

# Chapitre 2

## Du gaz de Bose à l'état superfluide

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Comment caractériser l'ordre à longue portée?</b> . . . . .	<b>2</b>
1-1	La fonction $G_1$ . . . . .	2
1-2	Quelques procédures pour accéder à $G_1$ . . . . .	2
1-3	La méthode de la self-interférence . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Deux critères pour la superfluidité</b> . . . . .	<b>7</b>
2-1	Un atome unique dans un anneau . . . . .	7
2-2	L'anneau en rotation lente ( $\Omega \ll \Omega_c$ ) . . . . .	9
2-3	Existence de courants permanents . . . . .	10
2-4	L'expérience du NIST . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Vitesse superfluide et vitesse normale</b> . . . . .	<b>12</b>
3-1	Le modèle à deux fluides . . . . .	12
3-2	Condensation et vitesse superfluide . . . . .	13
3-3	Parois solides et vitesse normale. . . . .	14
<b>4</b>	<b>Densité superfluide et densité normale</b> . . . . .	<b>14</b>
4-1	Un fluide classique en rotation . . . . .	14
4-2	Réduction du moment d'inertie . . . . .	16
4-3	Les conditions aux limites distordues . . . . .	17
4-4	Bilan du modèle à deux fluides . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Appendice : changements de référentiel</b> . . . . .	<b>20</b>

---

Le but de ce chapitre est d'étudier le lien entre la condensation d'un gaz de particules bosoniques et son éventuelle superfluidité. Nous avons vu au chapitre précédent que la condensation de Bose–Einstein d'un fluide, qu'il soit parfait ou en interaction, se caractérise par une propriété mathématique simple : l'existence d'une valeur propre « macroscopique » pour l'opérateur densité à un corps, traduisant un ordre à longue portée. Nous allons donc commencer par décrire comment on peut accéder en pratique à cette quantité pour des gaz d'atomes froids.

Nous passerons ensuite au phénomène de superfluidité. La définition même de la superfluidité et la détermination des paramètres qui l'accompagnent – densité superfluide, vitesse superfluide – sont nettement moins simples. En fait, la notion même de superfluidité fait appel à des phénomènes physiques variés qu'il importe de bien identifier. Nous allons faire cette identification en prenant deux situations emblématiques de l'étude des superfluides (Leggett 2006); il s'agit « d'expériences de pensée » pour lesquelles le fluide est soit à l'équilibre, soit dans un état métastable. En ce qui concerne les atomes froids, ces expériences de pensée ont été réalisées récemment sur un montage du NIST (groupe de G. Campbell) et nous décrirons brièvement son protocole et ses résultats principaux.

Une fois bien identifiées ces deux situations, nous décrirons le modèle à deux fluides initialement proposé par Tisza (1938), puis approfondi<sup>1</sup> par

---

1. Nous faisons ici un raccourci historique abusif. Landau ne considérait pas que sa théorie approfondissait celle de Tisza, mais la corrigeait d'erreurs importantes. Il écrivait ainsi en

Landau (1941). Ce modèle a été proposé pour rendre compte de la superfluidité de l'hélium liquide, découverte par Kapitza (1938) et par Allen & Misener (1938). Le lien entre la superfluidité de l'hélium liquide et la condensation de Bose–Einstein (prédite 13 ans plus tôt) fut presque aussitôt proposé par London (1938b) [voir aussi London (1938a)]. Notons que London travaillait à l'époque à l'Institut Henri Poincaré et Tisza au Laboratoire de Physique Expérimentale du Collège de France dans le groupe de Langevin<sup>2</sup>.

Pour définir les différentes quantités pertinentes pour la caractérisation d'un état superfluide, nous allons nous appuyer à plusieurs reprises sur des changements de référentiel, passant du référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$  (supposé galiléen) à un autre référentiel  $\mathcal{R}'$ , qui pourra être en translation ou en rotation par rapport au laboratoire. Il nous a donc semblé utile de regrouper en appendice le formalisme permettant de traiter ce type de changement de référentiel en physique quantique.

## 1 Comment caractériser l'ordre à longue portée ?

### 1-1 La fonction $G_1$

La fonction  $G_1$  introduite au chapitre précédent constitue la caractérisation la plus directe de l'ordre en phase qui peut apparaître dans un fluide quantique. Elle se construit à partir de l'opérateur densité réduit à une par-

---

introduction de son article de 1941 (traduction par D. Ter Haar) : *L. Tisza suggested that helium II should be considered as a degenerate ideal Bose gas. He suggested that the atoms found in the normal state (a state of zero energy) move through the liquid without friction. This point of view, however, cannot be considered as satisfactory. Apart from the fact that liquid helium has nothing to do with an ideal gas, atoms in the normal state would not behave as "superfluid". On the contrary, nothing would prevent atoms in a normal state from colliding with excited atoms, i.e. when moving through the liquid they would experience a friction and there would be no superfluidity at all. In this way the explanation advanced by Tisza not only has no foundation in his suggestions but is in direct contradiction to them.*

2. Tisza, d'origine hongroise et ancien élève de Landau, continua sa carrière au MIT à partir de 1941. London, d'origine allemande, quitta son poste à Berlin en 1933 suite aux lois raciales de l'Allemagne nazie. Il occupa ensuite des postes temporaires à Oxford et Paris, avant d'émigrer aux USA en 1939 pour aller travailler à l'Université Duke, en Caroline du Nord.

ticule  $\hat{\rho}_1$  :

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} \rangle = \text{Tr} \left( \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\rho} \right), \quad (1)$$

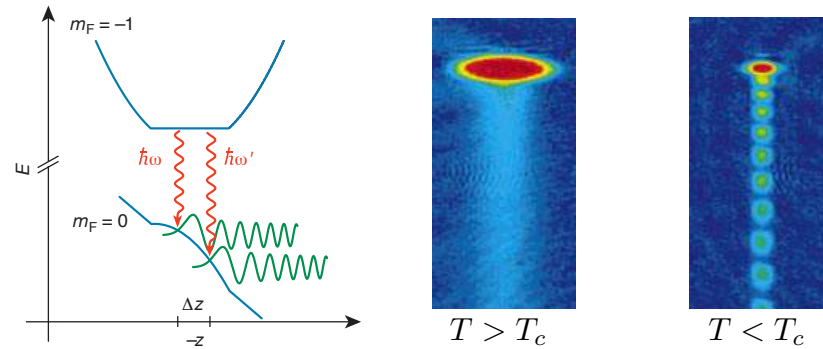
où la seconde expression fait appel à l'opérateur champ  $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$  de la seconde quantification, qui crée une particule au point  $\mathbf{r}$ . La fonction  $G_1$  caractérise donc les corrélations en phase et en amplitude pouvant exister entre deux points du gaz distants de  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ .

Comme souligné par Penrose & Onsager (1956), cette fonction  $G_1$  permet de généraliser la notion de condensation de Bose–Einstein à des gaz en interaction. En pratique, on rencontre trois types de situations dans la limite  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$  :

- $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  tend vers une limite finie non nulle, notée  $\psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}')$  : on est en présence d'un condensat et  $\psi_0$  est appelée *fonction d'onde du condensat*. Cette situation se produit à suffisamment basse température pour un gaz de Bose uniforme à 3D, qu'il soit parfait ou en interaction répulsive. Comme nous allons le voir dans ce chapitre, la rigidité de phase qu'elle implique dans le cas du gaz en interaction conduit à un état superfluide.
- $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  tend vers 0, mais avec une décroissance lente (algébrique) ; il n'y a donc pas d'échelle de longueur associée à cette décroissance. Par ailleurs, les interactions répulsives entre atomes réduisent fortement les fluctuations de densité. On parle alors de quasi-condensat (Kagan, Svistunov, et al. 1987), avec un quasi-ordre à longue portée. Cette situation, que l'on peut rencontrer par exemple pour un gaz de Bose homogène à 2D, conduit également à un état superfluide.
- $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  tend vers 0 « rapidement », c'est-à-dire comme une fonction exponentielle ou gaussienne, ce qui permet d'introduire une longueur de corrélation pour caractériser cette décroissance. Cette longueur diverge au point de condensation et sa variation avec la température dans la région critique nous renseigne sur la classe d'universalité de la transition.

### 1-2 Quelques procédures pour accéder à $G_1$

Depuis l'observation des premiers condensats avec des gaz d'atomes en 1995, un certain nombre de méthodes ont été développées pour accéder



**FIGURE 1.** Mesure de la fonction  $G_1$  par interférence de deux mini jets atomiques produits par extraction d'atomes d'un gaz piégé magnétiquement. Grâce à deux ondes radio-fréquence  $\omega$  et  $\omega'$ , on fait basculer le moment magnétique des atomes situés au voisinage immédiat des points  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  (ou plutôt des surfaces équipotentielles magnétiques passant par ces points). Ces atomes ne sont alors plus piégés et tombent sous l'effet de la gravité. Le contraste des interférences renseigne sur la cohérence en phase entre les points  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$ . Figure extraite de Bloch, Hänsch, et al. (2000).

à la fonction de corrélation à un corps  $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Il serait trop long de toutes les analyser en détail et nous allons dans la suite (§ 1-3) nous concentrer sur un schéma illustrant bien la puissance des techniques possibles. Mentionnons brièvement quelques autres méthodes qui ont également été mises en œuvre :

- La première technique consiste simplement à mesurer la distribution en impulsion  $N(\mathbf{p})$  du gaz et à utiliser la relation de Fourier entre  $N(\mathbf{p})$  et  $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  vue au cours précédent [voir par exemple Stenger, Inouye, et al. (1999)].
- Il est également possible d'extraire de manière sélective des atomes du voisinage immédiat des points  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$ , et de faire interférer les jets atomiques ainsi produits. Cette méthode a été utilisée par Bloch, Hänsch, et al. (2000) et nous avons reproduit sur la figure 1 deux résultats particulièrement significatifs de cette publication, montrant l'absence ou la présence de cohérence entre ces deux points, selon qu'on est au dessus

ou en dessous de la température critique du gaz.

- On peut faire interférer le système que l'on souhaite sonder avec une « référence de phase », c'est-à-dire un gaz composé de la même espèce atomique dont la géométrie est telle que sa phase est quasi-uniforme. C'est ce qui a été mis en œuvre par Corman, Chomaz, et al. (2014) [cf. figure 2] : on sonde la distribution de phase d'un gaz confiné dans un anneau en le faisant interférer avec un petit condensat central : les ondulations des franges d'interférence révèlent les fluctuations de phase le long de l'anneau [voir aussi Eckel, Jendrzejewski, et al. (2014)].
- On peut préparer deux gaz dans des conditions similaires (même forme, même densité, même température) et les faire interférer en laissant se recouvrir par une expansion balistique. L'analyse des interférogrammes donne accès à la fonction  $|G_1|^2$ , supposée la même pour les deux gaz. Cette technique a été mise en œuvre notamment pour l'étude de gaz de basse dimension [voir par exemple Hadzibabic, Krüger, et al. (2006) pour le cas bidimensionnel et Hofferberth, Lesanovsky, et al. (2007) pour le cas unidimensionnel].
- Depuis une dizaine d'années, on dispose de systèmes condensés hybrides, formés par des combinaisons d'excitons et de photons (Kasprzak, Richard, et al. 2006; Amo, Sanvitto, et al. 2009), voire même par des photons isolés (Klaers, Schmitt, et al. 2010). Ces systèmes possèdent des propriétés superfluides comme montré par Amo, Lefrère, et al. (2009). Une de leurs caractéristiques les plus remarquables est que la lumière qu'ils émettent contient l'information sur la phase locale du fluide ; une analyse interférométrique de cette lumière donne donc un accès direct à la fonction  $G_1$ . Nous repoussons l'étude de ces fluides quantiques au cours d'une année ultérieure, car leur description nécessite la prise en compte des processus dissipatifs entre lumière et matière [voir Carusotto & Ciuti (2013) pour une revue].

### 1-3 La méthode de la self-interférence

Dans ce paragraphe, nous allons décrire une méthode consistant à faire interférer un gaz atomique, condensé ou non, avec une copie de ce même

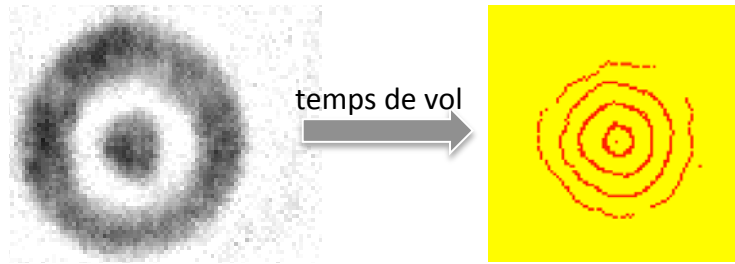


FIGURE 2. Gauche : gaz atomique composé d'un anneau dont on souhaite sonder la distribution de phase, et d'un disque central agissant comme une référence de phase. Droite : figure d'interférence entre l'anneau et le disque, obtenue en relâchant le confinement des atomes et en laissant se recouvrir les nuages issus de l'anneau et du disque. Les ondulations des franges sont essentiellement dues aux fluctuations de la phase dans l'anneau.

gaz déplacée d'une quantité déterminée  $\mathbf{a}$ . L'expérience donne accès à

$$\int G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{a}) d^3r, \quad (2)$$

ce qui permet de caractériser un éventuel ordre à longue portée en faisant varier  $\mathbf{a}$ . Cette expérience a initialement été menée par le groupe du NIST (Hagley, Deng, et al. 1999), puis reprise par plusieurs équipes, notamment par le groupe de Cambridge pour un gaz homogène (Navon, Gaunt, et al. 2015). Nous allons adopter ici une approche suffisamment générale pour qu'elle s'applique aux différentes configurations, puis nous l'illustrerons sur les résultats de Cambridge.

**Remarque préliminaire.** Le protocole de mesure que nous allons décrire conduit à un résultat qui ne dépend que de l'opérateur densité à un corps  $\hat{\rho}_1$ . On peut construire une infinité d'états à  $N$  corps du gaz conduisant au même opérateur densité à un corps, et donc au même résultat pour la mesure qui nous intéresse. Ainsi, si on considère un développement de l'opérateur  $\hat{\rho}_1$  sur sa base propre

$$\hat{\rho}_1 = \sum_j \Pi_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad \Pi_j \geq 0, \quad \sum_j \Pi_j = N, \quad (3)$$

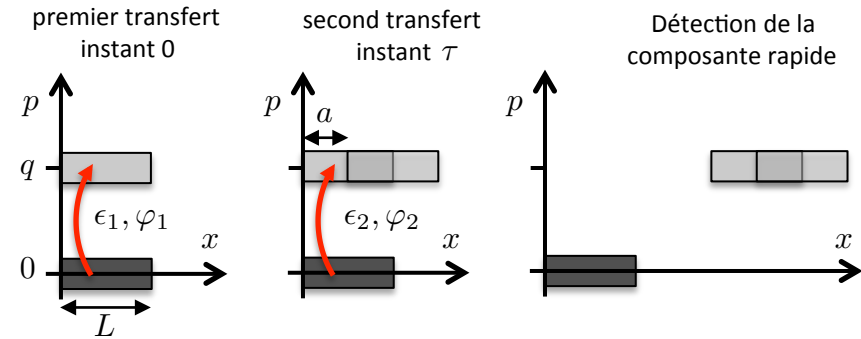


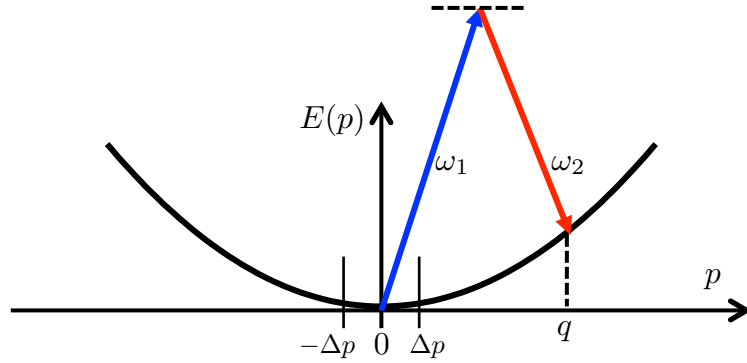
FIGURE 3. Diagramme dans l'espace des phases  $(x, p)$  indiquant le principe de la mesure de  $G_1$  [mis en place par Hagley, Deng, et al. (1999) et repris pour un gaz uniforme par Navon, Gaunt, et al. (2015)]. Deux transferts d'impulsions successifs, séparés par une durée  $\tau$ , provoquent l'éjection d'une (faible) partie du nuage piégé. La quantité d'atomes en jeu dépend du recouvrement entre les deux composantes éjectées, qui est elle-même une fonction de  $G_1$ .

on peut considérer l'opérateur densité à  $N$  corps « fictif » :

$$\hat{\rho}_{\text{fict.}} = \frac{1}{N} \sum_j \Pi_j |N : \psi_j\rangle\langle N : \psi_j|. \quad (4)$$

Cet opérateur densité  $\hat{\rho}_{\text{fict.}}$ , qui redonne bien l'opérateur densité à un corps  $\hat{\rho}_1$ , correspond à un état *mélange statistique de condensats purs*, c'est-à-dire une superposition incohérente d'états où les  $N$  particules occupent toutes le même état  $\psi_j$ . La probabilité que ce condensat pur soit dans l'état  $\psi_j$  est donnée par  $\Pi_j/N$ . Cette manière de représenter l'état du gaz simplifie notablement l'analyse, mais il serait bien sûr incorrect de l'utiliser pour calculer autre chose que des quantités liées à la matrice densité à un corps  $\rho_1$ . En particulier, cette approche n'est valable que dans la mesure où on peut négliger complètement le rôle des interactions pendant le processus de mesure que nous allons décrire. Si ce n'est pas le cas, l'opérateur  $\hat{\rho}_1$  mesuré est différent de l'opérateur  $\hat{\rho}_1$  initial.

**Le principe de la mesure (figure 3).** Le gaz d'atomes, initialement confiné dans un piège harmonique ou dans une boîte, a une distribution en impul-



**FIGURE 4.** Transfert cohérent d'atomes d'impulsion  $p \lesssim \Delta p$  vers une classe d'impulsion nettement plus élevée  $\sim q$  par un processus absorption-émission stimulée. Le choix des fréquences  $\omega_{1,2}$  suivant (6) assure le caractère résonnant du transfert. L'ajustement de la fraction transférée (notée ici  $\epsilon^2$ ) se fait en variant la puissance des faisceaux lumineux.

sion de largeur caractéristique  $\Delta p$ . À un instant donné, on communique l'impulsion  $\mathbf{q}$ , avec  $|\mathbf{q}| \gg \Delta p$ , à une faible fraction des atomes de manière cohérente. On attend un temps  $\tau$ , pendant lequel ces atomes se déplacent de

$$\mathbf{a} = \mathbf{q}\tau/m, \quad (5)$$

puis on répète l'opération de transfert une seconde fois. On mesure ensuite par une technique de temps de vol le nombre total d'atomes qui ont gagné l'impulsion  $\mathbf{q}$ . C'est l'interférence – constructive ou destructive – entre l'excitation lors du premier et du second transfert qui permet de remonter à la quantité (2).

Dans l'expérience initiale de Hagley, Deng, et al. (1999), le transfert cohérent était fait en appliquant une impulsion lumineuse stationnaire d'axe  $x$ , qui avait pour effet de créer simultanément plusieurs paquets d'atomes autour des impulsions  $\mathbf{q}_n = \pm 2n\hbar\mathbf{k} \mathbf{u}_x$ . Dans l'expérience de Navon, Gaunt, et al. (2015), ce transfert est sélectif et ne crée essentiellement que le paquet désiré à l'impulsion  $\mathbf{q}$ ; il est induit par une impulsion lumineuse avec deux ondes planes de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ , avec le choix de

fréquences

$$\hbar(\omega_1 - \omega_2) = \frac{q^2}{2m}, \quad \mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (6)$$

ce qui correspond à la condition de diffraction de Bragg pour l'onde de matière sur le réseau lumineux formé par les deux faisceaux. Nous nous limiterons dans ce qui suit à ce transfert sélectif.

Nous allons adopter ici un formalisme directement inspiré du *Supplementary Material* de Navon, Gaunt, et al. (2015). Nous divisons l'espace des impulsions pertinent pour l'expérience en deux domaines, l'un centré autour de 0 et de largeur  $\Delta p$ , l'autre centré autour de  $q$ , également de largeur  $\Delta p$  (figure 3). On écrit donc les vecteurs d'état sous forme de spineur à deux composantes, associées respectivement aux domaines autour de 0 (composante du bas) et autour de  $q$  (composante du haut) :

$$\begin{pmatrix} \psi_q(\mathbf{r}) \\ \psi_0(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

où  $\psi_0$  et  $\psi_q$  ont toutes deux un contenu en impulsion de l'ordre de  $\Delta p$ .

Le transfert cohérent revient à faire basculer des atomes entre les deux composantes<sup>3</sup>; il se décrit donc dans ce formalisme par une matrice unitaire  $2 \times 2$ . En nous restreignant à des probabilités de transfert faibles, on peut écrire cette matrice sous la forme

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon e^{-i\varphi} \\ \epsilon e^{i\varphi} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \epsilon \ll 1. \quad (8)$$

Partant d'un gaz dans un état dont les classes d'impulsion significativement peuplées sont voisines de 0 (à  $\Delta p$  près), le premier transfert se décrit par :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 e^{-i\varphi_1} \psi(\mathbf{r}) \\ \approx \psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

La fonction initiale  $\psi(\mathbf{r})$  est une des fonctions propres normalisées  $\psi_j(\mathbf{r})$  de  $\hat{\rho}_1$  et sa contribution sera à pondérer au final avec la probabilité  $\Pi_j/N$ .

3. Ce transfert est effectué par une impulsion courte, de durée  $t_0 = 0.1$  ms et la vitesse communiquée vaut  $q/m = 3$  mm/s. La largeur de la résonance due à l'effet Doppler,  $q\Delta p/m$ , est alors petite devant la largeur de Fourier  $2\pi/t_0$ , ce qui assure que toutes les classes d'impulsion pertinentes autour de l'impulsion nulle sont excitées de la même façon.

L'attente de durée  $\tau$  correspond à la translation de la composante « rapide » de la quantité  $\mathbf{a}$  et l'acquisition de la phase<sup>4</sup> liée à son énergie  $q^2/2m$  :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 e^{-i\varphi_1} \psi(\mathbf{r}) \\ \approx \psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 e^{-i(\varphi_1 + q^2\tau/2m\hbar)} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \\ \approx \psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Enfin la seconde excitation revient à appliquer une nouvelle fois la matrice  $\hat{M}$ , avec des paramètres  $\epsilon_2$  et  $\varphi_2$  :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 e^{-i(\varphi_1 + q^2\tau/2m\hbar)} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \\ \approx \psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 e^{-i(\varphi_1 + q^2\tau/2m\hbar)} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) + \epsilon_2 e^{-i\varphi_2} \psi(\mathbf{r}) \\ \approx \psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

où l'on s'est limité aux termes d'ordre 1 en  $\epsilon_{1,2}$ .

Intéressons-nous à la population totale de la composante supérieure, d'impulsion centrée autour de  $\mathbf{q}$ , qui après un temps assez long se sépare du nuage initial (figure 3). Prenons  $\epsilon_1 = \epsilon_2 \equiv \epsilon$  pour simplifier les notations. Cette population s'écrit

$$N_q(\mathbf{a}) = N \epsilon^2 \int |\psi(\mathbf{r}) + e^{i\Phi} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a})|^2 d^3r \quad (12)$$

avec

$$\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{q^2\tau}{2m\hbar}. \quad (13)$$

Il est clair que cette population  $N_q(a)$  fait intervenir le terme recherché (2), correspondant à l'interférence entre  $\psi(\mathbf{r})$  et  $\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a})$ . La procédure précise pour extraire ce terme dépend des phases  $\varphi_{1,2}$  acquises au cours des transferts. Dans l'expérience de Hagley, Deng, et al. (1999), on avait  $\varphi_1 = \varphi_2$  de sorte que le signal d'interférence était modulé temporellement à la fréquence  $q^2/2m\hbar$ . Dans l'expérience de Navon, Gaunt, et al. (2015), la phase de l'oscillateur générant la différence de fréquence  $\omega_1 - \omega_2 = q^2/(2m\hbar)$  suit de manière cohérente l'évolution, de sorte que  $\Phi = 0$ .

Plaçons-nous dans ce deuxième cas pour terminer l'analyse, et considérons un gaz homogène remplissant une boîte cubique de côté  $L$ . Les termes

4. La durée maximale utile pour  $\tau$  est  $\sim 10$  ms ; elle correspond à une séparation complète des deux composantes d'impulsion  $\mathbf{q}$ , soit  $a = q\tau/m \gtrsim L$ , où  $L = 26 \mu\text{m}$  est la longueur de l'échantillon.

directs faisant intervenir l'intégrale de  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  ou  $|\psi(\mathbf{r} - \mathbf{a})|^2$  sont égaux à 1 si la fonction d'onde initiale  $\psi$  est normalisée. Le terme  $\psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  intervenant dans l'intégrale de recouvrement ne prend des valeurs non nulles que si  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r} - \mathbf{a}$  sont tous deux à l'intérieur de la boîte de côté  $L$ . Ceci correspond à un sous-volume représentant la fraction  $1 - a/L$  du volume total. Pour ces couples de points  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r} - \mathbf{a}$  situés tous deux à l'intérieur du gaz, la moyenne sur les différents tirages possibles pour  $\psi$  donne

$$\begin{aligned} \langle \psi(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \rangle &= \sum_j \frac{\Pi_j}{N} \psi_j(\mathbf{r}) \psi_j^*(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{N} \langle \mathbf{r} | \hat{\rho}_1 | \mathbf{r} - \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{N} G_1(\mathbf{a}). \end{aligned} \quad (14)$$

En regroupant les différents termes, on arrive donc à

$$\begin{aligned} N_q(\mathbf{a}) &= 2N \epsilon^2 \left[ 1 + \left( 1 - \frac{a}{L} \right) g_1(\mathbf{a}) \right] \quad \text{si } a < L \\ &= 2N \epsilon^2 \quad \text{si } a > L \end{aligned} \quad (15)$$

où l'on a introduit la fonction de corrélation à un corps réduite<sup>5</sup>

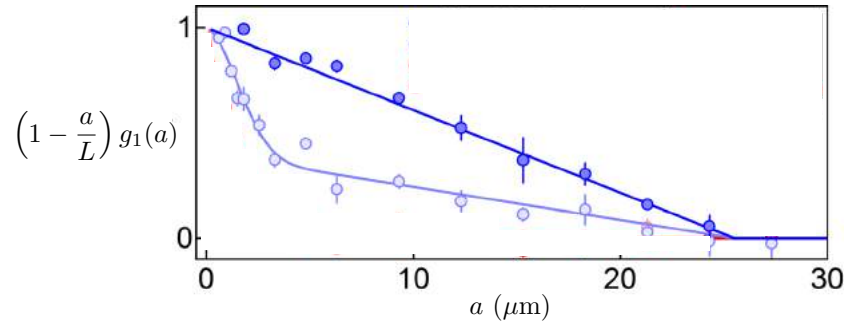
$$g_1(\mathbf{a}) = \frac{G_1(\mathbf{a})}{N/L^3}, \quad (16)$$

prenant la valeur 1 en  $\mathbf{a} = 0$ .

La mesure de la variation de  $N_q(\mathbf{a})$  avec  $a$ , c'est-à-dire avec l'intervalle de temps  $\tau$  séparant les deux transferts, révèle donc de manière directe la fonction  $g_1$  recherchée.

- Pour un condensat pur, la fonction  $g_1(a)$  est égale à 1 pour toute valeur de  $a$  et la fonction  $N_q(a)$  est un simple triangle passant de  $4N\epsilon^2$  à  $2N\epsilon^2$  quand  $a$  varie entre 0 et  $L$ .
- Pour un gaz partiellement condensé, de fraction condensée  $f_0 = N_0/N$ , la fonction  $N_q(a)$  varie rapidement au voisinage de  $a = 0$ , puis décroît ensuite linéairement comme  $2N\epsilon^2 [1 + (1 - a/L)f_0]$  jusqu'à  $a = L$ .
- Pour un gaz non condensé,  $N_q(a)$  passe de  $4N\epsilon^2$  à  $2N\epsilon^2$  sur une longueur de l'ordre de la longueur de cohérence ( $\ll L$ ) et reste constante ensuite.

5. On pourra vérifier que  $G_1$  et  $g_1$  sont réelles pour un gaz à l'équilibre thermique.



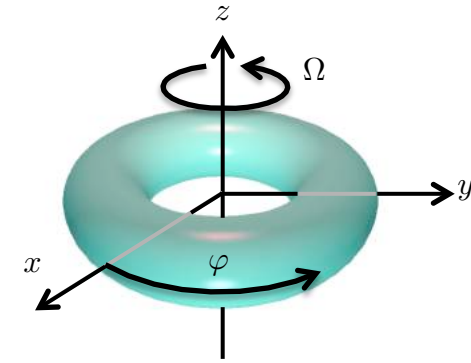
**FIGURE 5.** Mesure de  $g_1$  par la méthode schématisée en figure 3 pour un gaz confiné dans une boîte de côté  $L = 26 \mu\text{m}$ . La vitesse  $q/m$  vaut  $3 \text{ mm/s}$  et chaque fraction transférée est  $\epsilon^2 = 0.05$ . La mesure de  $N_q$  est faite  $140 \text{ ms}$  après les transferts, pour bien séparer les deux nuages d'impulsion  $\mathbf{q}$  du nuage initial. Les résultats ont été obtenus avec une température  $T \lesssim 0.2 T_c$  pour la courbe supérieure et  $T \approx 0.7 T_c$  pour la courbe inférieure. Figure adaptée de Navon, Gaunt, et al. (2015).

Un exemple de mesures de  $g_1$  dans les deux premiers cas est montré en figure 5. Pour conclure, mentionnons une nouvelle fois l'importance de vérifier que les interactions jouent un rôle négligeable durant la durée effective de la mesure  $\tau$ . En l'occurrence, cette contrainte est largement satisfaite puisque l'énergie d'interaction est inférieure à  $h \times 20 \text{ Hz}$ .

## 2 Deux critères pour la superfluidité

Les expériences que nous allons considérer pour définir les propriétés caractéristiques d'un superfluide concernent des récipients toriques ou cylindriques d'axe  $z$  et de rayon moyen  $r_0$ , rempli du fluide à étudier (figure 6). Nous nous intéresserons en particulier à l'état du fluide en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  de l'anneau autour de l'axe  $z$ , vitesse de rotation mesurée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Pour simplifier les notations, nous serons amenés dans certains cas à



**FIGURE 6.** Le système modèle considéré ici : le fluide est à l'intérieur d'un anneau d'axe  $z$ , les parois de cet anneau pouvant être mises en rotation à vitesse angulaire  $\Omega$ . La variable  $\varphi$  repère la position azimuthale d'une particule dans l'anneau.

considérer le cas particulier d'un anneau fin, c'est-à-dire tel que la position d'une particule du fluide est caractérisée par le seul angle azimuthal  $\varphi$ , les deux autres variables  $r$  et  $z$  des coordonnées cylindriques étant fixées à  $r = r_0$  et  $z = 0$ .

Nous allons commencer par rappeler la physique d'une particule unique dans cette géométrie, puis nous passerons aux phénomènes que l'on peut observer quand on place un gaz en interaction dans ce récipient annulaire. Nous décrirons en particulier les résultats expérimentaux obtenus dans le groupe de G. Campbell au NIST (Eckel, Lee, et al. 2014).

Pour terminer cette introduction, signalons qu'il existe pour les systèmes non homogènes d'autres caractérisations de la superfluidité, comme l'existence des modes spécifiques appelés *modes ciseaux* (Guéry-Odelin & Stringari 1999).

### 2-1 Un atome unique dans un anneau

Considérons pour commencer le mouvement d'une particule unique sur cet anneau supposé assez fin pour que seul le degré de liberté azimu-



théorème soit pertinent. La fonction d'onde de la particule dépend donc uniquement de la variable  $\varphi$  et elle satisfait les conditions aux limites périodiques

$$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi), \quad \int_0^{2\pi} |\psi(\varphi)|^2 d\varphi = 1, \quad (17)$$

ou, si on préfère travailler avec l'abscisse curviligne  $x = r_0\varphi$  le long de l'anneau :

$$\psi(x) = \psi(x + 2\pi r_0), \quad \int_0^{2\pi r_0} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (18)$$

**Anneau au repos.** Si le potentiel est constant le long de l'anneau (on néglige la rugosité pour l'instant), le seul terme de l'hamiltonien est l'énergie cinétique qui s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \quad (19)$$

de sorte que les états et les énergies propres de cet hamiltonien à une particule sont

$$\psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}, \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} n^2. \quad (20)$$

**Anneau en rotation.** Si l'anneau est mis en rotation, la rugosité inévitable des parois va créer un potentiel dépendant du temps sur la particule, rendant impossible la recherche d'états stationnaires dans le référentiel du laboratoire. En revanche, on peut passer dans le référentiel en rotation avec l'anneau où l'on retrouve un « potentiel de rugosité » indépendant du temps. Ce passage dans le référentiel tournant se fait en ajoutant le terme (cf. appendice) :

$$-\Omega L_z = i \hbar \Omega \frac{d}{d\varphi} \quad (21)$$

à l'hamiltonien (19), si bien que l'hamiltonien dans le référentiel tournant peut s'écrire

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left( i \frac{d}{d\varphi} + \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2 + E_{\text{centrif.}} \quad (22)$$

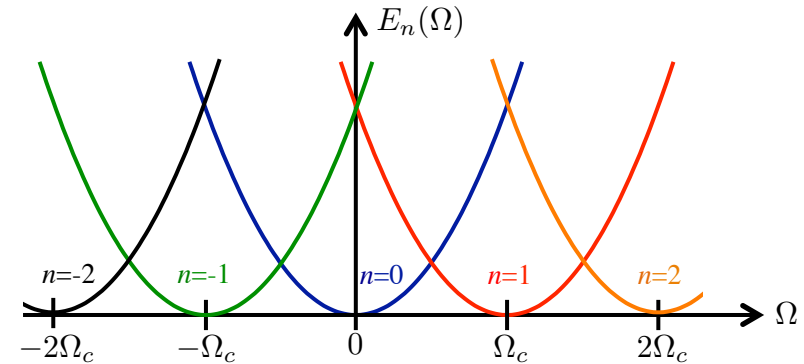


FIGURE 7. Variation avec  $\Omega$  de l'énergie des états propres à une particule dans l'anneau.

où l'on a introduit la fréquence de rotation caractéristique

$$\Omega_c = \frac{\hbar}{mr_0^2} \quad (23)$$

et l'énergie centrifuge

$$E_{\text{centrif.}} = -\frac{1}{2} m \Omega^2 r_0^2. \quad (24)$$

Nous omettons cette énergie centrifuge dans ce paragraphe puisque c'est une constante vis à vis de la variable  $\varphi$ , que l'on peut éventuellement éliminer en redéfinissant l'origine des énergies pour chaque valeur de  $\Omega$ .

Les fonctions propres de (22) sont les mêmes ( $e^{in\varphi}$ ) qu'en absence de rotation, mais les énergies sont maintenant :

$$E_n(\Omega) = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left( n - \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2. \quad (25)$$

Le diagramme énergétique correspondant tracé en fonction de  $\Omega$  a donc la structure périodique représentée sur la figure 7. En particulier, l'état fon-



damental de la particule est (à  $1/\sqrt{2\pi}$  près) :

$$\psi_{-1}(\varphi) = e^{-i\varphi} \quad \text{si} \quad -3\Omega_c/2 < \Omega < -\Omega_c/2 \quad (26)$$

$$\psi_0(\varphi) = 1 \quad \text{si} \quad |\Omega| < \Omega_c/2 \quad (27)$$

$$\psi_{+1}(\varphi) = e^{i\varphi} \quad \text{si} \quad \Omega_c/2 < \Omega < 3\Omega_c/2 \quad (28)$$

...

Cette succession d'états fondamentaux en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  se comprend simplement. Dans le référentiel du laboratoire, la vitesse azimuthale associée l'état  $\psi_n(\varphi)$  est reliée au gradient de la phase de la fonction d'onde et vaut

$$\mathbf{v}_n = \frac{\hbar}{mr_0} n \mathbf{u}_\varphi. \quad (29)$$

La vitesse de rotation de la paroi de l'anneau est quant à elle

$$\mathbf{v}_{\text{paroi}} = \Omega r_0 \mathbf{u}_\varphi. \quad (30)$$

L'indice  $n$  correspondant à l'état fondamental est l'entier qui minimise la différence entre  $\mathbf{v}_n$  et  $\mathbf{v}_{\text{paroi}}$ . En d'autres termes, c'est le meilleur compromis entre le fait d'avoir une particule qui tourne à une vitesse proche de celle des parois, tout en conservant une fonction d'onde qui satisfait les conditions aux limites périodiques (17). En particulier, dans le cas d'une rotation lente

$$v_{\text{paroi}} = \Omega r_0 \ll v_1 = \frac{\hbar}{mr_0} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \ll \Omega_c, \quad (31)$$

l'état fondamental reste l'état  $n = 0$ . Nous allons voir que cette notion de « compromis » reste pertinente pour tout superfluide décrit par un paramètre d'ordre qui obéit aux mêmes conditions aux limites périodiques que (17).

**Rôle de l'énergie centrifuge.** Pour aboutir au résultat (25) et au diagramme énergétique périodique en  $\Omega$  de la figure 7, nous avons omis le terme d'énergie centrifuge apparaissant dans l'hamiltonien (22). Si on conserve l'énergie centrifuge dans cet hamiltonien, le diagramme énergétique prend l'allure représentée sur la figure 8. Comme on passe d'un point de vue à l'autre en ajoutant la constante  $-m\Omega^2 r_0^2/2$  à toutes les énergies,

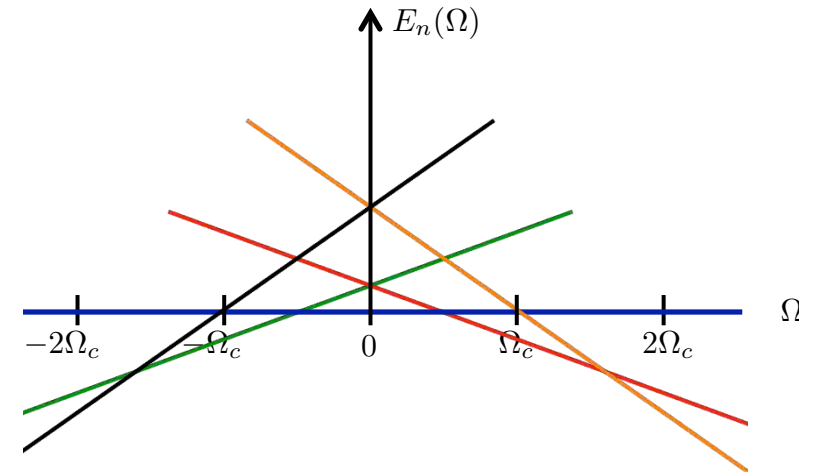


FIGURE 8. Diagramme énergétique de (22) si on garde le terme d'énergie centrifuge. Le code de couleur est le même qu'en figure 7.

les conclusions qui précèdent sur la nature de l'état fondamental à  $\Omega$  fixé sont inchangées et on peut raisonner indifféremment sur l'un ou l'autre des diagrammes<sup>6</sup>. L'avantage du point de vue adopté ci-dessus est de mieux mettre en évidence la périodicité du problème avec  $\Omega$ . Le seul cas où il importe de garder trace du terme d'énergie centrifuge se produit quand on est amené à dériver les énergies ou les vecteurs d'état par rapport à  $\Omega$  (voir par exemple § 4-2).

## 2-2 L'anneau en rotation lente ( $\Omega \ll \Omega_c$ )

Si le fluide est décrit par la physique classique, on peut montrer (voir plus loin le paragraphe § 4-1) qu'il va lui aussi se mettre en mouvement pour atteindre le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  correspondant à une rotation rigide

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \quad (32)$$

6. Merci à Hélène Perrin pour une discussion sur ce point !

Cette mise en mouvement se fait par l'intermédiaire des interactions parois-atomes du fluide. Le moment cinétique du gaz à l'équilibre vaut

$$\mathbf{L} = m \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) d^3r, \quad (33)$$

où nous avons noté  $\rho(\mathbf{r})$  la densité volumique à l'intérieur de l'anneau ( $\int \rho$  est égale au nombre d'atomes  $N$ ). On peut réécrire ce moment cinétique comme

$$\mathbf{L} = I_{\text{class}} \boldsymbol{\Omega} \quad (34)$$

où  $I_{\text{class}}$  représente le moment d'inertie du gaz le long de l'axe  $z$  :

$$I_{\text{class}} = m \int \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2) d^3r \approx Nm r_0^2, \quad (35)$$

l'expression approchée étant valable pour un anneau fin.

Pour un fluide quantique, un premier critère de superfluidité est le fait que le fluide ne se met pas entièrement en rotation pour des vitesses faibles de l'anneau. Ce phénomène a été observé pour la première fois avec de l'hélium liquide superfluide par Hess & Fairbank (1967). Le moment cinétique du fluide à l'équilibre est alors inférieur à (34), ce qui correspond à une réduction du moment d'inertie,  $I < I_{\text{class}}$ . Ce premier critère correspond donc à une certaine rigidité de l'état superfluide : on cherche à le mettre en mouvement de rotation par rapport à un référentiel galiléen, mais on n'y arrive pas, tout du moins pas complètement.

Notons que la condition  $\Omega \ll \Omega_c$  s'écrit dans le cas d'un anneau fin :

$$\text{Anneau fin : } \Omega \ll \Omega_c \rightarrow L \ll N\hbar. \quad (36)$$

Cette condition de rotation lente signifie donc que le moment cinétique est beaucoup trop faible pour donner à chaque atome un quantum  $\hbar$  de moment cinétique. En revanche, il faut choisir pour cette expérience  $\Omega \gg \Omega_c/N$ , soit  $L \gg \hbar$ , de sorte qu'une fraction des  $N$  atomes peut être dans un état de moment cinétique non nul.

**Cas du gaz parfait.** Un gaz parfait condensé de Bose-Einstein (par exemple à température nulle) satisfait ce premier critère. En effet, nous avons vu que l'état fondamental à une particule reste égal à la fonction

$\psi_0(x)$  tant que la fréquence de rotation ne dépasse pas en valeur absolue  $\Omega_c/2$  [cf. (27)]. Le gaz parfait vérifie donc bien cette propriété de rigidité vis à vis d'une mise en rotation lente du récipient qui le contient.

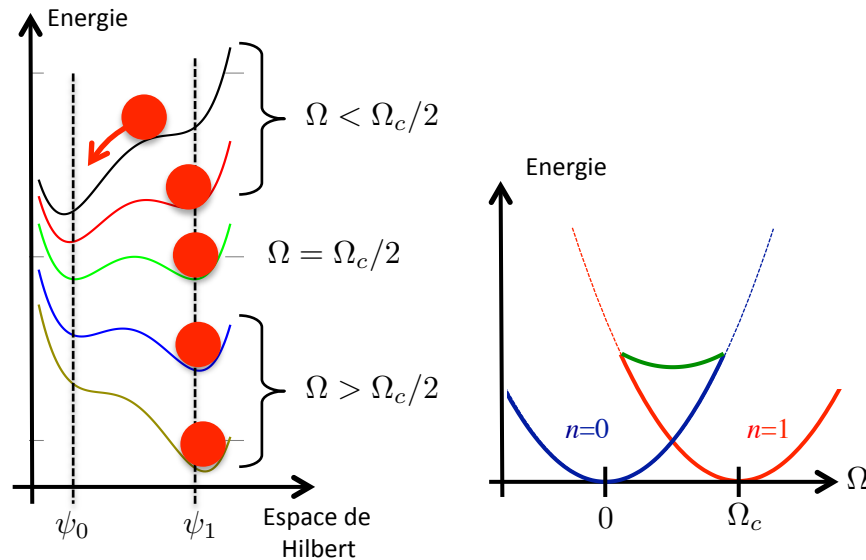
### 2-3 Existence de courants permanents

Supposons maintenant que l'anneau est en mouvement de rotation avec une vitesse de l'ordre ou supérieure à  $\Omega_c$  de sorte que le gaz est également en rotation même s'il est superfluide ; il est alors décrit par le paramètre d'ordre  $e^{i\varphi}$  (ou plus généralement  $e^{in\varphi}$  avec  $n > 0$ ). Arrêtons la rotation des parois de l'anneau, qui s'immobilisent donc dans le référentiel du laboratoire. Qu'arrive-t-il au fluide ?

- Si le fluide est classique, donc visqueux, les interactions avec les parois conduisent à une immobilisation relativement rapide.
- Pour un superfluide, le courant qui existait avant l'arrêt de la rotation de l'anneau va pouvoir perdurer pendant un temps considérable. Pour des supraconducteurs, ce temps se compte en années, voire plus. Pour des gaz d'atomes froids, ils peuvent être de plusieurs dizaines de secondes, soit une durée pendant laquelle une fraction importante des atomes est perdue du fait des collisions avec le gaz résiduel présent dans l'enceinte à vide (Ramanathan, Wright, et al. 2011; Moulder, Beattie, et al. 2012).

La propriété mise en avant dans cette deuxième expérience de pensée est donc une propriété de métastabilité : un état qui n'est pas l'état fondamental du système – le superfluide au repos aurait moins d'énergie cinétique – constitue malgré tout un état de quasi-équilibre.

La possibilité de décrire une boucle d'hystérésis accompagne de manière naturelle cette propriété de métastabilité. Quand on fait parcourir à la fréquence de rotation  $\Omega$  un aller et retour entre la valeur  $\Omega = 0$  et une valeur  $\gtrsim \Omega_c$ , le fluide ne passe pas par les mêmes états à l'aller et au retour. Nous avons représenté de manière schématique sur la figure 9 un paysage énergétique possible du superfluide dans cette variation, en prenant pour abscisse un chemin abstrait dans l'espace de Hilbert. Notons qu'il ne s'agit que d'une des multiples configurations envisageables : on peut très bien rencontrer des situations où plusieurs  $\psi_n$  sont simultanément métastables.



**FIGURE 9.** Gauche : « paysage énergétique » d'un superfluide dans l'espace de Hilbert pour différentes fréquences de rotation. Pour une fréquence de rotation inférieure à  $\Omega_c/2$ , on s'attend à ce que comme pour le gaz parfait, le minimum absolu corresponde au paramètre d'ordre  $\psi_0$  qui ne tourne pas. Mais l'état  $\psi_1 = e^{i\varphi}$  peut correspondre à un minimum local d'énergie, et donc être métastable. Ce n'est que pour des fréquences  $\Omega$  nettement plus basses que  $\Omega_c/2$  qu'il perdra sa métastabilité et que le superfluide basculera vers  $\psi_0$ . Droite : Variation des extréma de la fonctionnelle d'énergie en fonction de  $\Omega$ . Pour une plage autour de  $\Omega_c$ , on a deux minima (bleu et rouge) et un point col (en vert).

**Cas du gaz parfait.** Le gaz parfait ne satisfait pas ce deuxième critère fondé sur la métastabilité. Plaçons-nous à température nulle pour simplifier l'analyse. Partant de  $\Omega = \Omega_c$ , le gaz est dans son état fondamental avec toutes les particules dans l'état  $\psi_1 : |N : \psi_1\rangle$ . Réduisons  $\Omega$  pour arriver au point  $\Omega_c/2$ . Au niveau de la particule unique, les états  $\psi_0$  et  $\psi_1$  sont alors dégénérés. Pour le gaz parfait composé de  $N$  particules, les  $N + 1$  états

$$|N' : \psi_0 ; N - N' : \psi_1\rangle \quad \text{avec } N' = 0, 1, \dots, N \quad (37)$$

sont tous dégénérés et rien ne s'oppose à ce que l'état du gaz bascule de  $|N : \psi_1\rangle$  à  $|N : \psi_0\rangle$  par transitions successives

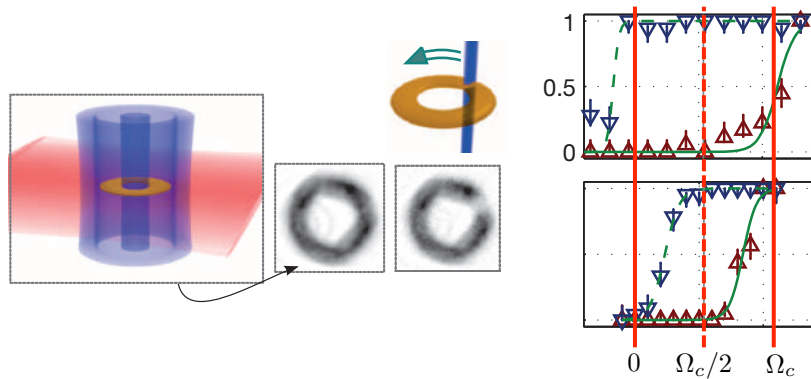
$$|N' : \psi_0 ; N - N' : \psi_1\rangle \longrightarrow |N' + 1 : \psi_0 ; N - N' - 1 : \psi_1\rangle. \quad (38)$$

La situation est radicalement différente pour un gaz avec des interactions répulsives. Nous verrons au cours prochain un argument dû à Nozières (1995) montrant que les états  $|N' : \psi_0 ; N - N' : \psi_1\rangle$  avec  $N' \neq 0$  et  $N' \neq N$  (appelés *condensats fragmentés*) sont énergétiquement défavorisés par rapport aux états extrémaux  $|N : \psi_0\rangle$  et  $|N : \psi_1\rangle$  (qui sont de « vrais » condensats). Ceci protège l'état  $|N : \psi_1\rangle$  quand  $\Omega$  arrive autour de  $\Omega_c/2$  et ce n'est que pour des fréquences de rotation nettement plus basses que la transition (dissipative) vers  $|N : \psi_0\rangle$  peut s'effectuer. Les interactions répulsives sont donc indispensables pour assurer ce deuxième critère de superfluidité lié à la métastabilité (Ueda & Leggett 1999; Mueller 2002; Baharian & Baym 2013). Une analyse détaillée des processus de dissipation pour le courant superfluide circulant dans cette géométrie annulaire est faite par Dubessy, Liennard, et al. (2012).

## 2-4 L'expérience du NIST

Cette expérience a montré de manière claire le phénomène d'hystérésis lié à la métastabilité des courants permanents dans un gaz condensé de Bose-Einstein de  $\sim 400\,000$  atomes de  $^{23}\text{Na}$  à une température de l'ordre de 100 nK. Les atomes sont confinés dans un piège en forme d'anneau constitué par (cf. figure 10) :

- un faisceau d'axe vertical, désaccordé sur le bleu (donc repoussant les atomes), auquel on a fait traverser un masque annulaire ; le rayon moyen de l'anneau est  $r_0 \approx 20\ \mu\text{m}$ . Du fait de la résolution finie du



**FIGURE 10.** Schéma expérimental utilisé par Eckel, Lee, et al. (2014) pour étudier la métastabilité des courants dans un anneau d'atomes de  $^{23}\text{Na}$ . La rugosité des parois de l'anneau est générée grâce à un défaut (weak link) tournant à une fréquence  $\Omega$  ajustable. Droite : deux courbes d'hystérésis montrant l'enroulement moyen  $\langle n \rangle$  (moyenne sur  $\sim 20$  réalisations) après avoir laissé le défaut tourner à la vitesse  $\Omega$  pendant 2 s ; triangles « pointe en haut » : on part de  $n = 0$ , triangles « pointe en bas » : on part de  $n = 1$ .

système d'imagerie de ce masque, le potentiel radial de l'anneau est à peu près harmonique, de fréquence  $\sim 200$  Hz.

- une nappe de lumière horizontale, désaccordée sur le rouge, qui attire les atomes au voisinage du plan  $z = 0$ , avec un confinement harmonique de fréquence  $\sim 500$  Hz.

Le gaz est dans le régime de Thomas–Fermi pour les directions radiales et verticales (largeurs totales  $8\ \mu\text{m} \times 3\ \mu\text{m}$ ). La fréquence de rotation  $\Omega_c$  déduite de ces valeurs est de 1.2 Hz.

Pour savoir si un courant permanent est présent dans l'anneau, on effectue une expansion balistique en coupant le confinement. L'existence du courant, donc d'un moment cinétique par atome  $\ell = n\hbar$ , crée une barrière centrifuge  $\ell^2/2mr^2$  qui empêche le nuage d'atomes de s'étaler jusqu'au centre. La taille de ce trou observé lors de l'expansion permet de déterminer éventuellement la valeur de  $n$  (Moulder, Beattie, et al. 2012; Murray, Krygier, et al. 2013), mais seules les valeurs  $n = 0$  et  $n = 1$  sont exploitées dans l'expérience que nous décrivons ici.

Nous avons déjà mentionné qu'un supercourant peut subsister pendant de longues durées dans ce type de piège lumineux. Pour simuler des parois rugueuses et avoir la possibilité de mettre cette rugosité en mouvement, Eckel, Lee, et al. (2014) ont ajouté un autre faisceau lumineux, également vertical et désaccordé sur le bleu, créant un défaut local sur l'anneau. La position de ce lien faible (*weak link*) peut être contrôlée par un déflecteur acousto-optique et sa taille est de  $6\ \mu\text{m}$  le long de la direction azimuthale (demi-largeur à  $1/e^2$ ).

On peut changer la rugosité effective, et donc l'aire de la boucle d'hystérésis, en variant la puissance du faisceau créant ce lien faible. La préparation du gaz dans l'état  $n = 0$  ou l'état  $n = 1$  se fait avec le lien faible immobile ou en rotation à la fréquence  $\Omega_c$ . On génère alors de manière déterministe un état sans courant permanent ou un état avec un enroulement de phase de  $2\pi$ , correspondant à  $n = 1$ . On fait ensuite tourner le lien faible pendant 2 s à une fréquence angulaire ajustable entre  $-0.3$  et 1.2 Hz, puis on détecte la présence éventuelle d'un courant permanent.

Deux résultats sont représentés sur la figure 10. Pour la boucle d'hystérésis du haut, obtenue avec une rugosité faible, on voit que le courant permanent  $n = 1$  subsiste même si la rugosité est immobile dans le référentiel du laboratoire. La boucle d'hystérésis du bas, réalisée avec une rugosité plus forte, montre que le courant  $n = 1$  subsiste légèrement en dessous de la fréquence de transition pour le gaz parfait  $\Omega_c/2$ , mais disparaît si on amène  $\Omega$  à zéro. La métastabilité des courants permanents dans un condensat atomique confiné dans un anneau est donc bien mise en évidence dans cette expérience, qui offre de plus la possibilité d'étudier quantitativement les temps de vie moyens des courants en fonction de la rugosité du confinement (Baharian & Baym 2013).

## 3 Vitesse superfluide et vitesse normale

### 3-1 Le modèle à deux fluides

Le modèle à deux fluides constitue un moyen relativement simple pour rendre compte des phénomènes que nous venons de décrire. On pose que l'ensemble du gaz/liquide peut être vu comme la superposition de deux

composantes, une partie superfluide d'entropie nulle, de densité  $\rho_s$  et de vitesse  $\mathbf{v}_s$ , et une partie normale de densité  $\rho_n$  et de vitesse  $\mathbf{v}_n$ .

Il est essentiel de bien faire la différence entre la fraction condensée du gaz et la fraction superfluide, ou de manière équivalente, entre la fraction non condensée et la fraction normale. Même s'il existe des situations où ces notions coïncident, on connaît également des cas où elles diffèrent :

- Considérons par exemple le cas de l'hélium liquide ; on trouve expérimentalement que ce liquide devient, à la précision de mesure près, entièrement superfluide quand la température tend vers 0 [voir par exemple Ceperley (1995)]. En revanche, la fraction condensée  $\Pi_0/N$ , évaluée à partir d'expériences de diffraction de neutrons, ne dépasse pas 0.1 (Sokol 1995). Cette limitation de la fraction condensée est également présente (dans une moindre mesure) pour un gaz de Bose en interaction. Elle est due au fait que les interactions entre particules créent des paires  $\mathbf{k}$ ,  $-\mathbf{k}$  à partir d'une paire d'atomes initialement d'impulsion nulle ; cet « habillage » de l'état fondamental par des états d'impulsion non nulle vient diminuer la valeur propre associée à l'état  $\mathbf{p} = 0$ , soit  $f_0 < 1$ .
- Dans un gaz de Bose à deux dimensions, on n'attend pas de condensation de Bose-Einstein à la limite thermodynamique. On peut définir un ordre en phase local correspondant à un quasi-condensat (Kagan, Svistunov, et al. 1987), mais la fraction condensée  $\Pi_0/N$  tend vers 0 quand la taille du système tend vers l'infini. En revanche une transition superfluide peut se produire à température suffisamment basse et la densité superfluide prend une valeur non nulle, comme prédit par Kosterlitz & Thouless (1973) and Nelson & Kosterlitz (1977) [voir aussi les discussions dans Hadzibabic & Dalibard (2011) et dans l'appendice de l'article de revue de Bloch, Dalibard, et al. (2008)].

Il ne faudrait pas déduire de ce qui précède que (quasi-)condensation et superfluidité sont déconnectées l'une de l'autre. Il y a au contraire une relation profonde entre les deux, comme nous allons le voir pour la définition de la vitesse superfluide ; dans un fluide bosonique 3D, il se produit une seule transition qui conduit à l'apparition simultanée d'une fraction condensée et d'une fraction superfluide. Toutefois il ne faut pas identifier les conséquences des deux phénomènes.

### 3-2 Condensation et vitesse superfluide

La condensation de Bose-Einstein est caractérisée par l'apparition d'un paramètre d'ordre complexe  $\psi_0(\mathbf{r})$ , correspondant à l'état propre de plus grande valeur propre pour l'opérateur densité à un corps. Ce paramètre d'ordre peut être écrit sous la forme

$$\psi_0(\mathbf{r}) = |\psi_0(\mathbf{r})| e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad (39)$$

et on définit la vitesse superfluide par la relation

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta. \quad (40)$$

Cette définition peut se justifier à partir des remarques suivantes :

- Pour un gaz uniforme et au repos, le paramètre d'ordre  $\psi_0$  doit lui aussi être constant dans l'espace, ce qui donne comme on s'y attend une vitesse superfluide nulle  $\mathbf{v}_s = 0$ .
- Considérons deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , le second étant en mouvement à la vitesse  $-\mathbf{v}$  par rapport au premier. Dans ce changement de référentiel, une fonction d'onde à une particule  $\psi(\mathbf{r}, t)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  devient après la transformation unitaire décrivant le passage dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  [cf. eq. (119) de l'appendice avec  $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}$ ]

$$\psi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = e^{im(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}-v^2t/2)/\hbar} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, t). \quad (41)$$

Considérons maintenant un superfluide au repos dans  $\mathcal{R}$ , décrit par un paramètre d'ordre uniforme

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{-i\mu t/\hbar}. \quad (42)$$

On s'attend donc à ce que ce superfluide ait une vitesse  $+\mathbf{v}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . C'est bien le cas si on impose que le paramètre d'ordre soit modifié comme une fonction d'onde dans un changement de référentiel galiléen. En injectant (42) dans (41), on trouve en effet :

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{im\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/\hbar} e^{-i(\mu + \frac{1}{2}mv^2)t/\hbar}. \quad (43)$$

En utilisant la définition (40) qui relie la vitesse superfluide au gradient de phase du paramètre d'ordre, on vérifie alors que la vitesse du superfluide dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  est  $\mathbf{v}_s = +\mathbf{v}$ , comme attendu.

**Irrotationalité d'un superfluide.** Puisque la vitesse superfluide est le gradient d'une fonction scalaire  $\theta(\mathbf{r})$ , on s'attend à ce que cette vitesse soit de rotationnel nul,  $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ , sauf là où  $\theta$  est singulière. Ces zones de singularité de  $\theta$  se produisent à des endroits où le module du paramètre d'ordre s'annule et où sa phase est donc indéfinie. Ceci correspond par exemple à des lignes de vortex dans un gaz 3D (des points pour un gaz 2D). Une autre formulation de cette propriété d'irrotationalité est

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r} = n \frac{2\pi\hbar}{m}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (44)$$

où l'intégrale est prise sur un contour fermé évitant les points de singularité de  $\theta(\mathbf{r})$ . De ce point de vue, l'observation de réseaux de vortex dans des condensats en rotation uniforme constitue une preuve de l'irrotationalité de la vitesse superfluide : un arrangement régulier de singularités de phase remplace le champ de rotation rigide  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  (Madison, Chevy, et al. 2000; Abo-Shaer, Raman, et al. 2001).

### 3-3 Parois solides et vitesse normale.

La vitesse de la composante normale  $\mathbf{v}_n$  est définie par rapport aux conditions aux limites imposées au fluide. Si celui-ci est placé dans un récipient rigide (ou un piège laser ou magnétique qui ne se déforme pas dans le temps), la vitesse normale est donc celle du récipient.

Dans le changement de référentiel galiléen envisagé plus haut, la transformation de la vitesse normale est, comme pour la vitesse superfluide, conforme à l'intuition. Si les parois du récipient sont immobiles dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , la vitesse normale est nulle dans ce référentiel :  $\mathbf{v}_n = 0$ . Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  bougeant à la vitesse  $-\mathbf{v}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , les parois ont pour vitesse  $\mathbf{v}$  et la vitesse normale dans ce référentiel est  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$ .

Dans les deux expériences évoquées plus haut pour un anneau en rotation, la vitesse normale est :

- la vitesse de rotation rigide  $\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  dans le cas où l'anneau tourne à la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega}$  ;
- nulle dans le cas où la rotation de l'anneau a été stoppée, une fois la transition superfluide traversée.

On peut bien sûr imaginer des situations où la définition que nous venons de poser est ambiguë. C'est par exemple le cas si le fluide est inséré entre deux parois bougeant l'une par rapport à l'autre, comme dans un écoulement de Couette. Leggett (2006) discute les difficultés pouvant émerger de cette définition pour ce type d'écoulement. Par ailleurs, il est important de remarquer qu'il n'y a pas de lien direct entre la vitesse normale définie en référence aux parois confinant le fluide, et la vitesse moyenne que l'on pourrait calculer pour la fraction non condensée de ce fluide.

## 4 Densité superfluide et densité normale

Dans le paragraphe précédent, nous avons expliqué comment définir, au moins dans des configurations relativement simples, les vitesses des deux composantes superfluide et normale. Il nous reste maintenant à expliquer comment évaluer leurs densités respectives,  $\rho_s$  et  $\rho_n$ , avec par hypothèse

$$\rho_n + \rho_s = \rho. \quad (45)$$

Nous allons pour cela revenir à l'anneau en rotation lente, pour lequel l'expérience prouve qu'une partie du fluide reste au repos. Nous allons d'abord vérifier que cette propriété est spécifique des fluides quantiques, puis nous verrons comment l'utiliser pour définir  $\rho_s$  et  $\rho_n$ .

### 4-1 Un fluide classique en rotation

Considérons une assemblée de  $N$  particules confinées dans l'anneau créant le potentiel  $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$ . Cet anneau est mis en rotation à fréquence angulaire  $\Omega$ . L'énergie de ces particules évaluée dans le référentiel tournant est alors donnée par l'hamiltonien [cf. appendice, eq. (129)] :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{(\hat{\mathbf{p}}_j - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}_j))^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}_j) - \frac{1}{2}m\Omega^2(\hat{x}_j^2 + \hat{y}_j^2) \right) \\ &+ V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N). \end{aligned} \quad (46)$$

où  $V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N)$  représente le potentiel d'interaction entre particules.

Sous cette forme, qui est une généralisation directe de (22), on voit que l'effet de la rotation est double :

- elle introduit le potentiel centrifuge  $-m\Omega^2(x^2 + y^2)/2$ ;
- elle crée un « magnétisme artificiel » décrit par le potentiel vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (47)$$

(on prend par convention une charge unité), correspondant à un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = 2m\boldsymbol{\Omega}$ . En termes de force, cette contribution « magnétique » donne naissance à la force de Coriolis  $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$ , qui est le pendant de la force de Lorentz  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  dans un problème de magnétisme. Cette analogie entre magnétisme et rotation a été étudiée en détail dans le cours 2013-14.

L'hamiltonien (46) est valable aussi bien en physique classique que quantique. Intéressons-nous maintenant au courant qui peut exister dans l'anneau en rotation.

Pour caractériser l'état d'équilibre du fluide, nous allons évaluer la valeur moyenne de son moment cinétique dans le référentiel tournant

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}_j\}) = m \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j, \quad (48)$$

où les  $\mathbf{r}_j$  et les  $\mathbf{v}_j$  désignent les positions et les vitesses des particules dans le référentiel tournant et où le moment conjugué à  $\mathbf{r}_j$ , noté  $\mathbf{p}_j$ , s'écrit [cf. appendice, eq. (134)] :

$$\mathbf{p}_j = m(\mathbf{v}_j + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j). \quad (49)$$

Nous supposons le gaz à l'équilibre thermique, de sorte que la valeur moyenne recherchée s'écrit

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{Nm}{\mathcal{Z}} \int (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) e^{-E(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}_j\})/k_B T} d\tau \quad (50)$$

où l'élément de volume  $d\tau$  dans l'espace des phases représente en fait les  $6N$  degrés de libertés

$$d\tau = d^3r_1 \dots d^3r_N d^3p_1 \dots d^3p_N \quad (51)$$

et où le coefficient de normalisation  $\mathcal{Z}$ , c'est-à-dire la fonction de partition pour ce fluide classique, est

$$\mathcal{Z} = \int e^{-E(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}_j\})/k_B T} d\tau. \quad (52)$$

En utilisant le lien (49) entre la vitesse d'une particule et son impulsion, ainsi que la définition (47) du potentiel vecteur, nous pouvons réécrire la moyenne du moment cinétique comme

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{N}{\mathcal{Z}} \int (\mathbf{r}_1 \times [\mathbf{p}_1 - \mathbf{A}(\mathbf{r}_1)]) e^{-E(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}_j\})/k_B T} d\tau. \quad (53)$$

On peut alors procéder à un changement de variable dans l'intégrale pour chaque couple  $\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j$  :

$$\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j \longrightarrow \mathbf{r}_j, \mathbf{p}'_j = \mathbf{p}_j - \mathbf{A}(\mathbf{r}_j). \quad (54)$$

Le jacobien associé à ce changement est égal à 1 et on arrive donc à

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} \rangle &= \frac{N}{\mathcal{Z}} \int (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}'_1) e^{-E^{(0)}(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}'_j\})/k_B T} d\tau' \\ \mathcal{Z} &= \int e^{-E^{(0)}(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}'_j\})/k_B T} d\tau' \end{aligned} \quad (55)$$

avec

$$\begin{aligned} E^{(0)}(\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}'_j\}) &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\mathbf{p}'_j{}^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}_j) - \frac{1}{2}m\Omega^2(x_j^2 + y_j^2) \right) \\ &+ V_{\text{int}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \end{aligned} \quad (56)$$

et

$$d\tau = d^3r_1 \dots d^3r_N d^3p'_1 \dots d^3p'_N. \quad (57)$$

On se trouve alors face à une expression identique à celle d'un gaz placé dans un anneau immobile dans un référentiel galiléen, le seul effet de la rotation étant de modifier le potentiel de confinement en lui ajoutant le potentiel centrifuge. L'effet du potentiel vecteur, responsable de la force de Coriolis, a entièrement disparu ! De ce fait, rien ne vient briser la chiralité du système et le moment cinétique moyen, mesuré dans le référentiel tournant, est toujours nul :

$$\mathcal{L} = 0. \quad (58)$$



En d'autres termes, le fluide vu dans le référentiel du laboratoire tourne à la vitesse  $\Omega$  des parois de l'anneau et le moment d'inertie du gaz est égal au moment d'inertie « rigide »  $I_{\text{class}}$  donné en (35).

En fait, on retrouve ici le célèbre résultat de magnétisme connu sous le nom de *théorème de Bohr – van Leeuwen* : dans un cadre thermodynamique fondé sur la mécanique classique, la magnétisation d'un système de particules chargées plongées dans un champ magnétique est toujours nulle.

## 4-2 Réduction du moment d'inertie

Nous avons donc prouvé qu'un fluide classique tourne toujours à la vitesse de l'anneau, aussi basse soit-elle. Nous nous plaçons donc à  $\Omega \ll \Omega_c$  et nous définissons la densité superfluide comme la fraction restant immobile dans le référentiel du laboratoire, la fraction normale tournant quant à elle à la même vitesse que les parois de l'anneau.

Pour simplifier notre analyse, nous allons supposer que la densité totale  $\rho$  est uniforme à l'intérieur de l'anneau. Nous pouvons donc relier les densités normales et superfluide à partir de la réduction du moment d'inertie  $I$  par rapport à sa valeur classique

$$\frac{\rho_n}{\rho} = \frac{I}{I_{\text{class}}}, \quad \rho_s = \rho - \rho_n, \quad (59)$$

ce qui signifie que  $\rho_n = \rho$  si l'ensemble du fluide tourne avec l'anneau, et  $\rho_s = \rho$  si l'ensemble du fluide reste arrêté alors que les parois de l'anneau bougent. En d'autres termes, le moment cinétique mesuré dans le référentiel tournant vaut

$$\text{Ref. tournant : } \langle \mathcal{L}_z \rangle = -\frac{\rho_s}{\rho} I_{\text{class}} \Omega. \quad (60)$$

Il est nul pour un gaz classique d'après l'argument développé en § 4-1 puisque le fluide tourne entièrement avec l'anneau, et il vaut  $-I_{\text{class}} \Omega$  dans le cas d'un superfluide parfait puisque ce dernier reste immobile dans le référentiel du laboratoire : il semble donc tourner à la vitesse angulaire  $-\Omega$  pour un observateur lié aux parois de l'anneau.

Examinons les conséquences de cette définition sur le plan énergétique.

À l'équilibre thermodynamique, le moment cinétique moyen dans le référentiel tournant se calcule à partir de

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{L}}_z \rangle &= \langle m \sum_j \hat{\mathbf{r}}_j \times \hat{\mathbf{v}}_j \rangle \cdot \mathbf{u}_z \\ &= \langle \sum_j \hat{\mathbf{r}}_j \times \hat{\mathbf{p}}_j \rangle \cdot \mathbf{u}_z - m\Omega \sum_j \langle \hat{x}_j^2 + \hat{y}_j^2 \rangle \\ &= \langle \hat{\mathcal{L}}_z \rangle - \Omega I_{\text{class}}, \end{aligned} \quad (61)$$

où nous avons utilisé encore une fois  $m\mathbf{v}_j = \mathbf{p}_j - m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$  et fait intervenir le moment cinétique dans le référentiel du laboratoire  $\hat{\mathbf{L}} = \sum_j \hat{\mathbf{r}}_j \times \hat{\mathbf{p}}_j$ . La moyenne thermique est prise avec l'opérateur densité  $\exp(-\hat{H}/k_B T)$  où l'hamiltonien  $\hat{H}$  dans le référentiel tournant est donné en (22) [ou dans l'appendice à l'équation (129) pour sa version 3D], et comporte notamment le terme  $-\Omega \hat{\mathcal{L}}_z$  :

$$\langle \hat{\mathcal{L}}_z \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr} \left( \hat{\mathcal{L}}_z e^{-\hat{H}/k_B T} \right) \quad (62)$$

où l'on a introduit la fonction de partition quantique

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left( e^{-\hat{H}/k_B T} \right). \quad (63)$$

On voit alors qu'il est aisé de réécrire la moyenne recherchée  $\langle \hat{\mathcal{L}}_z \rangle$  : quand on prend la dérivée de  $\exp(-\hat{H}/k_B T)$  par rapport à  $\Omega$ , on voit précisément apparaître<sup>7</sup>

$$\frac{\hat{\mathcal{L}}_z}{k_B T} e^{-\hat{H}/k_B T} \quad (64)$$

en utilisant le fait que l'hamiltonien est invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$  et commute donc avec  $\hat{\mathcal{L}}_z$ . On a donc

$$\langle \hat{\mathcal{L}}_z \rangle = k_B T \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \Omega} = k_B T \frac{\partial(\log \mathcal{Z})}{\partial \Omega} \quad (65)$$

7. Comme on est amené à prendre la dérivée de l'hamiltonien par rapport à  $\Omega$ , il est important de garder ici le terme d'énergie centrifuge, contrairement à ce que nous avons fait pour passer de (22) à (25), puisque seul comptait à ce moment-là le spectre de l'hamiltonien à  $\Omega$  fixé.

où la dérivée est prise à température et volume constants. Introduisons finalement l'énergie libre

$$F = -k_B T \log \mathcal{Z} \quad (66)$$

ce qui nous conduit à :

$$\langle \hat{L}_z \rangle = -\frac{\partial F}{\partial \Omega}, \quad (67)$$

soit

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = -I_{\text{class}} \Omega - \langle \hat{\mathcal{L}}_z \rangle, \quad (68)$$

ou encore, en injectant (60)

$$F(\Omega) = F(0) - \frac{1}{2} I_{\text{class}} \Omega^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_s}{\rho} I_{\text{class}} \Omega^2. \quad (69)$$

Avant de discuter la signification physique de ce résultat, rappelons que nous l'avons obtenu dans la limite des petits  $\Omega$ , pour lesquels le superfluide reste au repos. Cette expression de  $F(\Omega)$  doit donc être comprise comme les premiers termes d'un développement en puissances de  $\Omega$  (dans lequel seuls les termes de puissances paires interviennent du fait de la symétrie  $\Omega \leftrightarrow -\Omega$ ).

Il y a donc deux contributions à l'énergie libre mesurée dans le référentiel tournant. La première, en  $-I_{\text{class}} \Omega^2 / 2$ , correspond simplement à la diminution de l'énergie potentielle des atomes du fait du déconfinement centrifuge. Ce terme était déjà présent pour un gaz classique et ne nécessite pas de discussion particulière. Le second terme

$$\Delta F(\Omega) = \frac{1}{2} \frac{\rho_s}{\rho} I_{\text{class}} \Omega^2 \quad (70)$$

est celui qui est intéressant pour notre propos. Il représente l'énergie que l'on paye, dans le référentiel tournant, du fait que tous les atomes ne sont pas entraînés par le mouvement des parois de l'anneau. Introduisons le volume  $\mathcal{V}$  de l'anneau de sorte que le nombre de particules s'écrive  $N = \rho \mathcal{V}$ . En écrivant le moment d'inertie classique sous la forme

$$I_{\text{class}} = Nm \langle r^2 \rangle, \quad (71)$$

on arrive à l'excès d'énergie libre par unité de volume associé à la fraction superfluide :

$$\frac{\Delta F(\Omega)}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \rho_s m \langle r^2 \rangle \Omega^2. \quad (72)$$

Le terme  $\Delta F(\Omega)$  était absent pour un gaz classique et sa présence ici est directement liée à la contribution du potentiel vecteur dans l'hamiltonien (46). Cette contribution était nulle classiquement du fait du théorème de Bohr–van Leuven, mais elle n'a pas de raison de s'annuler dans une version quantique du problème (on sait que le magnétisme quantique orbital existe...). Pour évaluer la densité superfluide, une voie possible consiste donc à imposer un potentiel vecteur sur le système et à mesurer la variation d'énergie libre  $\Delta F$  ainsi induite ; c'est ce que nous allons approfondir dans le paragraphe qui suit.

### 4-3 Les conditions aux limites distordues

Pour prendre en compte le champ de jauge décrit par le potentiel  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = m\Omega \times \mathbf{r}$  apparaissant dans le référentiel tournant, il est commode d'adopter un point de vue où ce champ de jauge est incorporé dans les conditions aux limites. Considérons d'abord le cas de l'anneau au repos dans le référentiel du laboratoire ( $\Omega = 0$ ). Pour construire l'espace de Hilbert à  $N$  particules, on peut choisir une base de fonctions d'onde à une particule  $\psi(r, \varphi, z)$ , états propres de l'hamiltonien à une particule

$$H_1^{(\Omega=0)} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (73)$$

ces fonctions satisfaisant les conditions aux limites périodiques

$$\psi(r, \varphi, z) = \psi(r, \varphi + 2\pi, z). \quad (74)$$

Considérons maintenant le cas de l'anneau en rotation, avec le champ de jauge  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ . On peut chercher les états propres de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{(\hat{\mathbf{p}}_j - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}_j))^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N). \quad (75)$$

en construisant l'espace de Hilbert à  $N$  particules à partir des fonctions d'onde à une particule satisfaisant (74) et états propres de :

$$H_1^{(\Omega)} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}))^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (76)$$

Notons que nous avons omis dans cet hamiltonien le potentiel centrifuge, puisque son seul effet est d'abaisser l'énergie de la quantité  $I_{\text{class}}\Omega^2/2$ .

Au lieu de travailler avec des fonctions à une particule obéissant aux conditions aux limites périodiques (74), on peut choisir d'incorporer le champ de jauge dans ces fonctions d'onde. Pour le montrer, écrivons de manière explicite l'action de l'opérateur  $\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})$  sur une fonction d'onde. En introduisant la base  $e_r, e_\varphi, e_z$  des coordonnées cylindriques, on a

$$\hat{\mathbf{p}} \psi(r, \varphi, z) = -i\hbar \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} e_z \right) \quad (77)$$

et

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = m\Omega r e_\varphi. \quad (78)$$

Limitons-nous pour simplifier au cas où l'extension radiale de l'anneau est négligeable, de sorte que l'on peut fixer la variable  $r$  à la valeur  $r_0$ , les fonctions d'onde à une particule dépendant donc de  $\varphi$  et de  $z$ . Effectuons maintenant un changement de ces fonctions de base en posant :

$$\psi(\varphi, z) = e^{i\varphi \Omega/\Omega_c} \tilde{\psi}(\varphi, z) \quad \text{avec} \quad \Omega_c = \frac{\hbar}{mr_0^2}. \quad (79)$$

On trouve que

$$(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 \psi(\varphi, z) = e^{i\varphi \Omega/\Omega_c} \hat{\mathbf{p}}^2 \tilde{\psi}(\varphi, z) \quad (80)$$

de sorte que les fonctions  $\tilde{\psi}(\varphi, z)$  sont états propres de  $H_1^{(\Omega=0)}$  donné en (73). Le champ de jauge lié à la rotation n'a toutefois pas disparu du problème. Nous l'avons simplement basculé de l'hamiltonien vers les conditions aux limites satisfaites par les fonctions d'onde. D'après (79), nous avons en effet pour les fonctions transformées les conditions aux limites distordues :

$$\tilde{\psi}(\varphi + 2\pi, z) = e^{-i\Theta} \tilde{\psi}(\varphi, z), \quad (81)$$

avec

$$\Theta = 2\pi \frac{\Omega}{\Omega_c} = \frac{AL}{\hbar} \quad (82)$$

où  $L = 2\pi r_0$  représente la longueur de l'anneau (à ne pas confondre avec le moment cinétique). La variation d'énergie libre par unité de volume trouvée en (72) s'écrit en terme du potentiel vecteur  $A$  ou de la distortion  $\Theta$  :

$$\frac{\Delta F(\Theta)}{\mathcal{V}} = \frac{A^2}{2m} \rho_s = \frac{\hbar^2 \Theta^2}{2mL^2} \rho_s. \quad (83)$$

En pratique, la relation (83) peut être prise comme définition de la fraction superfluide pour des calculs analytiques ou numériques<sup>8</sup>. Il n'est pas nécessaire de revenir explicitement à la géométrie annulaire, même si c'est elle qui nous a servi pour l'établir. On peut considérer que le gaz est confiné dans une boîte cubique de volume  $\mathcal{V} = L^3$  et évaluer l'excès d'énergie libre quand on impose aux fonctions d'onde des conditions aux limites distordues selon une direction de l'espace :

$$\begin{aligned} \psi(x + L, y, z) &= e^{-i\Theta} \psi(x, y, z), \\ \psi(x, y + L, z) &= \psi(x, y, z), \\ \psi(x, y, z + L) &= \psi(x, y, z). \end{aligned} \quad (84)$$

On peut également utiliser la réponse à un champ de jauge artificiel pour mesurer la fraction superfluide, comme proposé dans le contexte des atomes froids par Cooper & Hadzibabic (2010) et Carusotto & Castin (2011).

**Retour sur l'hypothèse d'un anneau de faible rayon.** Pour simplifier notre analyse et aboutir à l'élimination du potentiel vecteur au profit de conditions aux limites distordues, nous avons supposé que la variable  $r$  était figée à la valeur  $r_0$ . Si on ne fait pas cette hypothèse, l'élimination n'est pas possible pour le potentiel vecteur (78) car celui-ci varie linéairement avec  $r$  ; il ne peut donc pas être éliminé en tout point  $r$  par le terme provenant du gradient de la phase ( $\frac{1}{r} \partial_\varphi$ ) qui donne une contribution en  $1/r$ . L'origine de cette difficulté est simple à comprendre : la phase accumulée par une particule sur un cercle de rayon  $r$  du fait du potentiel vecteur (78) dépend de la valeur de  $r$ . Au contraire, dans la version « boîte cubique » donnée en (84), la phase accumulée le long d'une trajectoire  $x \rightarrow x + L$  ne dépend pas de la valeur de  $y$  et  $z$ . Cette difficulté disparaît si on prend

<sup>8</sup>. En dimension réduite, cette définition peut néanmoins conduire à certaines ambiguïtés, comme souligné par Prokof'ev & Svistunov (2000).

un anneau mince, ou encore si on prend le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi$ . Ce dernier ne décrit pas un champ de rotation ou un champ magnétique uniforme, mais le champ magnétique créé par un solénoïde infiniment fin centré sur l'axe  $z$ .

#### 4-4 Bilan du modèle à deux fluides

À partir des définitions qui précèdent pour les densités et les vitesses des composantes normale et superfluide, nous pouvons établir les lois de changement de référentiel pour l'impulsion et l'énergie libre du fluide, et vérifier ainsi la cohérence du modèle.

Supposons que l'on connaisse, pour un fluide donné, son énergie libre au repos, c'est-à-dire pour  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_s = 0$ . Considérons maintenant une expérience dans laquelle le récipient contenant le fluide est en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}_n$  et que le superfluide a quant à lui la vitesse  $\mathbf{v}_s$ . C'est par exemple le cas si le fluide est confiné dans un tube infini parallèle à l'axe  $Ox$  et en mouvement de translation uniforme à la vitesse  $\mathbf{v}_n$  dans le référentiel du laboratoire. On peut montrer à partir de ce qui précède que l'impulsion par unité de volume et l'accroissement d'énergie libre par unité de volume sont donnés par

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathcal{V}} = m\rho_n \mathbf{v}_n + m\rho_s \mathbf{v}_s, \quad (85)$$

$$\frac{\Delta F'}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} m\rho_n \mathbf{v}_n^2 + \frac{1}{2} m\rho_s \mathbf{v}_s^2, \quad (86)$$

dans la limite d'une faible différence de vitesse entre les composantes normales et superfluides. Ce résultat assure la cohérence du modèle.

Pour le montrer, commençons par nous placer dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  bougeant à la même vitesse  $\mathbf{v}_n$  que les parois du tube. Dans ce référentiel, la vitesse normale est par définition nulle et la vitesse superfluide est  $\mathbf{v}'_s = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n$  de sorte que les relations (85-86) deviennent

$$\frac{\mathbf{P}'}{\mathcal{V}} = m\rho_s \mathbf{v}'_s, \quad (87)$$

$$\frac{\Delta F'}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} m\rho_s \mathbf{v}'_s{}^2. \quad (88)$$

Pour prouver ces deux relations, revenons au fait qu'imposer une vitesse relative  $\mathbf{v}'_s$  entre les composantes superfluide et normale revient à choisir des conditions aux limites distordues, ou de manière équivalente à appliquer un champ de jauge sur le système. En choisissant une échelle de longueur  $L$  grande devant toutes les échelles de longueur caractéristiques du problème, le flux superfluide à vitesse  $\mathbf{v}'_s = \hbar \mathbf{K}'_s / m$  peut s'interpréter comme un changement de phase  $\Theta = K'_s L$  entre le plan  $x = 0$  et  $x = L$ , ou encore [cf. (82)] comme résultant de l'application d'un champ de jauge uniforme<sup>9</sup>  $\mathbf{A} = -\hbar\Theta/L\mathbf{e}_x = -m\mathbf{v}'_s$  avec des conditions aux limites périodiques entre  $x = 0$  et  $x = L$ . On sait que l'augmentation d'énergie libre par unité de volume s'écrit alors

$$\frac{\Delta F'}{\mathcal{V}} = \frac{\mathbf{A}^2}{2m} \rho_s = \frac{1}{2} m\rho_s \mathbf{v}'_s{}^2 \quad (89)$$

ce qui prouve (88). Pour trouver le changement d'impulsion (87), écrivons explicitement l'hamiltonien du système en présence du champ de jauge uniforme  $\mathbf{A} = -m\mathbf{v}'_s$  :

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^N \frac{(\hat{\mathbf{p}}_j - \mathbf{A})^2}{2m} + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N) + \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}'_s + \frac{1}{2} N m \mathbf{v}'_s{}^2 \end{aligned} \quad (90)$$

où l'opérateur  $\hat{\mathbf{P}} = \sum_j \hat{\mathbf{p}}_j$  représente l'impulsion totale du fluide. Un calcul de moyenne thermodynamique calqué sur celui du paragraphe § 4-2 conduit alors à

$$\mathbf{P} = -k_B T \frac{\partial(\log \mathcal{Z})}{\partial \mathbf{v}'_s} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}'_s}, \quad (91)$$

d'où la relation (87) recherchée puisque  $F$  varie comme  $\frac{1}{2} \rho_s \mathbf{v}'_s{}^2$ .

Revenons pour finir sur le changement de référentiel qui a consisté à nous placer dans le repère bougeant à la même vitesse que les parois du tube. On peut revenir au référentiel initial en utilisant les relations générales de transformation de l'impulsion et de l'énergie dans un changement

9. Concernant le signe — qui apparaît dans cette expression, rappelons que le potentiel vecteur  $m\Omega r \mathbf{e}_\varphi$  en (78) correspondait à un courant superfluide négatif dans le référentiel de l'anneau.

de repère galiléen [cf. appendice, eqs (123-124), avec  $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}_n$ ] :

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathcal{V}} = \frac{\mathbf{P}'}{\mathcal{V}} + m\rho\mathbf{v}_n \quad (92)$$

$$\frac{\Delta F}{\mathcal{V}} = \frac{\Delta F'}{\mathcal{V}} + \frac{\mathbf{P}'}{\mathcal{V}} \cdot \mathbf{v}_n + \frac{1}{2}m\rho\mathbf{v}_n^2. \quad (93)$$

ce qui termine la démonstration de (85-86).

## 5 Appendice : changements de référentiel

Nous utilisons dans ce chapitre deux types de changement de référentiel. Partant du référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$  toujours supposé galiléen, nous passons à un autre référentiel  $\mathcal{R}'$  qui peut être

- en mouvement de translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , auquel cas  $\mathcal{R}'$  est également galiléen ;
- en mouvement de rotation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , auquel cas  $\mathcal{R}'$  n'est pas galiléen.

Le but de cet appendice est de déterminer comment décrire ces changements de référentiel dans le cadre de la physique quantique en utilisant une transformation unitaire.

Sur le plan pratique, l'intérêt d'un changement de référentiel apparaît clairement quand on considère une situation où le récipient (ou le piège) contenant le fluide est lui-même en mouvement dans le référentiel du laboratoire. L'hamiltonien pour les  $N$  particules du fluide s'écrit alors

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}_j, t) \right) + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N), \quad (94)$$

où le terme  $V_{\text{trap}}(\mathbf{r}_j, t)$  décrit le potentiel exercé par les parois du récipient sur l'atome  $j$  localisé au point  $\mathbf{r}_j$  ; le terme  $V_{\text{int}}$  décrit l'interaction entre les particules du fluide et ne dépend donc que la différence entre coordonnées  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ . La dépendance explicite en temps de  $V_{\text{trap}}$  provient du mouvement des parois ; le but premier de la transformation unitaire est d'éliminer cette dépendance explicite pour se ramener à un hamiltonien indépendant du temps, avec lequel il sera plus simple d'appliquer les principes généraux de la physique statistique.

### A1. Transformation unitaire

Rappelons tout d'abord les principes généraux d'une transformation unitaire. Partons d'un système décrit par un hamiltonien  $H(t)$  dépendant du temps, et un état évoluant selon l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle. \quad (95)$$

On se donne un opérateur  $\hat{U}(t)$  et on construit les états transformés

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(t)\rangle. \quad (96)$$

L'équation d'évolution de  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  est donnée elle aussi par une équation de Schrödinger, avec l'hamiltonien  $\hat{\hat{H}}$  :

$$i\hbar \frac{\partial |\tilde{\psi}(t)\rangle}{\partial t} = \hat{\hat{H}}|\tilde{\psi}(t)\rangle, \quad \hat{\hat{H}} = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger + i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt}\hat{U}^\dagger. \quad (97)$$

Notre but dans ce qui suit est de proposer un opérateur  $\hat{U}$  tel que le transformé  $\hat{\hat{H}}$  de l'hamiltonien donné en (94) soit indépendant du temps.

### A2. Mouvement de translation

Supposons que le récipient contenant les particules est en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}_0$  par rapport au laboratoire. La dépendance en temps du potentiel de piégeage est donc simple :

$$V_{\text{trap}}(\hat{\mathbf{r}}_j, t) = V_{\text{trap}}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}_j - \mathbf{v}_0 t) \quad (98)$$

où  $V_{\text{trap}}^{(0)}$  représente le potentiel de confinement pour des parois au repos.

Le but premier de la transformation unitaire est par conséquent de modifier l'opérateur position de chaque particule de sorte que

$$\hat{U} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{U}^\dagger = \hat{\mathbf{r}}_j + \mathbf{v}_0 t. \quad (99)$$

L'opérateur qui translate la position de la particule  $j$  d'une quantité  $\mathbf{v}_0 t$  est simple : il s'agit de

$$\hat{U}_j = \exp(i \hat{\mathbf{p}}_j \cdot \mathbf{v}_0 t / \hbar). \quad (100)$$

Pour nous en convaincre, limitons-nous à une particule pour simplifier les notations, prenons par exemple  $v_0$  le long de l'axe  $x$  et utilisons  $\hat{p}_x = -i\hbar \partial_x$ . L'action de  $\hat{U}$  sur une fonction  $\psi(\mathbf{r})$  s'écrit alors :

$$\hat{U} \psi(\mathbf{r}) = \exp(v_0 t \partial_x) \psi(\mathbf{r}) = \psi(x + v_0 t, y, z) \quad (101)$$

car on reconnaît en développant l'exponentielle le développement de Taylor de la fonction  $\psi$ . On peut également prouver (99-100) en utilisant pour toute fonction régulière  $F(p)$  :

$$[\hat{x}, F(\hat{p}_x)] = i\hbar F'(\hat{p}_x) \quad \Rightarrow \quad [\hat{x}, e^{-i\hat{p}_x v_0 t/\hbar}] = \hat{x} + v_0 t. \quad (102)$$

**Versión minimale.** Considérons l'opérateur agissant sur toutes les particules du fluide

$$\hat{U}^{(\min)} = \exp\left(i \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 t/\hbar\right) \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{P}} = \sum_j \hat{\mathbf{p}}_j, \quad (103)$$

où  $\hat{\mathbf{P}}$  représente l'impulsion totale du gaz. L'étiquette <sup>(min)</sup> utilisée ici indique qu'il s'agit de la version minimale permettant de s'affranchir de la dépendance en temps de l'hamiltonien, la version complète étant abordée au paragraphe suivant. Dans la transformation unitaire associée à  $\hat{U}$ , les opérateurs impulsion  $\hat{\mathbf{p}}_j$  ne sont pas modifiés. Il en va de même pour l'énergie d'interaction entre particules puisque les  $\hat{\mathbf{r}}_j$  sont tous translatés de la même quantité et que l'énergie d'interaction ne dépend que des différences  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ . En utilisant (97), on arrive donc à l'hamiltonien transformé :

$$\hat{H}^{(\min)} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N) - \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0. \quad (104)$$

En introduisant le potentiel vecteur uniforme

$$\mathbf{A} = m\mathbf{v}_0, \quad (105)$$

on peut également écrire cet hamiltonien sous la forme

$$\hat{H}^{(\min)} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{(\hat{\mathbf{p}}_j - \mathbf{A})^2}{2m} + V_{\text{trap}}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N) - \frac{1}{2} N m v_0^2. \quad (106)$$

Nous pourrions nous arrêter à ce stade puisque nous disposons maintenant d'un hamiltonien indépendant du temps. Toutefois cet hamiltonien n'est pas exactement identique à celui utilisé pour l'équation de Schrödinger habituelle, du fait de la présence du terme linéaire en  $\mathbf{P}$  dans (104). Ceci complique l'interprétation des phénomènes physiques : ainsi l'opérateur impulsion de chaque particule n'est plus égal à la masse multipliée par l'opérateur vitesse de cette particule.

Comme l'équation de Schrödinger doit être invariante dans un changement de référentiel galiléen, nous savons qu'il doit être possible « d'enrichir » la transformation unitaire (103) pour aboutir à un hamiltonien exactement égal à celui de Schrödinger. Ceci revient à faire une transformation de jauge pour éliminer le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  qui apparaît dans (106) ; cette opération est possible puisque  $\mathbf{A}$  est uniforme et ne correspond à aucun effet observable. Cette deuxième étape est l'objet du paragraphe suivant.

**Versión complète.** Pour aboutir à un hamiltonien indépendant du temps identique à celui intervenant dans l'équation de Schrödinger, considérons la transformation unitaire générée par l'opérateur

$$\hat{U} = \exp\left(i (\hat{\mathbf{P}} t - N m \hat{\mathbf{R}}) \cdot \mathbf{v}_0/\hbar\right) \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_j \hat{\mathbf{r}}_j, \quad \hat{\mathbf{P}} = \sum_j \hat{\mathbf{p}}_j, \quad (107)$$

$\hat{\mathbf{R}}$  représentant donc l'opérateur centre de masse du gaz. En utilisant la formule de Glauber

$$e^{\hat{A} + \hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A}, \hat{B}]/2}, \quad (108)$$

valable quand  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  commutent tous deux avec leur commutateur, et

$$[\hat{R}_\alpha, \hat{P}_\beta] = i\hbar \delta_{\alpha, \beta}, \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad (109)$$

on peut également écrire  $\hat{U}$  sous la forme

$$\hat{U} = \exp\left(i \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 t/\hbar\right) \exp\left(-i N m \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}_0/\hbar\right) e^{+i N m v_0^2 t/2\hbar} \quad (110)$$

$$= \exp\left(-i N m \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}_0/\hbar\right) \exp\left(i \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 t/\hbar\right) e^{-i N m v_0^2 t/2\hbar}. \quad (111)$$

On peut alors vérifier les relations de commutation suivantes :

$$\hat{U} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{U}^\dagger = \hat{\mathbf{r}}_j + \mathbf{v}_0 t \quad (112)$$

pour les positions (inchangée par rapport au paragraphe qui précède) et

$$\hat{U} \hat{\mathbf{p}}_j \hat{U}^\dagger = \hat{\mathbf{p}}_j + m\mathbf{v}_0 \quad (113)$$

pour les impulsions. Le dernier terme de (97) s'écrit dans ce cas (il est plus simple d'utiliser la forme (110) de l'opérateur  $\hat{U}$ ) :

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{U}^\dagger = -\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 - \frac{1}{2} N m v_0^2 \quad (114)$$

si bien que l'hamiltonien total après transformation est

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N). \quad (115)$$

Cet hamiltonien est bien conforme à ce que l'on attend dans le référentiel au repos du récipient contenant le fluide. La signification physique des opérateurs position et impulsion après transformation unitaire est également conforme à l'intuition pour un changement de repère galiléen. En écrivant (112) sous la forme  $\hat{\mathbf{r}}_j = \hat{U} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{U}^\dagger - \mathbf{v}_0 t$ , on voit que l'opérateur  $\mathbf{r}_j$  est désormais associé à la quantité physique *position dans un repère lié au référentiel  $\mathcal{R}'$* , alors que la quantité physique *position dans le référentiel  $\mathcal{R}$* , qui était décrite avant transformation par  $\hat{\mathbf{r}}_j$ , est désormais décrite par  $\hat{U} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{U}^\dagger$ . De même, l'opérateur  $\mathbf{p}_j$  après transformation est associé à la quantité physique *quantité de mouvement (masse  $\times$  vitesse) dans un repère lié au référentiel  $\mathcal{R}'$* .

### A3. Invariance galiléenne de l'équation de Schrödinger

La transformation unitaire trouvée au paragraphe qui précède permet de prouver l'invariance galiléenne de l'équation de Schrödinger, au moins si l'on oublie la présence des parois qui pourraient briser cette invariance. Partons de l'hamiltonien du fluide :

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N), \quad (116)$$

dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . Pour tout choix de  $\mathbf{v}_0$  – correspondant au passage dans un autre référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$  –, on introduit l'opérateur  $\hat{U}$  défini

plus haut (107) et on a le résultat

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger + i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} \hat{U}^\dagger \\ &= \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger - \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 - \frac{1}{2} N m v_0^2 \\ &= \hat{H} \end{aligned} \quad (117)$$

L'hamiltonien obtenu après transformation unitaire est identique à l'hamiltonien de départ : c'est l'invariance recherchée.

Ceci permet de générer une infinité de solutions à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (118)$$

en partant d'une solution donnée  $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ . On sait en effet d'après ce qui précède que la fonction transformée  $\tilde{\Psi} = \hat{U} \Psi$ , qui s'écrit explicitement [cf. (111)]

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) &= \hat{U} \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \\ &= \exp[-i N m (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_0 + v_0^2 t / 2) / \hbar] \Psi(\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_0 t, \dots, \mathbf{r}_N + \mathbf{v}_0 t, t) \end{aligned} \quad (119)$$

avec  $\mathbf{R} = \left( \sum_j \mathbf{r}_j \right) / N$ , satisfait l'équation de Schrödinger pour l'hamiltonien transformé, dont nous venons de voir qu'il coïncide avec l'hamiltonien initial.

Dans le cas particulier où l'état  $\Psi$  considéré est un état propre de l'impulsion totale et de l'énergie totale avec les valeurs propres  $\mathbf{P}$  et  $E$ , l'état transformé est également état propre de l'impulsion et de l'énergie. Pour le montrer et trouver les valeurs propres correspondantes, partons de la relation suivante pour l'impulsion

$$\hat{\mathbf{P}} \tilde{\Psi} = \hat{U} \left( \hat{U}^\dagger \hat{\mathbf{P}} \hat{U} \right) \Psi. \quad (120)$$

En utilisant (113) avec  $\hat{U}^\dagger(\mathbf{v}_0) = \hat{U}(-\mathbf{v}_0)$

$$\hat{U}^\dagger \hat{\mathbf{P}} \hat{U} = \hat{\mathbf{P}} - N m \mathbf{v}_0 \quad (121)$$

on déduit que  $\tilde{\Psi}$  est état propre de l'impulsion avec la valeur propre  $\mathbf{P} - N m \mathbf{v}_0$ .



Pour l'énergie, on procède de manière similaire :

$$\begin{aligned}\hat{H} \tilde{\Psi} &= \hat{U} \left( \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} \right) \Psi \\ &= \hat{U} \left( \hat{H} - \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} N m v_0^2 \right) \Psi \\ &= \left( E - \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} N m v_0^2 \right) \tilde{\Psi}\end{aligned}\quad (122)$$

On a donc dans un changement de repère galiléen :

$$\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P} - N m \mathbf{v}_0, \quad (123)$$

$$E \longrightarrow E - \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} N m v_0^2. \quad (124)$$

#### A4. Mouvement de rotation

Considérons maintenant le cas où le récipient qui contient le fluide est en mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire  $\Omega$  autour de l'axe  $Oz$ . La dépendance en temps du potentiel de piégeage pour la particule  $j$  s'écrit :

$$V_{\text{trap}}(\mathbf{r}_j, t) = V_{\text{trap}}^{(0)}[x_j \cos(\Omega t) + y_j \sin(\Omega t), -x_j \sin(\Omega t) + y_j \cos(\Omega t), z_j]. \quad (125)$$

Nous avons étudié en détail dans le cours 2013-14 (chapitre 4) la transformation unitaire permettant d'éliminer cette dépendance temporelle, qui consiste à passer dans le référentiel tournant à vitesse  $\Omega$ . Nous allons donc nous contenter de rappeler sans démonstration les résultats principaux.

Posons

$$\hat{U}(t) = \exp\left(i \hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\Omega} t / \hbar\right) = \exp\left(i L_z \Omega t / \hbar\right) \quad (126)$$

où  $\hat{\mathbf{L}}$  est l'opérateur moment cinétique total du système

$$\hat{L}_z = \sum_{j=1}^N \hat{L}_{j,z} \quad \text{avec} \quad \hat{L}_{j,z} = \hat{x}_j \hat{p}_{j,y} - \hat{y}_j \hat{p}_{j,x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi_j}, \quad (127)$$

où la dernière expression fait référence aux coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$  avec  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Pour une particule, l'action de  $\hat{U}$

sur une fonction  $\psi(r, \varphi, z)$  est

$$\begin{aligned}\hat{U} \psi(r, \varphi, z) &= \exp\left(\Omega t \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \psi(r, \varphi, z) \\ &= \psi(r, \varphi + \Omega t, z).\end{aligned}\quad (128)$$

Après quelques calculs sans grande difficulté, on trouve l'hamiltonien qui régit l'évolution du fluide piégé après transformation unitaire :

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}_j) \right) + V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N) - \Omega \hat{L}_z. \quad (129)$$

On peut réécrire cet hamiltonien sous une forme légèrement différente en introduisant le potentiel vecteur

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (130)$$

et on trouve

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{(\hat{\mathbf{p}}_j - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}_j))^2}{2m} + V_{\text{trap}}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}_j) - \frac{1}{2} m \Omega^2 (\hat{x}_j^2 + \hat{y}_j^2) \right) \\ &+ V_{\text{int}}(\hat{\mathbf{r}}_1, \dots, \hat{\mathbf{r}}_N).\end{aligned}\quad (131)$$

Le résultat trouvé pour  $\hat{H}$  appelle deux remarques. Tout d'abord, on note qu'il est bien indépendant du temps : on va pouvoir utiliser cet hamiltonien comme base d'une étude thermodynamique à l'équilibre. On note par ailleurs une très grande similarité entre la forme de la transformation unitaire (126) et son résultat (129) avec ce que nous avons trouvé pour un mouvement de translation dans le cas de la « version minimale ». On pourra comparer par exemple (129) et (104) : on remplace simplement l'opérateur  $-\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0$  par l'opérateur  $-\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ .

Toutefois cette similarité est trompeuse. Dans le cas d'une translation, nous avons pu prolonger notre analyse et éliminer complètement la contribution de  $-\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}_0$  : cette élimination était possible du fait de l'invariance galiléenne de l'équation de Schrödinger. En d'autres termes, le potentiel vecteur qui apparaissait dans l'écriture (106) pouvait être éliminé car il était de rotationnel nul. Au contraire, le terme  $-\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\Omega}$  ne peut pas être éliminé

par une autre transformation unitaire : le référentiel tournant est non galiléen et on ne peut pas écrire une équation de Schrödinger « habituelle » dans ce référentiel. Une autre formulation du même point consiste à remarquer que le potentiel vecteur (130) n'est pas de rotationnel nul et ne peut donc pas être éliminé par une transformation de jauge.

**Interprétation physique des opérateurs dans le référentiel tournant.** Introduisons une base  $\mathbf{u}_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) liée au repère galiléen de départ et une base  $\mathbf{u}'_\alpha$  liée au référentiel tournant. On peut montrer que l'action de  $\hat{U}$  correspond à ce changement de base : le nouvel opérateur position  $\hat{U}\hat{\mathbf{r}}_j\hat{U}^\dagger$  correspond à la quantité physique « position de la particule  $j$  dans la base  $\mathbf{u}'_\alpha$  ».

La présence du terme  $-\Omega\hat{L}_z$  dans l'hamiltonien vient modifier la relation usuelle entre vitesse et impulsion. On peut définir l'opérateur vitesse pour une particule  $j$  donnée à partir de l'hamiltonien (129) en se plaçant en point de vue de Heisenberg (on omettra l'indice  $j$  dans les quelques lignes qui suivent) :

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}] \quad (132)$$

ce qui conduit à

$$\hat{v}_x = \frac{\hat{p}_x}{m} + \Omega\hat{y}, \quad \hat{v}_y = \frac{\hat{p}_y}{m} - \Omega\hat{x}, \quad \hat{v}_z = \frac{\hat{p}_z}{m}. \quad (133)$$

En d'autres termes, dans la nouvelle représentation, l'impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$  et la quantité de mouvement  $M\hat{\mathbf{v}}$  sont reliées par la relation

$$\hat{\mathbf{p}} = m\hat{\mathbf{v}} + m\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{r}}. \quad (134)$$

En utilisant la loi de composition des vitesses, on peut en déduire que l'opérateur impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$  dans la nouvelle représentation est associé à la quantité physique *masse*  $\times$  *vitesse dans le référentiel galiléen*  $\mathcal{R}$ , alors que l'opérateur  $\hat{\mathbf{v}}$  est associé à la quantité physique *vitesse dans le référentiel tournant* puisque c'est la dérivée de l'opérateur *position dans le référentiel tournant*.

## Références

- Abo-Shaeer, J. R., C. Raman, J. M. Vogels & W. Ketterle (2001), « Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates », in *Science* 292, pp. 476–479.
- Allen, J. F. & A. D. Misener (1938), « Flow of liquid helium II », in *Nature* 141, p. 75.
- Amo, A, D Sanvitto, FP Laussy, D Ballarini, E Del Valle, MD Martin, A Lemaître, J Bloch, DN Krizhanovskii, MS Skolnick, et al. (2009), « Collective fluid dynamics of a polariton condensate in a semiconductor microcavity », in *Nature* 457.7227, pp. 291–295.
- Amo, Alberto, Jérôme Lefrère, Simon Pigeon, Claire Adrados, Cristiano Ciuti, Iacopo Carusotto, Romuald Houdré, Elisabeth Giacobino & Alberto Bramati (2009), « Superfluidity of polaritons in semiconductor microcavities », in *Nature Physics* 5.11, pp. 805–810.
- Baharian, Soheil & Gordon Baym (2013), « Bose-Einstein condensates in toroidal traps : Instabilities, swallow-tail loops, and self-trapping », in *Phys. Rev. A* 87 (1), p. 013619.
- Bloch, I., J. Dalibard & W. Zwerger (2008), « Many-body physics with ultracold gases », in *Rev. Mod. Phys* 80.3, 885, p. 885.
- Bloch, I., T. W. Hänsch & T. Esslinger (2000), « Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition », in *Nature* 403, p. 166.
- Carusotto, Iacopo & Yvan Castin (2011), « Nonequilibrium and local detection of the normal fraction of a trapped two-dimensional Bose gas », in *Physical Review A* 84.5, p. 053637.
- Carusotto, Iacopo & Cristiano Ciuti (2013), « Quantum fluids of light », in *Rev. Mod. Phys.* 85 (1), pp. 299–366.
- Ceperley, D. M. (1995), « Path integrals in the theory of condensed helium », in *Rev. Mod. Phys.* 67, p. 279.
- Cooper, N. R. & Z. Hadzibabic (2010), « Measuring the Superfluid Fraction of an Ultracold Atomic Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 104.3, p. 030401.
- Corman, Laura, Lauriane Chomaz, Tom Bienaimé, Rémi Desbuquois, Christof Weitenberg, Sylvain Nascimbene, Jean Dalibard & Jérôme Beugnon (2014), « Quench-induced supercurrents in an annular Bose gas », in *Phys. Rev. Lett* 113.13, p. 135302.

- Dubessy, R., T. Liennard, P. Pedri & H. Perrin (2012), « Critical rotation of an annular superfluid Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* 86 (1), p. 011602.
- Eckel, S., F. Jendrzejewski, A. Kumar, C. J. Lobb & G. K. Campbell (2014), « Interferometric Measurement of the Current-Phase Relationship of a Superfluid Weak Link », in *Phys. Rev. X* 4 (3), p. 031052.
- Eckel, Stephen, Jeffrey G Lee, Fred Jendrzejewski, Noel Murray, Charles W Clark, Christopher J Lobb, William D Phillips, Mark Edwards & Gretchen K Campbell (2014), « Hysteresis in a quantized superfluid/atomtronic/' circuit », in *Nature* 506.7487, pp. 200–203.
- Guéry-Odelin, D. & S. Stringari (1999), « Scissors mode and superfluidity of a trapped Bose-Einstein condensed gas », in *Phys. Rev. Lett.* 83, p. 4452.
- Hadzibabic, Z. & J. Dalibard (2011), « Two-dimensional Bose fluids : An atomic physics perspective », in *Rivista del Nuovo Cimento* 34, p. 389.
- Hadzibabic, Z., P. Krüger, M. Cheneau, B. Battelier & J. Dalibard (2006), « Berezinskii-Kosterlitz-Thouless crossover in a trapped atomic gas », in *Nature* 441, pp. 1118–1121.
- Hagley, E. W., L. Deng, M. Kozuma, M. Trippenbach, Y. B. Band, et al. (1999), « Measurement of the Coherence of a Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 83, p. 3112.
- Hess, G. B. & W. M. Fairbank (1967), « Measurements of Angular Momentum in Superfluid Helium », in *Phys. Rev. Lett.* 19 (5), pp. 216–218.
- Hofferberth, S., I. Lesanovsky, B. Fischer, T. Schumm & J. Schmiedmayer (2007), « Non-equilibrium coherence dynamics in one-dimensional Bose gases », in *Nature* 449.7160, pp. 324–327.
- Kagan, Y., B. V. Svistunov & G. V. Shlyapnikov (1987), « Influence on inelastic processes of the phase transition in a weakly collisional two-dimensional Bose gas », in *Sov. Phys. JETP* 66, p. 314.
- Kapitza, P. (1938), « Viscosity of liquid helium below the  $\lambda$ -point », in *Nature* 141, p. 74.
- Kasprzak, J., M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, et al. (2006), « Bose-Einstein condensation of exciton polaritons », in *Nature* 443.7110, pp. 409–414.
- Klaers, Jan, Julian Schmitt, Frank Vewinger & Martin Weitz (2010), « Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity », in *Nature* 468.7323, pp. 545–548.
- Kosterlitz, J. M. & D. J. Thouless (1973), « Ordering, metastability and phase transitions in two dimensional systems », in *J. Phys. C : Solid State Physics* 6, p. 1181.
- Landau, L. D. (1941), « The theory of superfluidity of helium II », in *J. Phys. (USSR)* 5, p. 71.
- Leggett, A. J. (2006), *Quantum Liquids*, Oxford University Press.
- London, F. (1938a), « On the Bose-Einstein Condensation », in *Phys. Rev.* 54, p. 947.
- (1938b), « The  $\lambda$ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy », in *Nature* 141, p. 643.
- Madison, K. W., F. Chevy, W. Wohlleben & J. Dalibard (2000), « Vortices in a stirred Bose-Einstein condensate », in *J. Mod. Opt.* 47, p. 2715.
- Moulder, Stuart, Scott Beattie, Robert P. Smith, Naaman Tammuz & Zoran Hadzibabic (2012), « Quantized supercurrent decay in an annular Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* 86 (1), p. 013629.
- Mueller, Erich J. (2002), « Superfluidity and mean-field energy loops : Hysteretic behavior in Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* 66 (6), p. 063603.
- Murray, Noel, Michael Krygier, Mark Edwards, K. C. Wright, G. K. Campbell & Charles W. Clark (2013), « Probing the circulation of ring-shaped Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* 88 (5), p. 053615.
- Navon, Nir, Alexander L Gaunt, Robert P Smith & Zoran Hadzibabic (2015), « Critical dynamics of spontaneous symmetry breaking in a homogeneous Bose gas », in *Science* 347.6218, pp. 167–170.
- Nelson, D. R. & J. M. Kosterlitz (1977), « Universal Jump in the Superfluid Density of Two-Dimensional Superfluids », in *Phys. Rev. Lett.* 39, p. 1201.
- Nozières, P. (1995), « Some comments on Bose-Einstein Condensation », in *Bose-Einstein Condensation*, ed. by A. Griffin, D. W. Snoke & S. Stringari, Cambridge: Cambridge University Press.
- Penrose, O. & L. Onsager (1956), « Bose-Einstein condensation and liquid helium », in *Phys. Rev.* 104, p. 576.
- Prokof'ev, Nikolai V. & Boris V. Svistunov (2000), « Two definitions of superfluid density », in *Phys. Rev. B* 61 (17), pp. 11282–11284.
- Ramanathan, A., K. C. Wright, S. R. Muniz, M. Zelan, W. T. Hill, C. J. Lobb, K. Helmerson, W. D. Phillips & G. K. Campbell (2011), « Superflow in a Toroidal Bose-Einstein Condensate : An Atom Circuit with a Tunable Weak Link », in *Phys. Rev. Lett.* 106.13, p. 130401.

- Sanvitto, D, FM Marchetti, MH Szymańska, G Tosi, M Baudisch, FP Laussy, DN Krizhanovskii, MS Skolnick, L Marrucci, A Lemaitre, et al. (2010), « Persistent currents and quantized vortices in a polariton superfluid », in *Nature Physics* 6.7, pp. 527–533.
- Sokol, P. E. (1995), « Bose-Einstein Condensation in Liquid Helium », in , *Bose-Einstein Condensation*, ed. by A. Griffin, D.W. Snoke & S. Stringari, Cambridge University Press, , pp. 51–85.
- Stenger, J., S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard & W. Ketterle (1999), « Bragg Spectroscopy of a Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 82 (23), pp. 4569–4573.
- Tisza, L. (1938), « Transport Phenomena in Helium II », in *Nature* 141, p. 913.
- Ueda, Masahito & Anthony J. Leggett (1999), « Ground-State Properties of a Rotating Bose-Einstein Condensate with Attractive Interaction », in *Phys. Rev. Lett.* 83 (8), pp. 1489–1493.