

# Des cages de lumière pour les atomes : la physique des pièges et des réseaux optiques

## Cours 4. Réseaux dépendant du temps

Jean Dalibard  
Chaire *Atomes et rayonnement*  
Année 2012-13

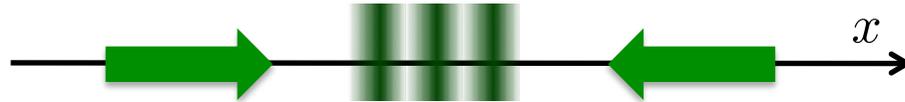


COLLÈGE  
DE FRANCE  
— 1530 —

# Les réseaux dépendant du temps

Une question générale, dont l'étude est rendue plus facile grâce à la flexibilité des réseaux optiques :

*Que se passe-t-il quand les paramètres du réseau varient dans le temps ?*



$$V(x) = V_0 \sin^2(kx) \longrightarrow V(x, t) = V_0(t) \sin^2[k(x - x_0(t))]$$

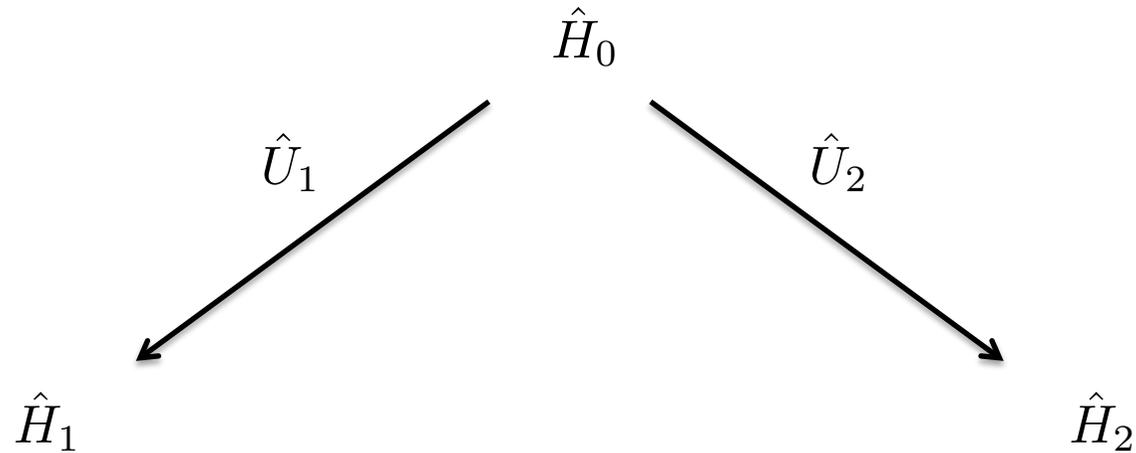
- Localisation dynamique et modification de l'effet tunnel
- Les oscillations de Bloch et leurs applications (mesure de force, métrologie)
- Spectroscopie des atomes dans le réseau
- Dynamique chaotique, localisation d'Anderson

**1.**

**Quelques hamiltoniens pour décrire  
les réseaux dépendant du temps**

# Transformations unitaires

On va considérer plusieurs hamiltoniens se déduisant les uns des autres par transformation unitaire



*Selon le problème considéré, on aura intérêt à choisir l'un ou l'autre de ces hamiltoniens.*

# Les deux transformations unitaires utiles ici

## Translation dans l'espace des impulsions :

$$\hat{U}_1(t) = e^{-i \hat{x} p_0(t)/\hbar} \quad \begin{cases} \hat{U}_1 \hat{x} \hat{U}_1^\dagger = \hat{x} \\ \hat{U}_1 \hat{p} \hat{U}_1^\dagger = \hat{p} + p_0 \end{cases}$$
$$i\hbar \frac{d\hat{U}_1}{dt} \hat{U}_1^\dagger = \hat{x} \dot{p}_0 \quad : \text{ajoute un potentiel linéaire (force uniforme)}$$

## Translation dans l'espace des positions :

$$\hat{U}_2(t) = e^{-i x_0(t) \hat{p}/\hbar} \quad \begin{cases} \hat{U}_2 \hat{x} \hat{U}_2^\dagger = \hat{x} - x_0 \\ \hat{U}_2 \hat{p} \hat{U}_2^\dagger = \hat{p} \end{cases}$$
$$i\hbar \frac{d\hat{U}_2}{dt} \hat{U}_2^\dagger = \dot{x}_0 \hat{p} \quad : \text{ajoute un terme linéaire en } \hat{p} \text{ (potentiel vecteur)}$$

## Les trois hamiltoniens utiles

$$\hat{H}_0(t) = \frac{[\hat{p} - A(t)]^2}{2m} + V(\hat{x})$$

$\hat{U}_1$

$\hat{U}_2$

$$\hat{H}_1(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F(t) \hat{x}$$

$$\hat{H}_2(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V[\hat{x} - x_0(t)]$$

*référentiel du réseau :  
potentiel fixe + force d'inertie*

*référentiel du laboratoire (galiléen) :  
réseau en mouvement*

$$A(t) = m\dot{x}_0(t)$$

$$F(t) = -\dot{A}(t) = -m\ddot{x}_0(t)$$

## 2.

# Hamiltonien du réseau vibrant dans l'approximation des liaisons fortes

**Dunlap-Kenkre (1986), Holthaus (1992) :**

Comportement d'électrons dans des cristaux soumis à un champ électromagnétique

*Il existe une valeur du champ oscillant pour laquelle le transport est complètement inhibé*

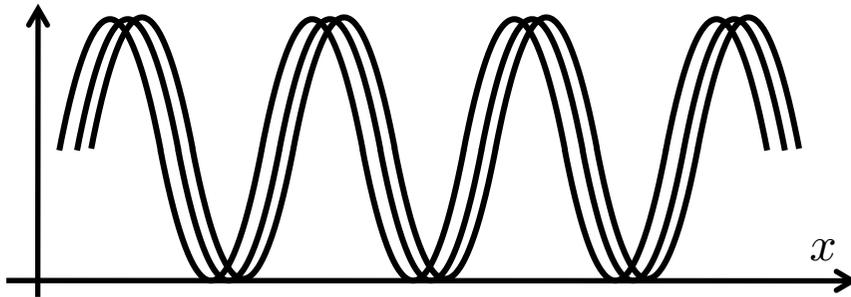
**Pour des atomes froids :**

Contrôle du coefficient tunnel pour favoriser la transition vers un isolant de Mott

Création de champs magnétiques artificiels ...

# Position du problème

Réseau périodique 1D infini, soumis à une vibration périodique en temps



$$V(x, t) = V_0 \sin^2[k(x - x_0(t))]$$

$x_0(t)$  périodique de pulsation  $\omega$   
par exemple :  $x_0(t) = \bar{x}_0 \cos(\omega t)$

On va restreindre la dynamique des atomes à

- la bande d'énergie fondamentale
- des transitions entre proches voisins

**Hamiltonien de Hubbard**

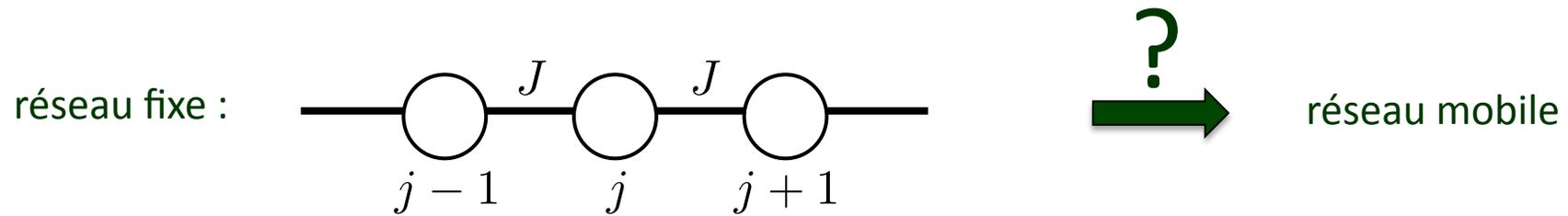
$$V_0 \gg E_r$$

$$E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$$

# L'hamiltonien de Hubbard pour un réseau secoué

Point de départ :  $\hat{H}_2(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V[\hat{x} - x_0(t)]$

*On veut simplifier cette expression à l'approximation de Hubbard*



On passe à la forme :  $\hat{H}_1(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F(t) \hat{x}$

$$-J (\hat{T}_1 + \hat{T}_1^\dagger)$$

avec  $\hat{T}_1 = \sum_j |w_{j+1}\rangle \langle w_j|$

$$-F(t) \sum_j a_j |w_j\rangle \langle w_j|$$

$$F(t) = -m\ddot{x}_0(t)$$

opérateur position diagonal  
dans la base de Wannier

# Hamiltonien de Hubbard (suite)

On prend donc en point de vue  $\hat{H}_1$  :

$$\hat{H}_1 = -J \left( \hat{T}_1 + \hat{T}_1^\dagger \right) - aF(t) \sum_j |w_j\rangle \langle w_j| \quad -aF(t) = \hbar\omega \underbrace{\xi(t)}_{\text{sans dimension}}$$

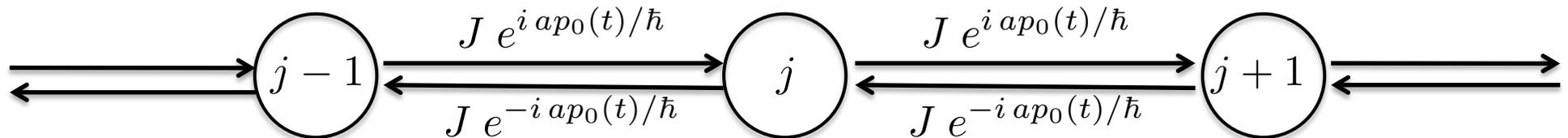
Le point de vue intermédiaire  $\hat{H}_0$  est également intéressant :

$$\hat{U}_1(t) = e^{-i \hat{x} p_0(t)/\hbar} \quad \longrightarrow \quad \hat{U}_1(t) |w_j\rangle = e^{-i j a p_0(t)/\hbar} |w_j\rangle$$

On prend  $p_0(t) = m\dot{x}_0$ , ce qui donne :  $\hat{H}_0(t) = \hat{U}_1^\dagger(t) \hat{H}_1(t) \hat{U}_1(t) + i\hbar \frac{d\hat{U}_1^\dagger}{dt} \hat{U}_1$

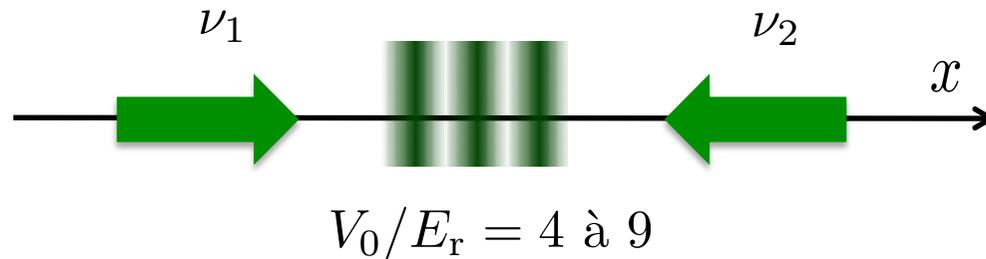
$$= -J \left( \hat{T}_1 e^{i a p_0(t)/\hbar} + \hat{T}_1^\dagger e^{-i a p_0(t)/\hbar} \right)$$

*Modulation périodique des coefficients tunnels, qui deviennent complexes*

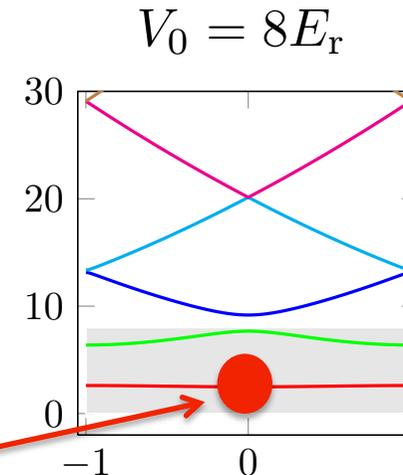


# Etude expérimentale : groupe de Pise (E. Arimondo 2007)

- On charge de manière adiabatique un condensat de rubidium dans un réseau formé avec de la lumière de longueur  $\lambda = 852 \text{ nm}$



atomes dans  
la bande fondamentale  
voisinage de  $q = 0$

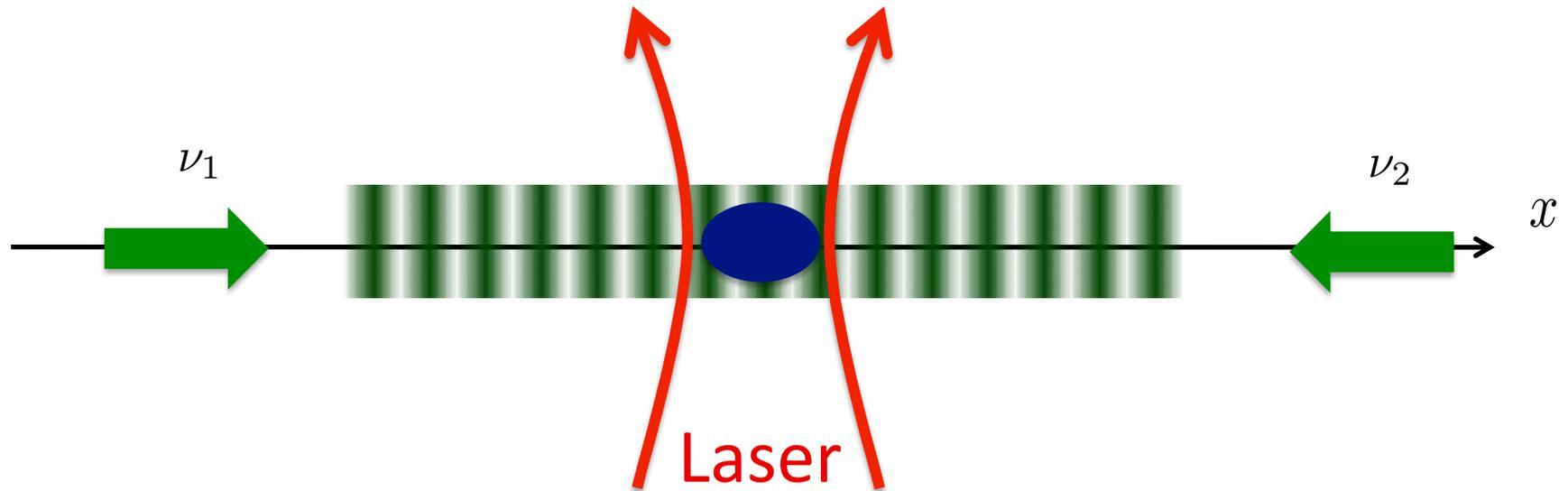


- On branche une modulation sinusoïdale de la différence de fréquence  $\nu_1 - \nu_2$  en utilisant des modulateurs acousto-optiques indépendants sur chacun des faisceaux

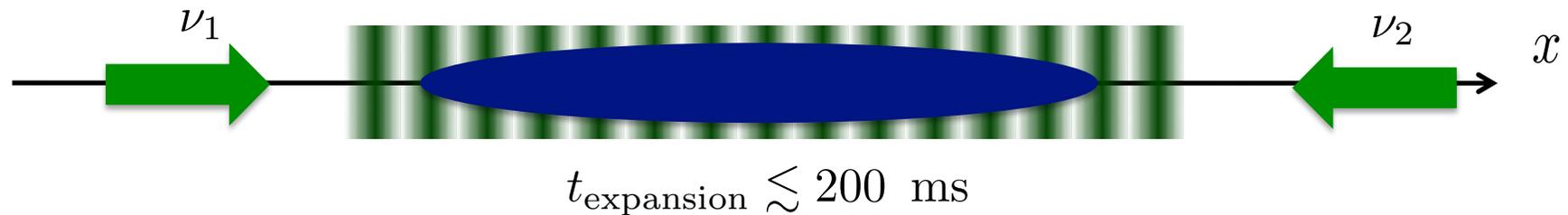
$$V(x, t) = V_0 \sin^2[k(x - x_0(t))] \quad x_0(t) = \bar{x}_0 \cos(\omega t)$$

- On montre que la dynamique (étalement d'un paquet d'ondes) des atomes dans le réseau modulé est similaire à celle d'un réseau fixe et on mesure le taux tunnel  $J'$

# Mesure du coefficient tunnel



On coupe le laser assurant le confinement le long de l'axe  $x$  :



On compare l'étalement en présence et en absence de modulation du réseau

# Les résultats du groupe de Pise

$$V(x, t) = V_0 \sin^2[k(x - x_0(t))] \quad x_0(t) = \bar{x}_0 \cos(\omega t)$$

Rapports des coefficients tunnel avec ( $J'$ ) et sans ( $J$ ) vibration pour

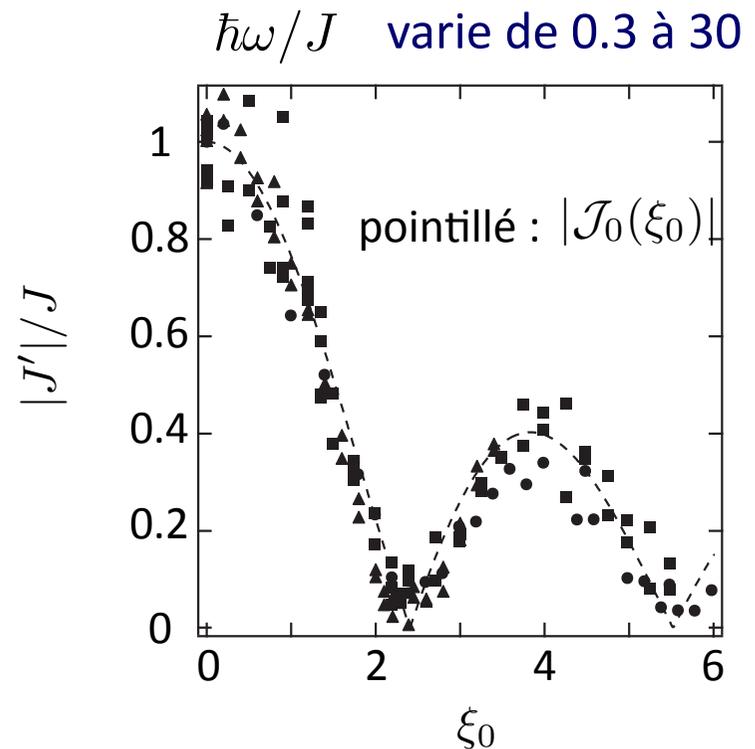
- différentes fréquences de vibration du réseau  $\omega/2\pi$
- différentes profondeurs du réseau  $V_0/E_r$
- différentes amplitudes de vibration  $\bar{x}_0$  (jusqu'à  $0.5 a$ )

**Courbe « universelle » en fonction de :**

$$\xi_0 = \frac{\text{travail de } F(0) \text{ sur une période spatiale}}{\text{quantum } \hbar\omega}$$

$$= -m\omega a \bar{x}_0 / \hbar$$

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t)$$

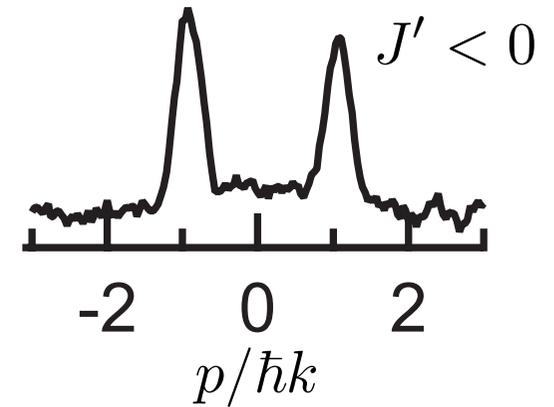
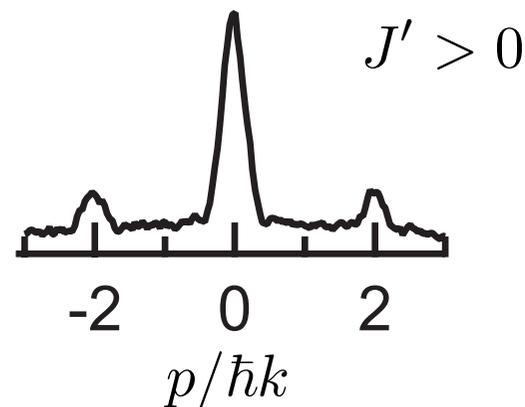
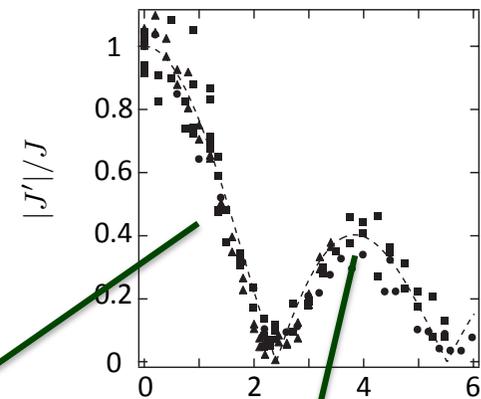


# Les résultats du groupe de Pise (suite)

L'étalement en présence de réseau ne donne pas accès au signe du coefficient tunnel

Un temps de vol sans réseau et sans piège dipolaire de 20 ms permet de tester la distribution en impulsion des atomes

- Position du maximum de la distribution en impulsion (minimum de l'énergie dans la zone de Brillouin)
- Largeur des pics (cohérence du gaz, initialement condensé)

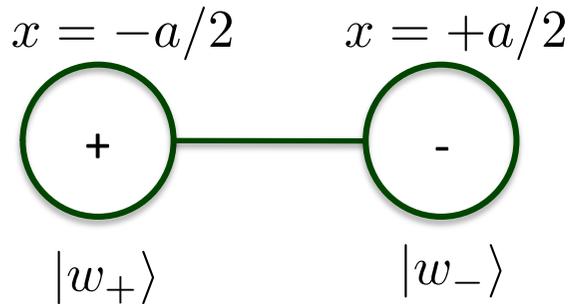


Cohérence à peu près maintenue (sur 100 ms) si  $J \ll \hbar\omega \ll \text{gap } 0 - 1$  et si on reste en dehors du voisinage de l'annulation de  $J'$

**3.**

**Approche naïve à la localisation dynamique,  
système à deux sites et réseau infini**

# Un modèle à deux sites



$$\hat{H} = -J (|w_+\rangle\langle w_-| + |w_-\rangle\langle w_+|) - \frac{1}{2}F(t)a (|w_+\rangle\langle w_+| - |w_-\rangle\langle w_-|)$$

Ecriture en terme des matrices de Pauli :  $\hat{H} = -J \hat{\sigma}_x - \frac{1}{2}F(t) a \hat{\sigma}_z$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problème formellement identique à celui d'un spin  $\frac{1}{2}$  dont le moment magnétique associé est couplé à deux champs magnétiques :

- un champ constant  $B_0$ , parallèle à l'axe  $x$
- un champ oscillant  $B_1$ , parallèle à l'axe  $z$

Comment est modifiée la réponse du spin au champ  $B_0$  (facteur de Landé) du fait de la présence du champ oscillant  $B_1$  ?

# Spin dans un champ en oscillation rapide

Haroche, Cohen-Tannoudji,  
Audouin, Schermann 1970

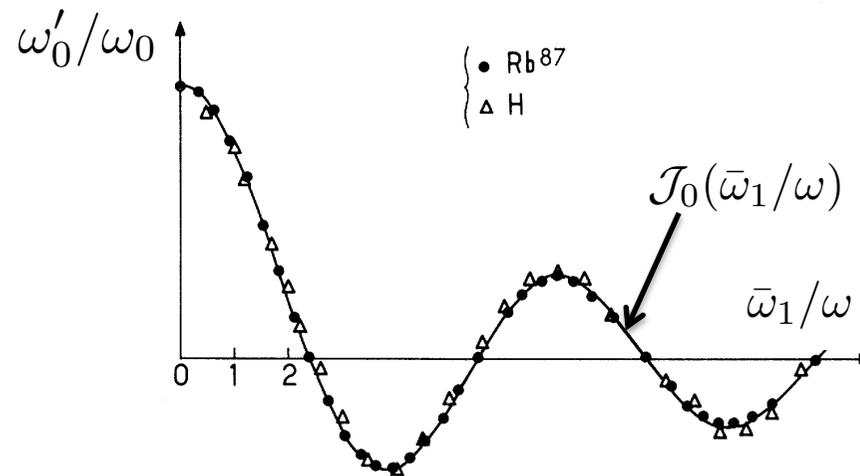
$$\vec{B}(t) = B_0 \vec{u}_x + B_1(t) \vec{u}_z$$

$$B_1(t) = \bar{B}_1 \cos(\omega t)$$

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_x + \frac{\hbar\bar{\omega}_1}{2} \cos(\omega t) \hat{\sigma}_z$$

$$\omega_0 \ll \omega$$

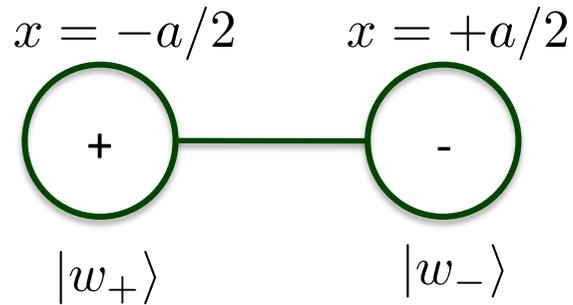
$$\bar{\omega}_1 \sim \omega$$



$\omega'_0 \propto$  séparation entre les raies spectrales en présence de  $B_1$  (séparation proportionnelle à  $B_0$ )

$\omega_0 \propto$  séparation entre les raies spectrales en absence de  $B_1$

## Le problème à deux sites



$$\hat{H} = -J \hat{\sigma}_x + \frac{1}{2} \hbar \omega \xi(t) \hat{\sigma}_z \quad \xi(t) = -\frac{F(t)a}{\hbar \omega}$$

Etat du système à l'instant  $t$

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_+(t)|w_+\rangle + \alpha_-(t)|w_-\rangle$$

Equations d'évolution :

$$\begin{cases} i \dot{\alpha}_+ = \frac{\omega}{2} \xi(t) \alpha_+ - \frac{J}{\hbar} \alpha_- \\ i \dot{\alpha}_- = -\frac{\omega}{2} \xi(t) \alpha_- - \frac{J}{\hbar} \alpha_+ \end{cases}$$

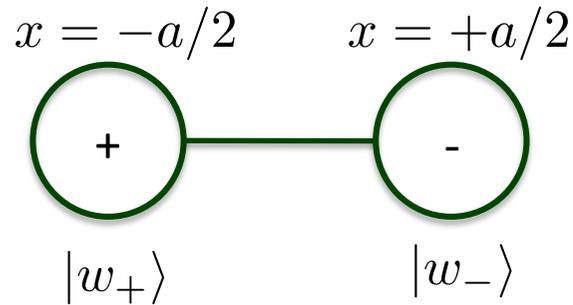
Si  $\xi(t)$  oscille vite à l'échelle du temps tunnel  $\hbar/J$ , il est utile d'introduire les nouvelles fonctions :

$$\tilde{\alpha}_\pm = \alpha_\pm \exp(\pm i\eta/2) \quad \eta(t) = \omega \int_0^t \xi(t') dt'$$

qui évoluent selon :

$$i\hbar \dot{\tilde{\alpha}}_+ = -J e^{i\eta} \tilde{\alpha}_- \quad i\hbar \dot{\tilde{\alpha}}_- = -J e^{-i\eta} \tilde{\alpha}_+$$

# Solution approchée du problème à deux sites



Etat du système :  $|\psi(t)\rangle = \tilde{\alpha}_+ e^{-i\eta/2} |w_+\rangle + \tilde{\alpha}_- e^{i\eta/2} |w_-\rangle$

$$\begin{cases} i\hbar \dot{\tilde{\alpha}}_+ = -J e^{i\eta} \tilde{\alpha}_- \\ i\hbar \dot{\tilde{\alpha}}_- = -J e^{-i\eta} \tilde{\alpha}_+ \end{cases} \quad \eta(t) = \omega \int_0^t \xi(t') dt'$$

On moyenne ces équations sur une période d'oscillation de  $\xi(t)$  ( $J/\hbar\omega \ll 1$ )

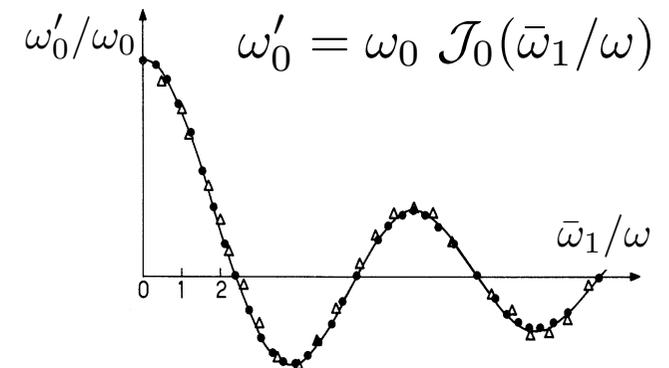
$$\begin{cases} \bar{\alpha}_\pm = \langle \tilde{\alpha}_\pm \rangle \\ J' = J \langle e^{i\eta} \rangle \end{cases} \quad \begin{cases} i\hbar \dot{\bar{\alpha}}_+ = -J' \bar{\alpha}_- \\ i\hbar \dot{\bar{\alpha}}_- = -J'^* \bar{\alpha}_+ \end{cases}$$

équations à coefficients constants !

Pour une modulation sinusoïdale :

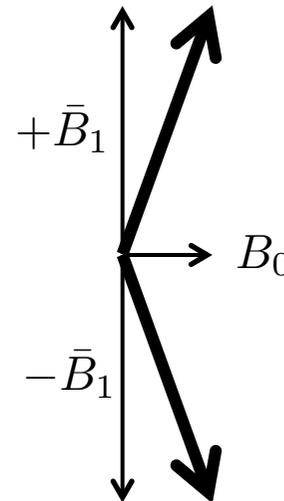
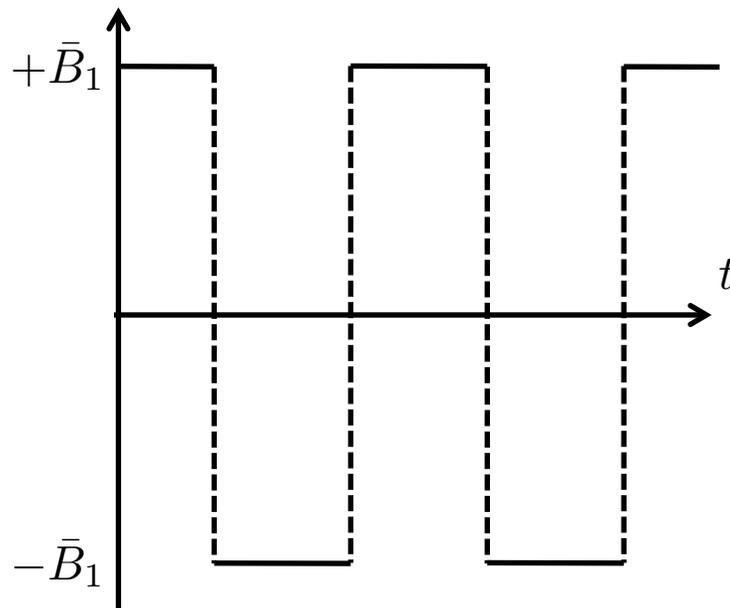
$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 \cos(\omega t) \\ \eta(t) &= \xi_0 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad J' = J \mathcal{J}_0(\xi_0)$$

$\mathcal{J}_0(x)$  : fonction de Bessel de première espèce  
(premier zéro en 2.405)



# Comment comprendre l'annulation $\left\{ \begin{array}{l} \text{du facteur de Landé} \\ \text{du coefficient tunnel} \end{array} \right. ?$

On remplace la modulation sinusoïdale  $B_1(t) = \bar{B}_1 \cos(\omega t)$  par une modulation carrée (plus simple analytiquement)



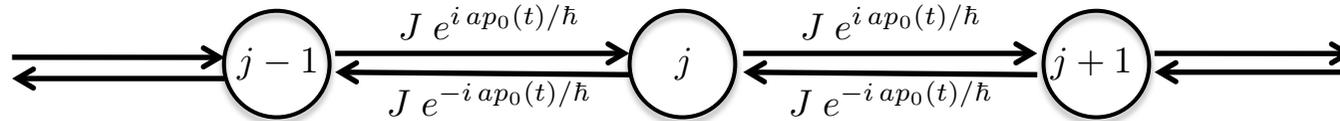
$$\sqrt{\bar{B}_1^2 + B_0^2} \approx \bar{B}_1 + \frac{B_0^2}{2\bar{B}_1} \approx \bar{B}_1$$

Modification du facteur de Landé :  $\text{sinc}\left(\frac{\pi}{2} \frac{\bar{\omega}_1}{\omega}\right)$  au lieu de  $\mathcal{J}_0\left(\frac{\bar{\omega}_1}{\omega}\right)$

Premier zéro en  $\bar{\omega}_1 = 2\omega$ : le spin fait exactement un tour complet à chaque demi-période !

# Transposition de cette méthode approchée au réseau infini

Choisissons la version  $\hat{H}_0$  de l'hamiltonien avec des taux tunnel modulés



et écrivons l'état de l'atome sous la forme  $|\phi(t)\rangle = \sum_j \tilde{\alpha}_j(t) |w_j\rangle$

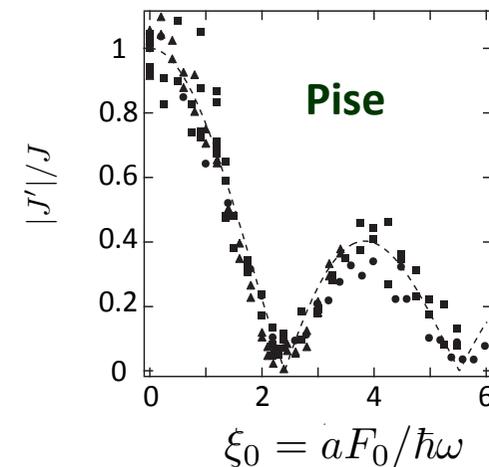
chaîne d'équations couplées :  $i\hbar\dot{\tilde{\alpha}}_j = -J (e^{i\eta} \tilde{\alpha}_{j-1} + e^{-i\eta} \tilde{\alpha}_{j+1})$   
 avec :  $\eta = \omega \int_0^t \xi(t') dt' = ap_0(t)/\hbar$

On prend la moyenne sur une période  $2\pi/\omega$   
 de ces équations :

$$i\hbar\dot{\bar{\alpha}}_j = -J' (\bar{\alpha}_{j-1} + \bar{\alpha}_{j+1})$$

$$J' = J \langle e^{i\eta} \rangle = J \mathcal{J}_0(\xi_0)$$

**équivalent à un réseau statique,  
 avec un taux tunnel  $J'$**



**4.**

**Utilisation du théorème de Bloch,  
lien avec l'approche de Floquet**

# Le théorème de Bloch dans le cas dépendant du temps

On considère un hamiltonien dépendant du temps et spatialement périodique à chaque instant :

$$\hat{H}(t) = \frac{(\hat{p} - A(t))^2}{2m} + V(\hat{x}, t)$$



$$V(x + a, t) = V(x, t)$$

La forme de Bloch est préservée au cours de l'évolution :

$$\phi(x, t = 0) = e^{iqx} u(x, t = 0) \quad u(x, t = 0) : \text{périodique de période } a$$

$$\phi(x, t) = e^{iqx} u(x, t) \quad u(x, t) : \text{périodique de période } a$$

même quasi-moment  $q$

$$\text{Démonstration : } [\hat{H}(t), \hat{T}_a] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\hat{U}(0 \rightarrow t), \hat{T}_a] = 0 \quad \hat{U} : \text{opérateur d'évolution}$$

$$\Rightarrow \phi(x, 0) \text{ et } \hat{U}(0 \rightarrow t)\phi(x, 0) = \phi(x, t) \text{ sont états propres de } \hat{T}_a \text{ avec la même v.p.}$$

# Evolution d'une onde de Bloch pour les trois hamiltoniens

$$\text{Hamiltonien } \hat{H}_0(t) = \frac{[\hat{p} - A(t)]^2}{2m} + V(\hat{x})$$

$$\text{Forme de Bloch conservée, } e^{ixq}u(x, 0) \rightarrow e^{ixq}u(x, t) \quad q(t) = q(0)$$

---

$$\text{Hamiltonien } \hat{H}_2(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V[\hat{x} - x_0(t)]$$

$$\text{Forme de Bloch conservée, } e^{ixq}u(x, 0) \rightarrow e^{ixq}u(x, t) \quad q(t) = q(0)$$

---

$$\text{Hamiltonien } \hat{H}_1(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) - F(t) \hat{x}$$

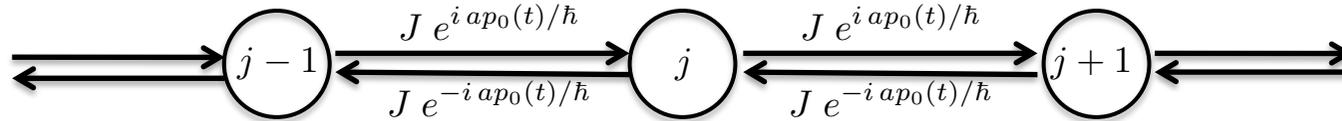
Il n'est pas spatialement périodique, mais il se déduit de  $\hat{H}_0$  par :

$$\phi(x, t) = \hat{U}_1 \phi_0(x, t) \quad e^{ixq}u(x, 0) \rightarrow e^{ixq(t)}u(x, t)$$

$$\hat{U}_1(t) = e^{-i \hat{x} p_0(t)/\hbar} \quad q(t) = q(0) - p_0(t)/\hbar = q(0) + \frac{1}{\hbar} \int_0^t F(t') dt'$$

# Evolution d'une onde de Bloch (approx. à une bande)

L'hamiltonien  $\hat{H}_0(t) = \frac{[\hat{p} - A(t)]^2}{2m} + V(\hat{x})$  devient  $\hat{H}_0(t) = -J \left( \hat{T}_1 e^{i a p_0(t)/\hbar} + \hat{T}_1^\dagger e^{-i a p_0(t)/\hbar} \right)$



Il n'y a qu'une seule fonction périodique sur le réseau (à une constante multiplicative près) :

$$|u\rangle = \sum_j |w_j\rangle$$

La conservation de la forme de Bloch  $e^{i x q} u(x, 0) \rightarrow e^{i x q} u(x, t)$  devient donc :

$$|\psi(0)\rangle = e^{-i \Phi_q(0)} \sum_j e^{i j a q} |w_j\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-i \Phi_q(t)} \sum_j e^{i j a q} |w_j\rangle$$

Cette solution est exacte dans le cadre du modèle à une bande

La valeur explicite de  $\Phi_q(t)$  est obtenue en injectant cette forme de solution dans l'équation de Schrödinger

## Evolution d'une onde de Bloch (suite)

La forme proposée  $|\psi(t)\rangle = e^{-i\Phi_q(t)} \sum_j e^{ijaq} |w_j\rangle$  est par construction des ondes de Bloch un état propre de l'hamiltonien

$$\hat{H}_0(t) = -J \left( \hat{T}_1 e^{iap_0(t)/\hbar} + \hat{T}_1^\dagger e^{-iap_0(t)/\hbar} \right)$$

avec la valeur propre  $E[q - p_0(t)/\hbar]$ , où  $E[q] = -2J \cos(aq)$

L'équation de Schrödinger  $i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_0(t)|\psi(t)\rangle$  s'écrit donc

$$\hbar \dot{\Phi}_q = E[q - p_0(t)/\hbar] \quad \Phi_q(t) = \Phi_q(0) + \frac{1}{\hbar} \int_0^t E[q - p_0(t')/\hbar] dt'$$

Pour une modulation sinusoïdale de période  $T = 2\pi/\omega$  :

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \bar{x}_0 \cos(\omega t) & \Phi_q(T) &= \Phi_q(0) - \frac{2J}{\hbar} \cos(aq) \mathcal{J}_0(\xi_0) \\ p_0(t) &= -m\omega \bar{x}_0 \sin(\omega t) & \xi_0 &= -m\omega a \bar{x}_0 / \hbar \end{aligned}$$

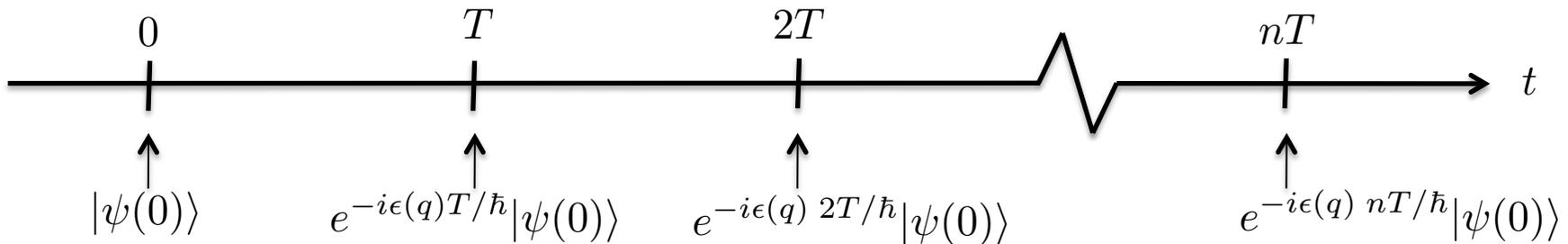
# « Stroboscopie » et quasi-énergie

Phase accumulée après  $n$  périodes  $T$  : 
$$\Phi_q(nT) - \Phi_q(0) = \frac{1}{\hbar} \int_0^{nT} E[q - p_0(t')/\hbar] dt'$$

$$= n [\Phi_q(T) - \Phi_q(0)]$$

Posons  $\epsilon(q) = \frac{\hbar}{T} [\Phi_q(T) - \Phi_q(0)] = -2J \cos(aq) \mathcal{J}_0(\xi_0)$  : « quasi-énergie »

Si on regarde la valeur de l'onde de Bloch aux instants  $0, T, 2T, \dots$  on trouve



Avec cette stroboscopie de période  $T$ , l'évolution est identique à celle d'une onde de Bloch dans un réseau indépendant du temps, moyennant la substitution :

$$E(q) = -2J \cos(aq) \longrightarrow \epsilon(q) = -2J \cos(aq) \mathcal{J}_0(\xi_0)$$

Aucune hypothèse sur le rapport  $J/\hbar\omega$  n'a été nécessaire !

# La méthode de Floquet

Méthode générale pour traiter une évolution hamiltonienne, avec un hamiltonien  $\hat{H}(t)$  dépendant périodiquement du temps de période  $T$ .

➔ Si  $\hat{H}$  est en fait indépendant du temps, l'opérateur d'évolution vérifie

$$\hat{U}(T) = \exp(-i\hat{H}T/\hbar) \qquad \hat{U}(T) |\phi_\alpha\rangle = e^{-iE_\alpha T/\hbar} |\phi_\alpha\rangle$$

où les  $|\phi_\alpha\rangle$  sont les états propres de  $\hat{H}$  d'énergie  $E_\alpha$

➔ Si  $\hat{H}$  dépend du temps, on peut encore diagonaliser  $\hat{U}(T)$  (unitaire) et mettre les valeurs propres (nombre de module 1) sous la forme  $e^{-i\epsilon_\alpha T/\hbar}$

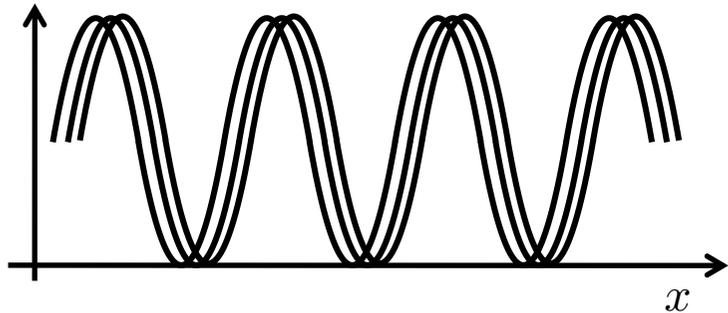
$$\hat{U}(T) |\phi_\alpha\rangle = e^{-i\epsilon_\alpha T/\hbar} |\phi_\alpha\rangle$$

➔ La périodicité de l'hamiltonien entraîne la propriété « stroboscopique » :

$$\hat{U}(nT) = [\hat{U}(T)]^n .$$

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{\alpha} C_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle \qquad \longrightarrow \qquad |\psi(nT)\rangle = \sum_{\alpha} C_{\alpha} e^{-i\epsilon_{\alpha} nT/\hbar} |\phi_{\alpha}\rangle$$

# La méthode de Floquet et le réseau vibrant

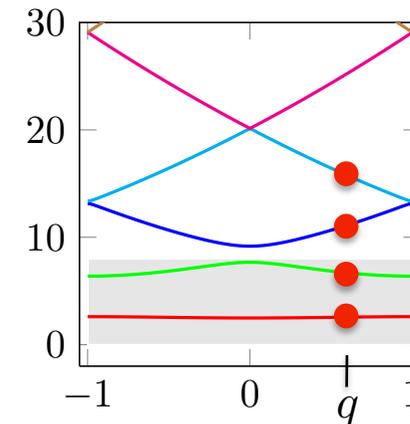


La méthode de Floquet nécessite la recherche des états propres de l'opérateur d'évolution sur une période temporelle  $T = 2\pi/\omega$

La forme de Bloch est préservée lors de l'évolution, ainsi que le quasi-moment  $q$  (pour  $\hat{H}_0, \hat{H}_2$ )

La seule action possible « non triviale » de l'opérateur d'évolution est de mélanger les bandes.

Ses états propres  $|\phi_\alpha\rangle$  sont des combinaisons linéaires des états de Bloch  $|\psi_{n,q}\rangle$  des bandes jugées pertinentes



Dans l'approximation à une bande du modèle de Hubbard, les états  $|\psi_{n,q}\rangle$  sont états propres de  $\hat{U}(T)$  et l'effet de l'évolution se résume à la phase  $\epsilon(q)T/\hbar$  acquise par chaque état de Bloch sur une période  $T$ .

# L'absence de diffusion pour $\mathcal{J}_0(\xi_0) = 0$

Paquet d'ondes initial  $|\psi(0)\rangle = \int_{\text{Z.B.}} C(q) |\psi_q\rangle dq$  dans la bande fondamentale

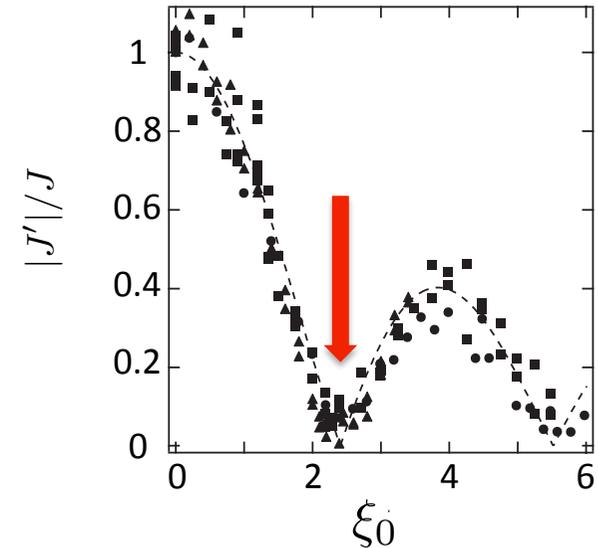
$$|\psi_q\rangle \xrightarrow{\text{durée } T} e^{-i\epsilon(q)T/\hbar} |\psi_q\rangle \quad \epsilon(q) = -2J \cos(aq) \mathcal{J}_0(\xi_0)$$

On choisit une modulation telle que  $\mathcal{J}_0(\xi_0) = 0$

La relation générale

$$|\psi(T)\rangle = \int_{\text{Z.B.}} C(q) e^{-i\epsilon(q)T/\hbar} |\psi_q\rangle dq$$

devient dans ce cas :  $|\psi(T)\rangle = |\psi(0)\rangle$



Le paquet d'ondes se reconstruit de manière identique toutes les périodes !

*Pas de diffusion spatiale*

Déviations possibles si les sauts à deux (ou plus) sites sont significatifs

**5.**

**Réseau vibrant à deux dimensions :  
l'expérience d'Hambourg**

# Le réseau optique triangulaire

Polarisations selon Oz

$$\vec{k}_1 = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

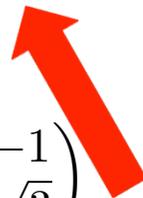


$$\vec{k}_3 = -\frac{k}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Le laser formant le réseau est désaccordé sur le rouge de la résonance atomique

Les atomes sont piégés aux minima de l'intensité totale :

$$\vec{k}_2 = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$



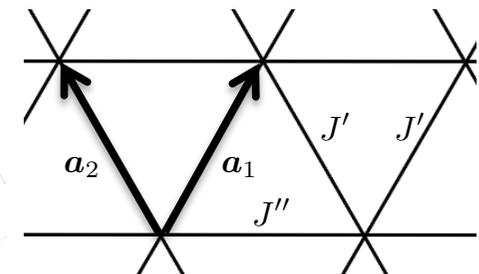
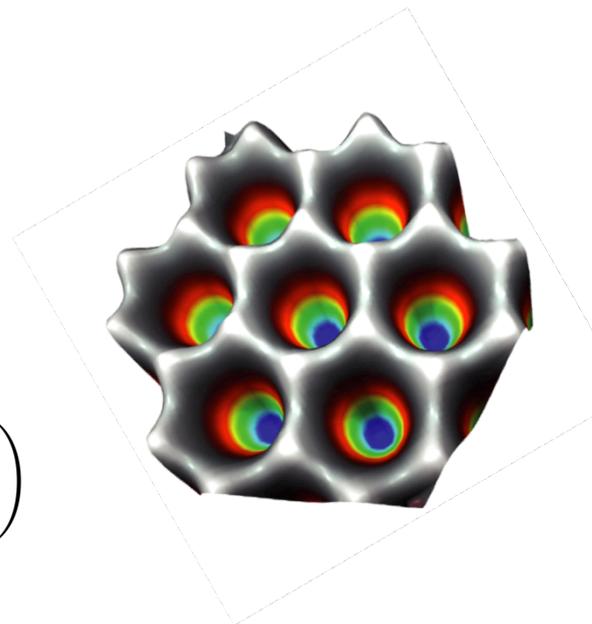
$$I(x, y) = I_0 \left| e^{ikx} + e^{-ik(x-\sqrt{3}y)/2} + e^{-ik(x+\sqrt{3}y)/2} \right|^2$$

On forme ainsi un réseau triangulaire, dont les sites sont localisés sur

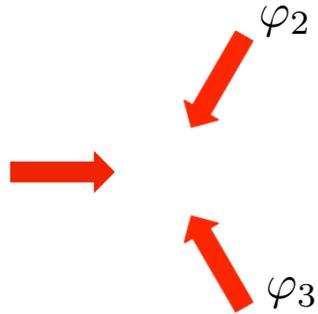
$$\mathcal{B} = \{j_1 \vec{a}_1 + j_2 \vec{a}_2\}$$

$$\vec{a}_1 = \frac{2\pi}{3k} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{2\pi}{3k} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

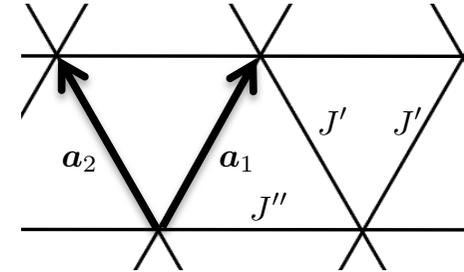


# La modulation temporelle du réseau triangulaire



$$\Delta x = \frac{1}{3k}(\varphi_2 + \varphi_3)$$

$$\Delta y = \frac{1}{\sqrt{3}k}(\varphi_2 - \varphi_3)$$



$$\Delta x = x_0 \cos(\omega t)$$

$$J' = J \mathcal{J}(\xi'_0)$$

$$\Delta y = y_0 \sin(\omega t)$$

$$J'' = J \mathcal{J}(\xi''_0)$$

avec

$$\xi'_0 = \frac{m\omega^2 a}{2\hbar} \sqrt{x_0^2 + 3y_0^2} \quad \xi''_0 = \frac{m\omega^2 a}{\hbar} x_0$$

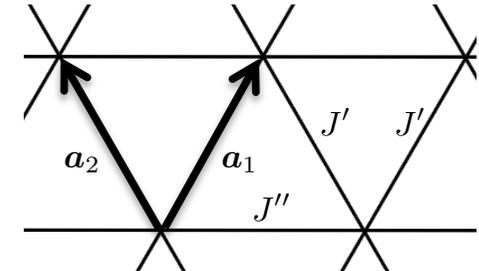
On obtient un hamiltonien de Hubbard avec deux coefficients tunnel  $J'$  et  $J''$

Les fonctions propres sont (comme toujours) des fonctions de Bloch :  $|\psi_{\vec{q}}\rangle = \sum_{\vec{j}} e^{i\vec{r}_{\vec{j}} \cdot \vec{q}} |w_{\vec{j}}\rangle$

Energies :  $E(\vec{q}) = -2 [J' \cos(\vec{a}_1 \cdot \vec{q}) + J' \cos(\vec{a}_2 \cdot \vec{q}) + J'' \cos((\vec{a}_1 - \vec{a}_2) \cdot \vec{q})]$

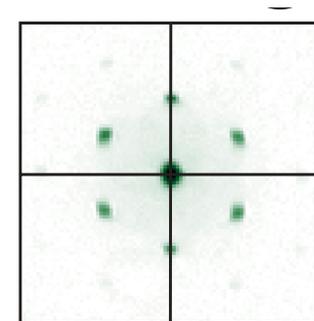
# Les minima de l'énergie dans le réseau modulé

$$E(\vec{q}) = -2 [J' \cos(\vec{a}_1 \cdot \vec{q}) + J' \cos(\vec{a}_2 \cdot \vec{q}) + J'' \cos((\vec{a}_1 - \vec{a}_2) \cdot \vec{q})]$$



Si  $J', J'' > 0$ , minimum en  $q_x = q_y = 0$  :  
centre de la zone de Brillouin

temps de vol  $\rightarrow$



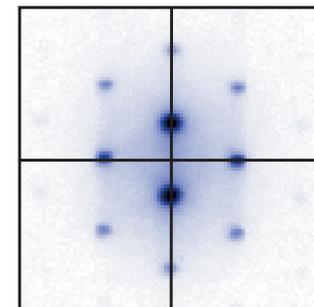
Si on change le signe de  $J'$  et/ou  $J''$ , le minimum de l'énergie se déplace dans la zone de Brillouin

Par exemple, pour  $J' < 0, J'' > 0$ ,  
le minimum est aux points tels que :

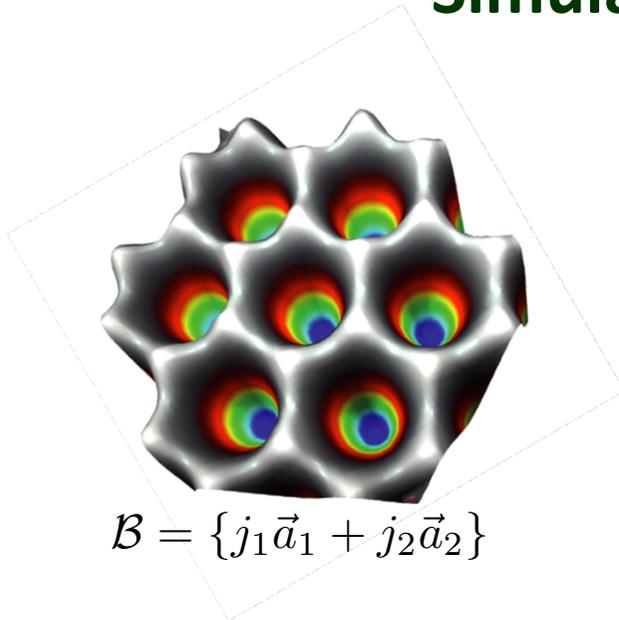
$$\vec{a}_1 \cdot \vec{q} = \vec{a}_2 \cdot \vec{q} = \pi$$

soit par exemple  $\vec{q} = \vec{u}_y \sqrt{3}k/2$

temps de vol  $\rightarrow$



# Simulation du magnétisme sur réseau



Dans la direction  $z$ , le potentiel confinant les atomes est beaucoup plus mou.

Série de fils d'atomes parallèles, chaque fil étant dans un état « micro-condensat » de Bose-Einstein avec une phase bien définie  $\theta_{j_1, j_2}$

Nouvelle interprétation de l'hamiltonien de Hubbard :

terme de saut entre voisins:  $|w_{j_1, j_2}\rangle \langle w_{j'_1, j'_2}| \longleftrightarrow \hat{b}_{j_1, j_2}^\dagger \hat{b}_{j'_1, j'_2} \longrightarrow e^{i\theta_{j_1, j_2}} e^{-i\theta_{j'_1, j'_2}}$

Energie d'une configuration de microcondensats donnée

$$E(\{\theta_{\vec{i}}\}) = -N \sum_{\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle} J_{\vec{i}, \vec{j}} \cos(\theta_{\vec{i}} - \theta_{\vec{j}})$$

approximation: même amplitude  $\sqrt{N}$  à tous les sites

Equivalent à un réseau de spins classiques en interaction : les figures de temps de vol révèlent les différentes phases d'équilibre selon le signe et l'anisotropie de l'interaction

*ferromagnétique, rhombique, spirale*