

**Des cages de lumière pour les atomes :  
la physique des pièges et des réseaux optiques**

**Cours 3.  
Réseaux optiques dans le régime des liaisons fortes**

Jean Dalibard  
Chaire *Atomes et rayonnement*  
Année 2012-13



**Résumé des cours précédents**

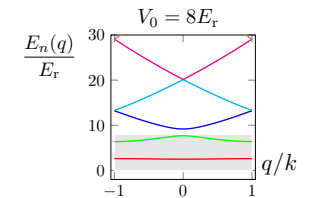
Une onde lumineuse stationnaire crée un potentiel périodique permettant de contrôler le mouvement d'un atome

$$V(x) = V_0 \sin^2(kx)$$
 échelle d'énergie naturelle : l'énergie de recul  $E_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$       $^{87}\text{Rb}$  @ 780 nm :  
4 kHz = 0.2  $\mu\text{K}$

Etats propres de  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_0 \sin^2(k\hat{x})$  sous forme de fonctions de Bloch :

$$\psi_{n,q}(x) = e^{iqx} u_{n,q}(x) \quad -k < q \leq k$$

$$u_{n,q}(x) \text{ périodique de période } a = \pi/k$$



Spectre d'énergie  $E_n(q)$  sous forme de bandes

**Buts de ce cours**

➔ Introduire une nouvelle base de fonctions également bien adaptée à l'étude du mouvement des atomes dans le réseau optique

**Particule libre**

ondes planes  $|p\rangle$  ou  $\psi_p(x) = e^{ixp/\hbar}$

états localisés  $|x\rangle = \int e^{-ixp/\hbar} |p\rangle dp$

**Particule dans un réseau**

fonctions de Bloch  $\psi_{n,q}(x) = e^{ixq} u_{n,q}(x)$

« fonctions de Wannier »

➔ Aborder la limite des liaisons fortes :  $V_0 \gg E_r$

Restriction de la dynamique des particules à une ou deux bandes  
Hamiltonien de Hubbard & rôle des interactions

**1.**

**Les fonctions de Wannier**

## Une nouvelle base intéressante : les fonctions de Wannier

Fonctions localisées à l'échelle du réseau et associées aux bandes d'énergie

**Particule libre**

$$|x\rangle = \int e^{-ixp/\hbar} |p\rangle dp$$

$$|x=0\rangle = \int |p\rangle dp$$

**Particule dans un réseau**

$$|w_{n,j}\rangle \propto \int_{-\pi/a}^{\pi/a} e^{-ijaq} |\psi_{n,q}\rangle dq$$

$$|w_{n,0}\rangle \propto \int_{-\pi/a}^{\pi/a} |\psi_{n,q}\rangle dq$$

coef. de normalisation :  $\left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2}$

On peut vérifier que la fonction  $w_{n,j}(x)$  se déduit de  $w_{n,0}(x)$  par une translation de  $j$  périodes du réseau :

$$w_{n,j}(x) = w_{n,0}(x - ja)$$

## Importance du choix de la phase des fonctions de Bloch

Dans la définition  $|w_{n,0}\rangle = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} |\psi_{n,q}\rangle dq$  le choix de la phase de chaque onde de Bloch  $|\psi_{n,q}\rangle \rightarrow e^{i\theta_n(q)} |\psi_{n,q}\rangle$  joue un rôle essentiel

Walter Kohn (1959)

Si le potentiel  $V(x)$  est pair [  $V(x) = V(-x)$  ] et si les bandes d'énergie sont disjointes, alors il existe un choix unique de phase tel que :

- la fonction de Wannier est réelle
- la fonction de Wannier est paire ou impaire vis à vis de  $x = 0$  ou  $x = a/2$
- la fonction de Wannier décroît exponentiellement vite à l'infini

## Propriétés des fonctions de Wannier

$$|w_{n,j}\rangle \propto \int_{-\pi/a}^{\pi/a} e^{-ijaq} |\psi_{n,q}\rangle dq$$

**Translation :**  $w_{n,j}(x) = w_{n,0}(x - ja)$

Il suffit de connaître une fonction de Wannier associée à la bande  $n$

**Inversion :** connaissant la fonction de Wannier associée à la bande  $n$ , on peut reconstruire toutes les fonctions de Bloch de cette bande

$$\psi_{n,q}(x) \propto \sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_{n,0}(x - ja) e^{ijaq}$$

**Orthogonalité :**  $\int w_{n,j}(x) w_{n',j'}(x) dx = \delta_{n,n'} \delta_{j,j'}$

↑ orthogonalité interbandes      ← orthogonalité intersites

En particulier  $w_{n,0}(x)$  et  $w_{n,0}(x - a)$  sont orthogonales

## Transformée de Fourier des fonctions de Wannier

**Rappel :** la forme de Bloch  $\psi_{n,q}(x) = e^{ixq} u_{n,q}(x)$  avec  $u_{n,q}(x)$  périodique permet d'écrire

$$u_{n,q}(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_{n,j}(q) e^{ij2\pi x/a}$$

$$\psi_{n,q}(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_{n,j}(q) e^{ix(q+j2\pi/a)}$$

**peigne d'ondes planes**

Introduisons la transformée de Fourier de la fonction de Wannier associée à la bande  $n$

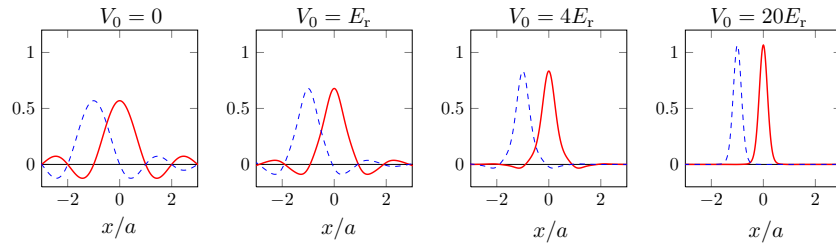
$$\tilde{w}_n(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w_{n,0}(x) e^{-ix\kappa} dx$$

On peut alors montrer :  $C_{n,j}(q) = \frac{1}{\sqrt{a}} \tilde{w}_n(q + 2\pi j/a)$

## Exemples de fonctions de Wannier

Bande fondamentale ( $n = 0$ ) du potentiel  $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$   $a = \pi/k$

on trace  $w_{0,0}(x)$   
 $w_{0,-1}(x)$



↑  
 $\sin(kx)/kx$

## Une nouvelle forme de l'hamiltonien

L'hamiltonien est par définition diagonal dans la base des fonctions de Bloch

$$H = \sum_n \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} dq E_n(q) |\psi_{n,q}\rangle \langle \psi_{n,q}|$$

avec la relation d'orthonormalité pour ces fonctions :

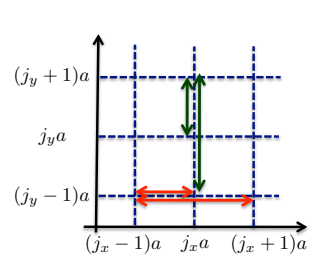
$$\langle \psi_{n,q} | \psi_{n',q'} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n,q}^*(x) \psi_{n',q'}(x) dx = \delta_{n,n'} \delta(q - q')$$

Comment s'écrit l'hamiltonien dans la base des fonctions de Wannier ?

$$\text{Changement de base donné par : } |w_{n,j}\rangle = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} e^{-ijaq} |\psi_{n,q}\rangle dq$$

$$\text{c'est-à-dire : } \langle \psi_{n,q} | w_{n,j} \rangle = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-ijaq}$$

## Le cas multidimensionnel



Potentiel périodique

$$V(x, y) = V_0 \sin^2(kx) + V'_0 \sin^2(ky)$$

Fonctions de Bloch

$$\Psi_{\vec{n},\vec{q}}(x, y) = \psi_{n_x, q_x}(x) \psi_{n_y, q_y}(y)$$

Fonctions de Wannier

$$w_{\vec{n},\vec{j}}(x, y) = w_{n_x, j_x}(x) w_{n_y, j_y}(y)$$

Quand on écrit l'hamiltonien en terme de fonctions de Wannier, on voit apparaître des termes de saut d'un site à un autre avec l'élément de matrice

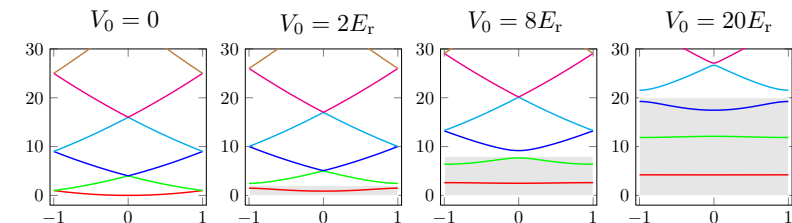
$$\langle w_{\vec{n},\vec{j}} | \hat{H} | w_{\vec{n},\vec{j}'} \rangle = \int w_{\vec{n},\vec{j}}(x, y) (\hat{H}_x + \hat{H}_y) w_{\vec{n},\vec{j}'}(\vec{r}) d^2r$$

Contribution de  $\hat{H}_x$ :  $\left(\int w_{n_x, j_x} \hat{H}_x w_{n_x, j'_x} dx\right) \delta_{j_y, j'_y} = J_{n_x}(j_x - j'_x) \delta_{j_y, j'_y}$ , sauts le long de l'axe x

Contribution de  $\hat{H}_y$ : sauts le long de l'axe y

2.

## Le cas d'un potentiel fortement modulé



→  
ouverture d'un « gap »  
au niveau des croisements

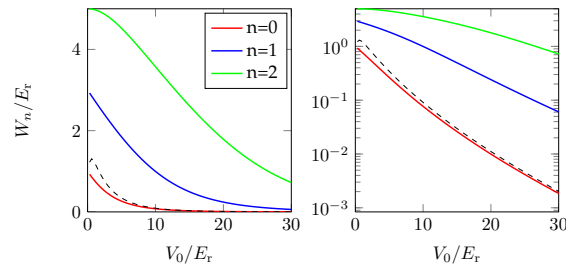
→  
bandes de basse énergie  
de plus en plus plates

## Largeur des bandes permises dans le cas $V_0 \gg E_r$

Pour le potentiel sinusoïdal, l'équation aux valeurs propres pour l'hamiltonien a la structure d'une équation de Mathieu. On dispose de plusieurs résultats analytiques dans la limite  $V_0 \gg E_r$

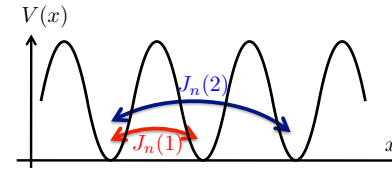
$$\text{Largeur de la bande fondamentale : } \frac{W_0}{E_r} \approx \frac{16}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{3/4} \exp \left[ -2 \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{1/2} \right]$$

variation exponentielle par rapport à la racine de la hauteur de la barrière caractéristique de l'effet tunnel



Rappel :  $E_r/\hbar$  est d'ordre quelques kHz à quelques dizaines de kHz

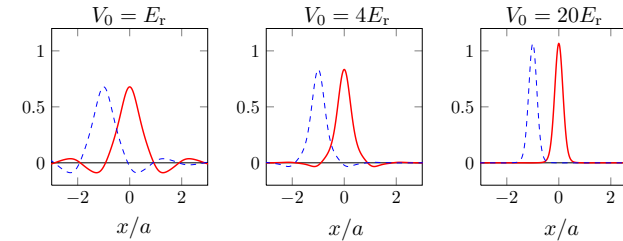
## Éléments de matrice des sauts entre voisins



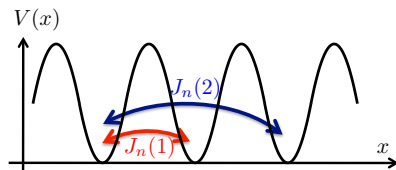
L'élément de matrice est donné par

$$J_n(j) = \int w_{n,j}^*(x) \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right) w_{n,0}(x) dx$$

Quand la profondeur du réseau augmente, la zone de l'espace où  $w_{n,0}(x)$  et  $w_{n,j}(x)$  prennent toutes deux des valeurs significativement différentes de 0 diminue.



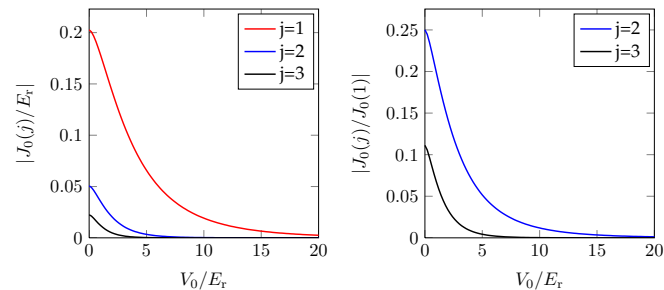
## Éléments de matrice des sauts entre voisins



L'élément de matrice est donné par

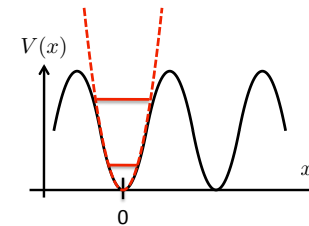
$$J_n(j) = \int w_{n,j}^*(x) \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right) w_{n,0}(x) dx$$

Quand la profondeur du réseau augmente, la zone de l'espace où  $w_{n,0}(x)$  et  $w_{n,j}(x)$  prennent toutes deux des valeurs significativement différentes de 0 diminue.



Pour  $V_0 \gtrsim 10 E_r$ , on peut se limiter aux sauts entre proches voisins (à 1% près)

## Spectre en énergie pour des potentiels très profonds



Si on néglige complètement les sauts entre voisins et si on linéarise au voisinage du fond des puits :

$$V(x) = V_0 \sin^2(kx) \approx V_0 k^2 x^2$$

$$V_0 \gg E_r$$

Oscillateur harmonique de pulsation  $\omega$  telle que  $\hbar\omega = 2\sqrt{V_0 E_r}$ , dont l'état fondamental a pour taille caractéristique  $a_{\text{oh}} = (\hbar/m\omega)^{1/2}$  et un spectre en  $(n + 1/2)\hbar\omega$

Ce développement a un sens si  $ka_{\text{oh}} = (E_r/V_0)^{1/4} \ll 1$

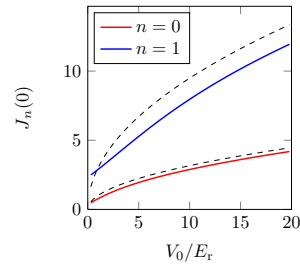
Pour fixer les idées, imposons  $ka_{\text{oh}} \leq 1/2$ , soit  $V_0/E_r \geq 16$ .

Pour  $V_0 = 16E_r$ , le quantum d'énergie pour l'oscillateur harmonique vaut  $\hbar\omega = 8E_r$

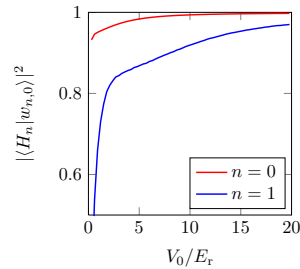
→ Etat fondamental à  $4E_r$ , premier état excité à  $12E_r$

## Spectre en énergie pour des potentiels très profonds (suite)

Centres des bandes d'énergie  $E_n(q)$  comparés au spectre de l'oscillateur harmonique  $(n + 1/2)\hbar\omega$



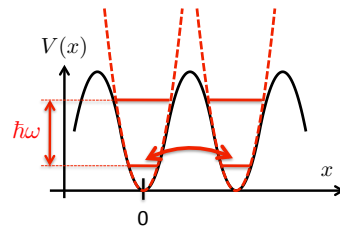
Recouvrement entre fonctions de Wannier et états propres de l'osc. harmonique (fonctions de Hermite)



## Hamiltonien à une particule

On restreint la dynamique des atomes à la bande fondamentale  $n = 0$

température, énergie d'interaction  $\ll \hbar\omega$   
pour des fermions :  $E_{\text{Fermi}} \ll \hbar\omega$



On restreint les conséquences de l'effet tunnel aux sauts entre proches voisins

$$J_{n=0}(j=0)$$

$$J_{n=0}(j=1)$$

énergie sur site, choisie égale à 0 à partir de maintenant

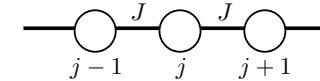
saut tunnel entre proches voisins, pris égal à  $-J$  [ avec  $J > 0$  ]

$$\hat{H} = -J \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |w_{j+1}\rangle\langle w_j| + |w_j\rangle\langle w_{j+1}| \right)$$

## 3.

## Hamiltonien de Hubbard

- Modèle minimal pour décrire le mouvement d'une particule sur un réseau



- Discussion de l'effet des interactions entre atomes

## Diagonalisation de l'hamiltonien de Hubbard

Transposition de la forme générale de Bloch à la restriction à la bande fondamentale

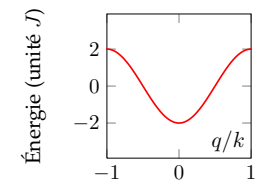
$$\psi_{n,q}(x) = e^{ixq} u_{n,q}(x) \quad \longrightarrow \quad |\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijaq} |w_j\rangle$$

$$u_{n,q}(x) \text{ périodique de période } a = \pi/k \quad \longrightarrow \quad |u\rangle = \sum_j |w_j\rangle \quad \text{unique !}$$

On vérifie immédiatement que  $|\psi_q\rangle$  est bien état propre de

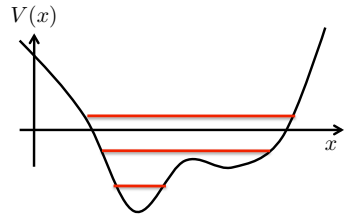
$$\hat{H} = -J \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |w_{j+1}\rangle\langle w_j| + |w_j\rangle\langle w_{j+1}| \right)$$

$$\text{avec la valeur propre } E(q) = -J (e^{iaq} + e^{-iaq}) = -2J \cos(aq)$$



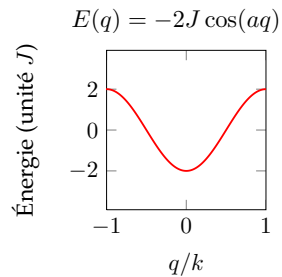
La largeur  $W_0 = 4J$  de cette bande est identifiée avec :  $\frac{W_0}{E_r} \approx \frac{16}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{3/4} \exp \left[ -2 \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{1/2} \right]$

## Le signe du coefficient tunnel $J$



Dans un puits de potentiel, on peut classer les états propres par leur nombre de noeuds :

- état fondamental : pas de noeud
- premier état excité : un noeud
- etc.



Si  $J > 0$ , l'état fondamental de l'hamiltonien de Hubbard est obtenu pour  $q = 0$

$$|\psi_{q=0}\rangle = \sum_j |w_j\rangle$$

Si  $J < 0$ , l'état fondamental est obtenu pour  $q = \pi/a$

$$|\psi_{q=\pi/a}\rangle = \sum_j (-1)^j |w_j\rangle$$

$$\psi_{q=\pi/a}(x) = \sum_j (-1)^j w_0(x - ja)$$

change de signe quand  $x \rightarrow x + a$

## Interactions dans le modèle de Hubbard

Interactions à courte portée, modélisée par un potentiel de contact (à régulariser)

$$W(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = g \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a_d}{m} \quad a_d : \text{longueur de diffusion}$$

Ecriture en seconde quantification (pour des bosons)

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{g}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x) dx \quad (\text{version 1D})$$

où  $\hat{\Psi}(x)$  est l'opérateur destruction d'une particule au point  $x$ , qui s'écrit en fonction des fonctions de Wannier

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{n,j} w_{n,j}(x) \hat{b}_{n,j} \quad \hat{b}_{n,j} : \text{détruit une particule dans la fonction de Wannier } w_{n,j}(x)$$

On arrive à une expression bien compliquée !!!

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{g}{2} \sum_{n_1,j_1} \sum_{n_2,j_2} \sum_{n_3,j_3} \sum_{n_4,j_4} \hat{b}_{n_3,j_3}^\dagger \hat{b}_{n_4,j_4}^\dagger \hat{b}_{n_1,j_1} \hat{b}_{n_2,j_2} \times \int w_{n_1,j_1}(x) w_{n_2,j_2}(x) w_{n_3,j_3}(x) w_{n_4,j_4}(x) dx$$

## Simplification du terme d'interaction pour les liaisons fortes

• On se limite à la bande fondamentale

énergie d'interaction  $\ll$  gap entre la bande fondamentale et la 1<sup>ère</sup> bande excitée

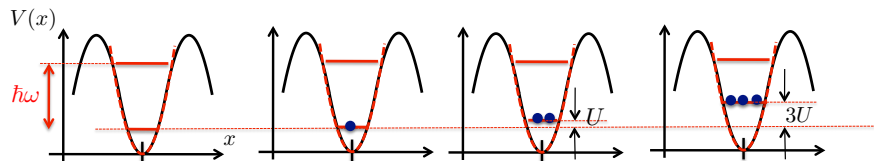
$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$$

• Recouvrement négligeable entre des fonctions de Wannier centrées sur différents sites

$j_1 = j_2 = j_3 = j_4$  : deux atomes n'interagissent entre eux que s'ils sont sur le même site

L'intégrale restante est la même pour tous les sites  $j$ :  $\int w_{0,j}^4(x) dx$

$$\hat{H}_{\text{int}} \approx \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1) \quad U = g \int w_{0,0}^4(x) dx \approx \frac{g}{\sqrt{2\pi} a_{\text{oh}}}$$



## Energie d'interaction à trois dimensions

A trois dimensions, à partir de

$$W(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = g \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a_d}{m} \quad a_d : \text{longueur de diffusion}$$

on obtient

$$\hat{H}_{\text{int}} \approx \frac{U^{(3D)}}{2} \sum_{\vec{j}} \hat{n}_{\vec{j}} (\hat{n}_{\vec{j}} - 1) \quad \frac{U^{(3D)}}{E_r} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} k a_d \left( \frac{V_0}{E_r} \right)^{3/4}$$

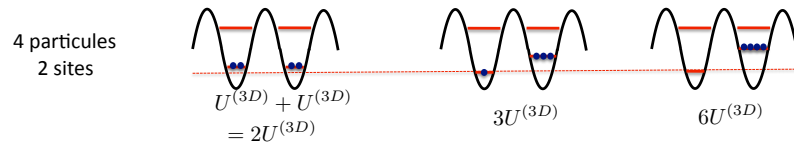
En dehors d'une résonance de diffusion,  $a_d$  est d'ordre nanométrique :

pour  $V_0/E_r \approx 10$  à  $30$ , on trouve  $U^{(3D)}/E_r \approx 0.01$  à  $1$

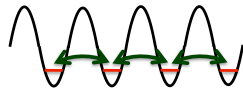
## Energie d'interaction et énergie cinétique

La physique à N corps dans le réseau est régie par la compétition entre deux effets

- Le terme d'interaction caractérisé par  $U^{(3D)}$ , qui tend à mettre le même nombre d'atomes par site, et qui augmente (lentement) avec  $V_0/E_r$ .

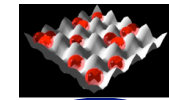


- Le terme d'énergie cinétique caractérisé par l'élément de matrice tunnel  $J$ , qui tend à délocaliser chaque atome, et qui diminue (rapidement) avec  $V_0/E_r$ .



## Compétition entre énergie cinétique et énergie d'interaction

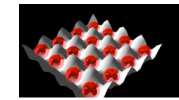
Cette compétition donne naissance à de nombreux phénomènes spectaculaires.



état superfluide,  
peu de corrélations  
entre particules

L'énergie cinétique domine

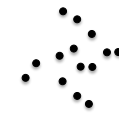
On varie le rapport  $U/J$   
Munich, 2002



état « isolant de Mott »,  
fortement corrélé

L'énergie d'interaction domine

Cette compétition existe également en absence de réseau, dans un gaz homogène



densité  $\rho$

distance entre particules  $\ell \sim \rho^{-1/3}$

$$\text{Energie cinétique : } \frac{\hbar^2}{m\ell^2}$$

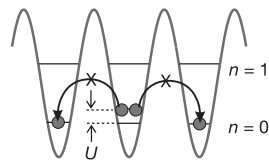
longueur de diffusion  $a_d$

$$\text{Energie d'interaction : } \frac{4\pi\hbar^2 a_d}{m} \rho$$

rapport entre les deux énergies :  $(\rho a_d^3)^{1/3}$

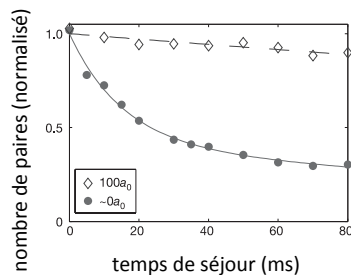
## Une autre illustration de cette compétition : les paires répulsives liées

Expérience menée à Innsbruck en 2006 dans le groupe de R. Grimm



$$\frac{U^{(3D)}}{E_r} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} k a_d \left(\frac{V_0}{E_r}\right)^{3/4}$$

On contrôle la valeur de  $a_d$  grâce à une résonance de diffusion



La force répulsive entre les atomes est grande... et les paires survivent longtemps

La force répulsive entre les atomes est nulle... et les paires se cassent

## Les paires répulsives liées

Problème à deux corps en présence d'un réseau

$$\hat{H} = -J(\hat{T}(1) + \hat{T}^\dagger(1)) - J(\hat{T}(2) + \hat{T}^\dagger(2)) + U \sum_{j_1, j_2} \delta_{j_1, j_2} |w_{j_1}, w_{j_2}\rangle \langle w_{j_1}, w_{j_2}|$$

$$\hat{T} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |w_{j+1}\rangle \langle w_j|$$

Séparation « centre de masse » et « variable relative » :  $|\Psi^{\text{total}}\rangle = |\Psi_q^{\text{cdm}}\rangle \otimes |\Phi^{\text{rel.}}\rangle$

↑  
fonction de Bloch

Pour chaque valeur du quasi-moment  $q$  pour le centre de masse, il existe un état lié pour la variable relative

Etat d'énergie positive de l'ordre de  $U$ , au dessus du continuum de la bande à une particule

## 4.

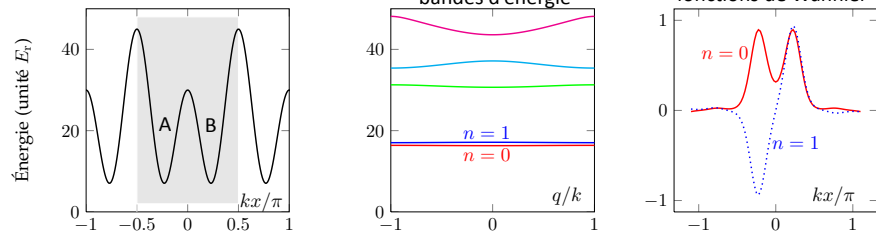
### Le cas d'un super-réseau

au delà du potentiel sinusoïdal...

### Un exemple de super-réseau

On superpose deux ondes stationnaires, créées par des lasers de fréquence  $\nu$  et  $2\nu$

$$V(x) = 15 E_r [\sin^2(kx) + 2 \cos^2(2kx)]$$

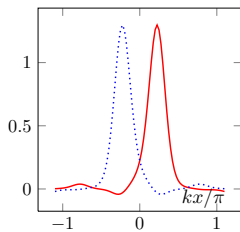


Généralisation directe du problème du double puits (retournement de la molécule d'ammoniac)

Une base commode est obtenue par « hybridisation » →

$$w_A(x) \propto w_0(x) - w_1(x)$$

$$w_B(x) \propto w_0(x) + w_1(x)$$



### L'arbitraire dans la définition des fonctions de Wannier

Rappel : définition des fonctions de Wannier  $|w_{n,0}\rangle \propto \int_{-\pi/a}^{\pi/a} |\psi_{n,q}\rangle dq$

→ Que se passe-t-il si on change la phase des fonctions de Bloch ?

$$|\psi_{n,q}\rangle \rightarrow e^{i\theta_n(q)} |\psi_{n,q}\rangle$$

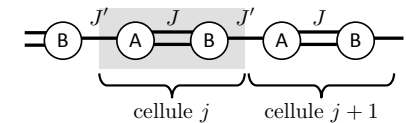
Ceci peut changer radicalement la forme des fonctions de Wannier et permet une construction « sur mesure » de ces fonctions

→ On peut également mélanger des fonctions de Wannier issues de bandes différentes, pour obtenir des fonctions plus agréables à manipuler

Illustration sur le cas d'un super-réseau

### Hamiltonien de Hubbard pour le super-réseau

Modélisation par une répétition d'une cellule à deux sites A et B et deux coefficients tunnel différents  $J$  et  $J'$



$$\text{Hamiltonien : } \hat{H} = -J \sum_j |w_{B,j}\rangle \langle w_{A,j}| - J' \sum_j |w_{A,j+1}\rangle \langle w_{B,j}| + \text{h.c.}$$

On cherche (bien sûr !) les états propres sous la forme de Bloch :  $|\psi_q\rangle = e^{ixq} u_q(x)$

Forme la plus générale d'une fonction périodique  $u_q$  dans ce contexte :

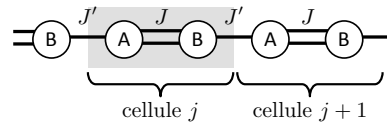
$$|u_q\rangle = \alpha_q \left( \sum_j |w_{A,j}\rangle \right) + \beta_q \left( \sum_j |w_{B,j}\rangle \right) \quad \text{espace de dimension 2}$$

correspondant à la fonction de Bloch :  $|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijaq} (\alpha_q |w_{A,j}\rangle + \beta_q |w_{B,j}\rangle)$

Que prendre pour les coefficients  $\alpha_q, \beta_q$  ?



## Le super-réseau (suite)



On reporte la forme de Bloch  $|\psi_q\rangle = \sum_j e^{ijaq} (\alpha_q |w_{A,j}\rangle + \beta_q |w_{B,j}\rangle)$

dans l'hamiltonien  $\hat{H} = -J \sum_j |w_{B,j}\rangle \langle w_{A,j}| - J' \sum_j |w_{A,j+1}\rangle \langle w_{B,j}| + \text{h.c.}$

On obtient le même système 2x2 en chaque site du réseau :

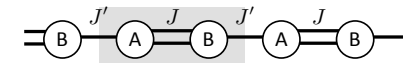
$$\hat{H}(q) \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \beta_q \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \alpha_q \\ \beta_q \end{pmatrix} \quad \hat{H}(q) = - \begin{pmatrix} 0 & J + J' e^{-iaq} \\ J + J' e^{iaq} & 0 \end{pmatrix}$$

hamiltonien dans l'espace réciproque

Ce modèle de Hubbard à deux sites est équivalent au problème d'un spin 1/2 dont l'hamiltonien dépend d'un paramètre continu  $q$  (ou  $\vec{q}$  à plusieurs dimensions)

Des propriétés topologiques non triviales peuvent émerger du fait de l'invariance  $q \rightarrow q + 2\pi/a$

## Le super-réseau (suite)



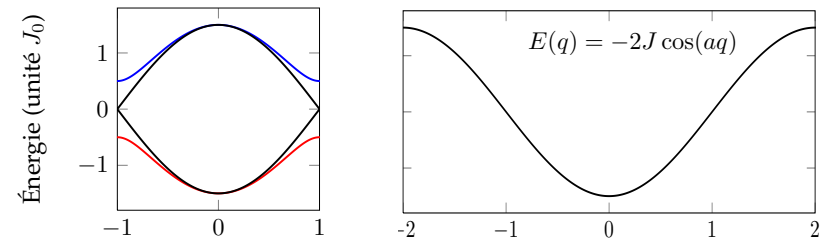
Les bandes d'énergie pour ce super-réseau : valeurs propres de

$$\hat{H}(q) = \begin{pmatrix} 0 & -J - J' e^{-iaq} \\ -J - J' e^{iaq} & 0 \end{pmatrix}$$

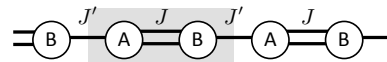
$$E(q) = \pm |J + J' e^{iaq}| = \pm (J^2 + J'^2 + 2JJ' \cos(aq))^{1/2}$$

bandes rouges et bleues :  $J = J_0, J' = J_0/2$

bandes noires :  $J = J' = 3J_0/4$



## Le super-réseau (suite)



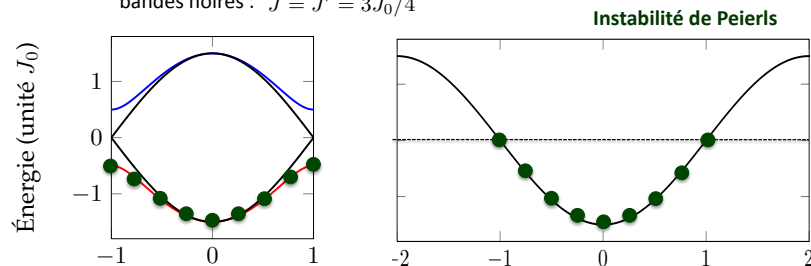
Les bandes d'énergie pour ce super-réseau : valeurs propres de

$$\hat{H}(q) = \begin{pmatrix} 0 & -J - J' e^{-iaq} \\ -J - J' e^{iaq} & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(q) = \pm |J + J' e^{iaq}| = \pm (J^2 + J'^2 + 2JJ' \cos(aq))^{1/2}$$

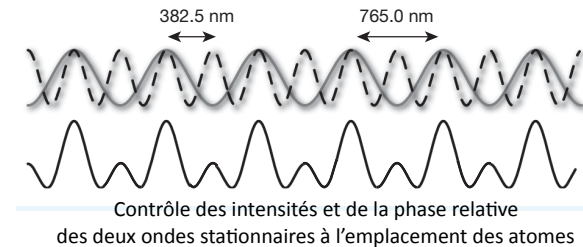
bandes rouges et bleues :  $J = J_0, J' = J_0/2$

bandes noires :  $J = J' = 3J_0/4$



## Réalisation expérimentale d'un super-réseau

Fölling *et al.* 2007 :



## Manipulation de l'effet tunnel via l'interaction entre deux atomes

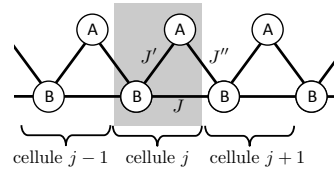
Utilisation d'une déformation des puits et de la méthode de dépliage de bande pour mesurer séparément l'occupation des sites A et B :



## Les bandes plates

Un autre exemple de réseau de Hubbard à deux sites

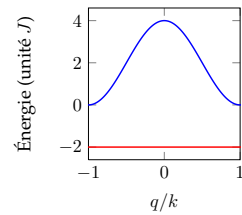
*dents de scie*



Hamiltonien dans l'espace réciproque :

$$\hat{\mathcal{H}}(q) = - \begin{pmatrix} 0 & J' + J'' e^{iaq} \\ J' + J'' e^{-iaq} & 2J \cos(aq) \end{pmatrix}$$

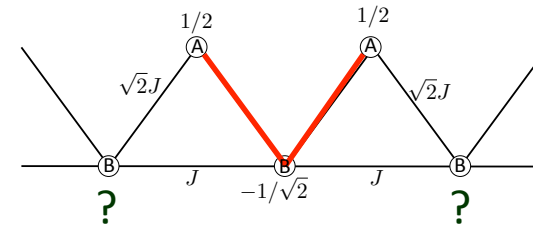
Pour  $J' = J'' = \sqrt{2} J$ , une bande plate apparaît dans le spectre :



Un paquet d'ondes préparé dans cette bande  
ne va pas évoluer du tout :  
pas de déplacement, pas d'étalement !

## L'origine physique des bandes plates

Considérons l'état  $|\psi_j^{(\text{loc})}\rangle = \frac{1}{2} (|w_{A,j-1}\rangle + |w_{A,j}\rangle - \sqrt{2} |w_{B,j}\rangle)$



Interférences destructives pour les sauts vers les sites voisins

Analogie des « états noirs » de l'optique quantique