toujours)

Les modes propres de l'opérateur de Bogoliubov

Prenons le cas d'un condensat immobile pour simplifier : $\mathbf{K} = 0$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{-i\mu t/\hbar}}{L^{3/2}} [\phi_0(t) + u(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + v^*(t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}] \quad \phi_0 \sim 1$$

On peut écrire $\hat{\mathcal{L}}$ sous la forme :

$$\hat{\mathcal{L}} = \hbar\omega_q \begin{pmatrix} \cosh(2\alpha_q) & -\sinh(2\alpha_q) \\ \sinh(2\alpha_q) & -\cosh(2\alpha_q) \end{pmatrix} \quad \tanh(2\alpha_q) = \frac{-g\rho}{\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + g\rho}$$

et les modes propres sont $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \cosh \alpha_q \\ \sinh \alpha_q \end{pmatrix}$

Impulsion : $\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \gamma^2 \hbar \mathbf{q}$

Energie : $\epsilon_{\text{GP}}(\mathbf{q}) = \epsilon_{\text{GP}}(0) + \gamma^2 \hbar\omega_q \quad \epsilon_{\text{GP}}(0) = g\rho/2$

avec la relation de dispersion $\omega_q = \left[c_s^2 q^2 + \left(\frac{\hbar q^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2} \quad c_s = \sqrt{g\rho/m}$

Le spectre de Bogoliubov

Relation de dispersion : $\omega_q = \left[c_s^2 q^2 + \left(\frac{\hbar q^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}$

q petit : $\omega_q \approx c_s q$ $c_s = \sqrt{g\rho/m}$ phonons

q grand : $\hbar\omega_q \approx \underbrace{\frac{\hbar^2 q^2}{2m}} + \underbrace{g\rho}$

← énergie cinétique
d'une particule libre

→ énergie d'interaction entre la
particule rapide avec le condensat

Pourquoi faut-il payer cette énergie alors que la particule interagissait déjà avec le condensat avant d'être excitée ?

L'excitation fait passer de $|N, 0\rangle$ à $|N - 1, 1 : \mathbf{q}\rangle$: on paye l'énergie d'échange...

Transition entre les deux régimes : $q \sim mc_s/\hbar \sim 1/\xi$

ξ : longueur de cicatrisation

Spectre à basse énergie et théorème de Goldstone

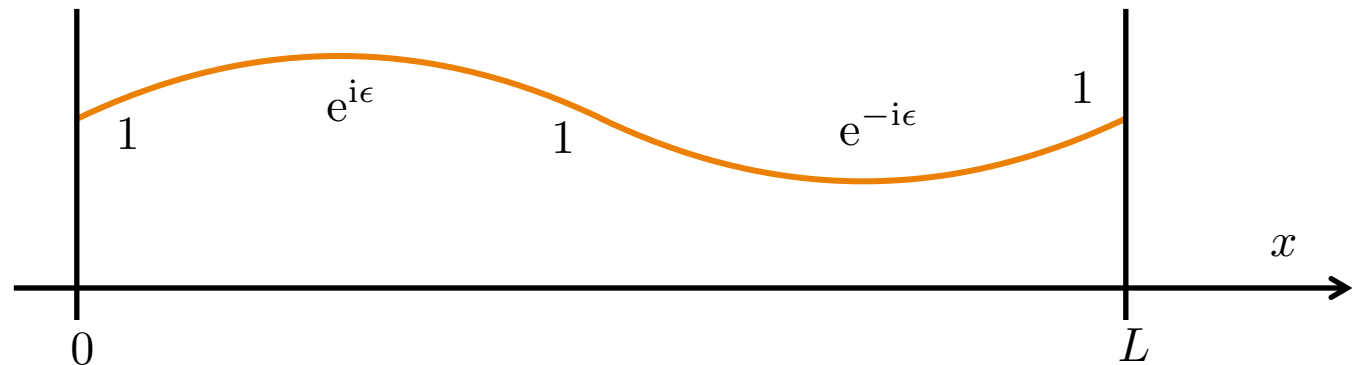
q petit : $\omega_q \approx c_s q$. En particulier, quand $q \rightarrow 0$, $\omega_q \rightarrow 0$

Pour ces modes « phononiques », les coefficients (u, v) sont tels que $u \approx -v \in \mathbb{R}$

Par exemple, pour le mode de plus bas vecteur d'onde $q = 2\pi/L$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} [1 + u e^{iqx} + v^* e^{-iqx}] \sim \frac{1}{L^{3/2}} [1 + 2i u \sin(2\pi x/L)]$$

Essentiellement
une fluctuation
de phase



La condensation dans l'état $1/L^{3/2}$ aurait aussi bien pu se faire dans $e^{i\theta}/L^{3/2}$: même énergie

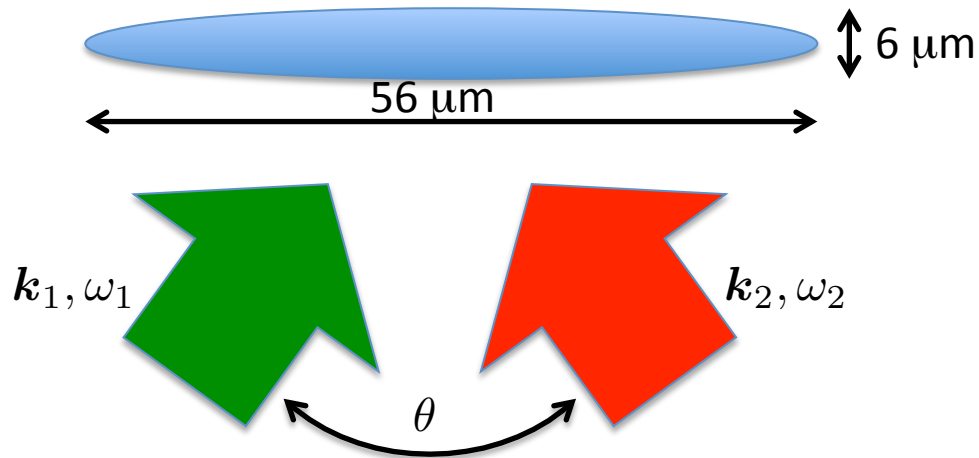
Brisure spontanée d'une symétrie continue : les fluctuations à grande échelle de la phase ne doivent pratiquement pas coûter d'énergie

Le spectre de Bogoliubov mesuré sur des atomes froids

Weizmann (2002)

Condensat de Rubidium quasi-pur : 10^5 atomes, fraction condensée $> 95\%$

Piège harmonique en forme de cigare, spectroscopie de Bragg

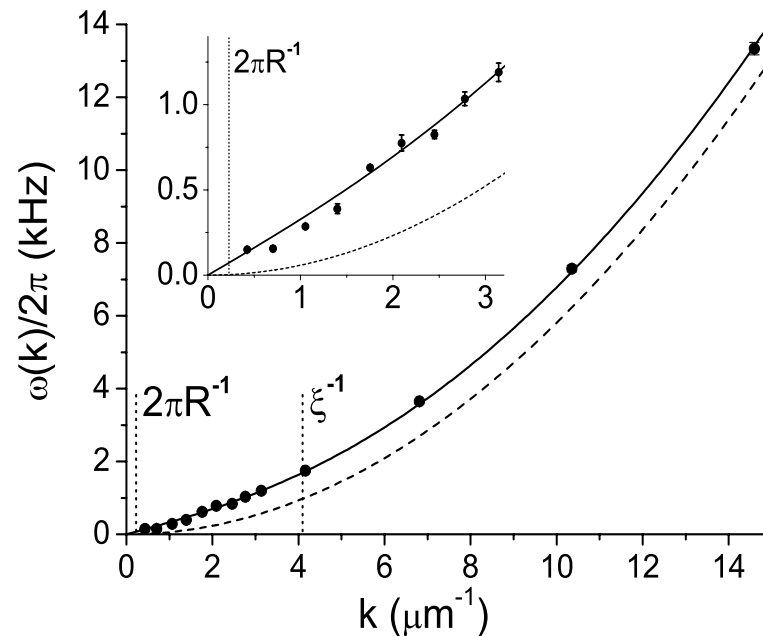
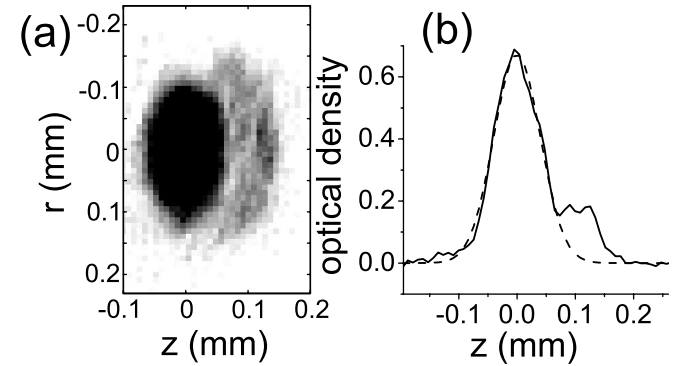


Un cycle absorption-émission stimulée transfère au nuage l'impulsion $\hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ (dépend de θ) et l'énergie $\hbar(\omega_1 - \omega_2)$

Le spectre de Bogoliubov mesuré sur des atomes froids (2)

Weizmann (2002)

Excitation de Bragg, puis temps de vol de 38 ms :



$c_s = 2.0$ mm/s

Le critère de Landau retrouvé

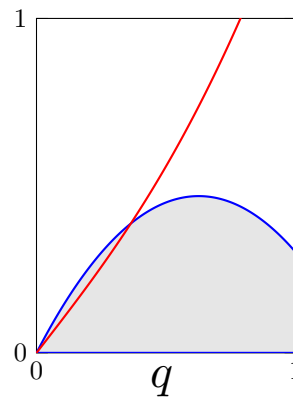
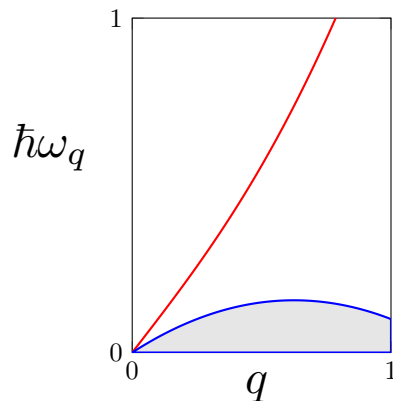
Objet de masse M en mouvement à vitesse \mathbf{V} dans le fluide au repos ($\mathbf{K} = 0$)

Cet objet peut-il déposer une excitation dans le superfluide, en passant à la vitesse \mathbf{V}' ?

$$\text{Conservation de l'énergie : } \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + N\gamma^2\hbar\omega_q$$

$$\text{Conservation de l'impulsion : } M\mathbf{V} = M\mathbf{V}' + N\gamma^2\hbar\mathbf{q}$$

On élimine \mathbf{V}' de ces deux équations : $\omega_q = \mathbf{q} \cdot \mathbf{V} - N\gamma^2 \frac{\hbar q^2}{2M}$



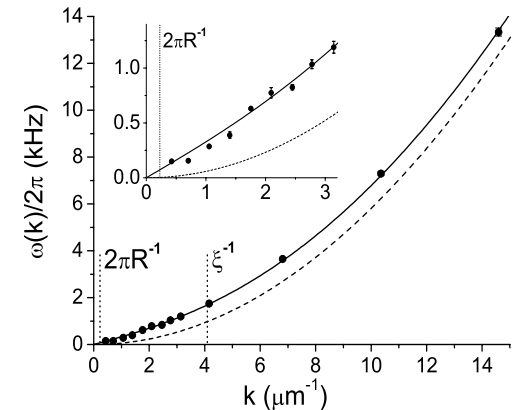
— : relation de Bogoliubov

Comparaison des pentes à l'origine :
pas de solution si $V < c_s$

Bilan de ce cours

L'équation de Gross-Pitaevskii fournit un moyen quantitatif pour évaluer la métastabilité des états d'un gaz en interaction

Spectre caractéristique en $\omega_q = \sqrt{q^2 + q^4}$



- Fournit un lien entre phonon $\omega_q \propto q$ et particule libre $\omega_q \propto q^2$
- Conduit au critère de Landau : métastabilité si la vitesse relative entre le gaz et un obstacle éventuel (ponctuel) est inférieure à la vitesse du son c_s