

Comment court-circuiter l'adiabaticité ?

David Guéry-Odelin

Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité



Le mot « adiabatique » en physique

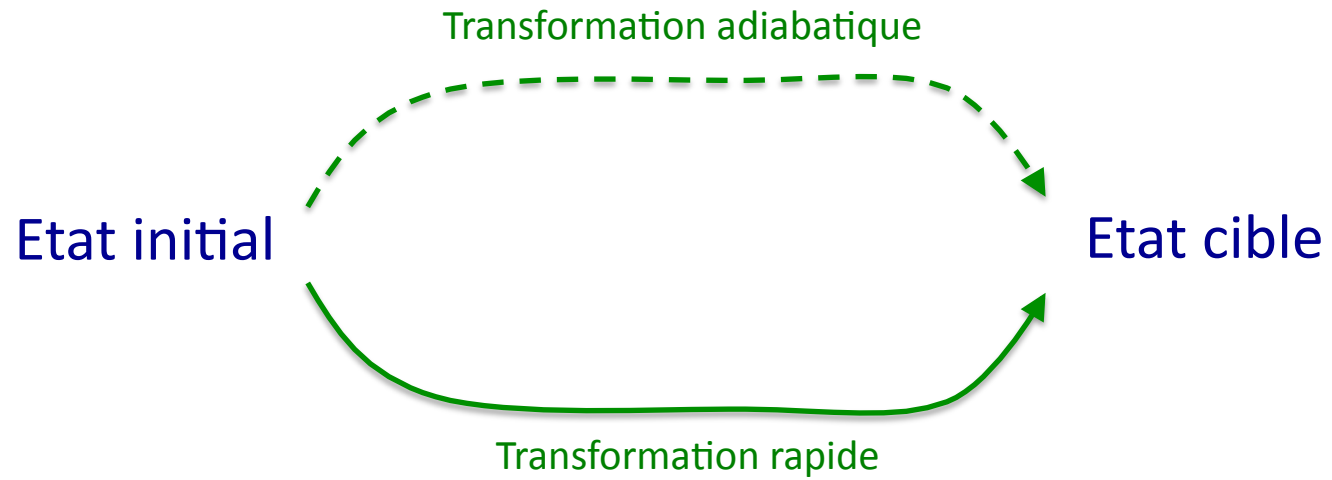
Mécanique du point (problème à un corps)

Physique statistique – thermodynamique

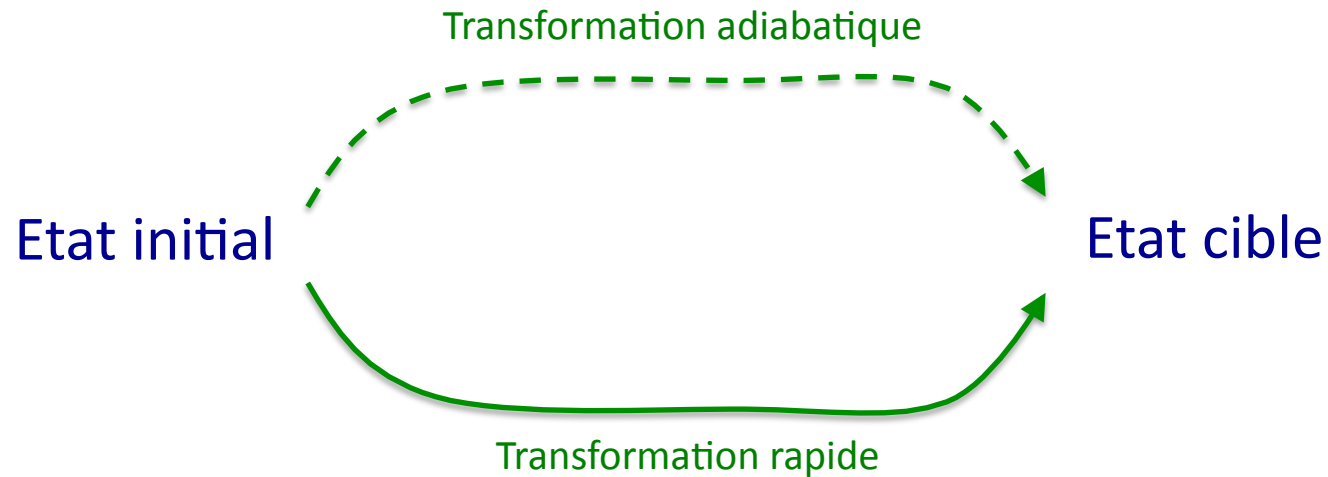
Mécanique quantique

- fait référence à une transformation lente de l'hamiltonien.
- *un système physique reste dans l'état propre instantané si la perturbation qui agit sur le système est suffisamment lente et s'il y a un "gap" entre la valeur propre et le reste du spectre de l'Hamiltonien.*

Court-circuiter l'adiabaticité



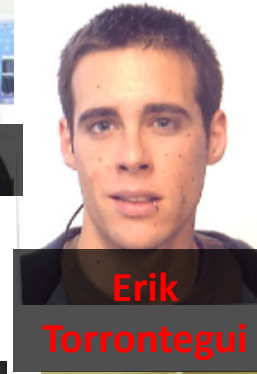
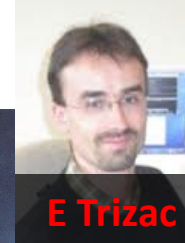
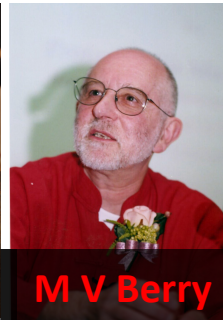
Court-circuiter l'adiabaticité



Par rapport aux méthodes de contrôle optimal (boîte noire) qui implique l'optimisation d'un grand nombre de paramètres, nous cherchons ici une image physique simple de la transformation avec un nombre minimum de paramètres à changer.



Quelques acteurs de ce domaine

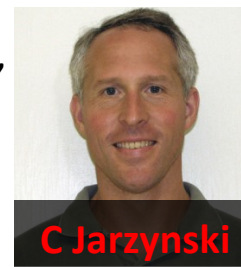
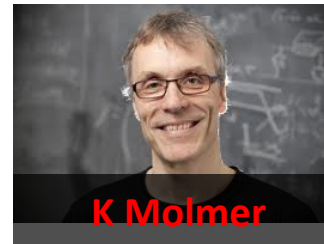


Experiments: DGO, Schmiedmayer,
Morsch -Arimondo, Vignolo-Labeyrie

+related work by

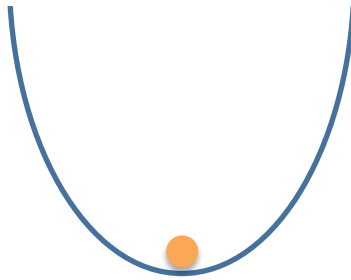
R. Kosloff (quantum refrigerator & third principle),
C. Bender (brachistochrone),
D. Guéry-Odelin, D. Leibfried (transport),
T. Calarco (optimal control),
J. Schmiedmayer (splitting),
M. Deschamps (superadiabaticity)
N. Vitanov (fast preparation of internal states)
S. Guérin, H. R. Jauslin et al. (parallel adiabatic passage)

...

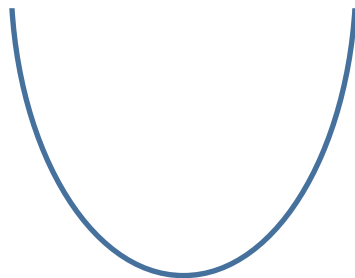


Transporter une particule dans un potentiel harmonique (1)

Evolution adiabatique (lente)



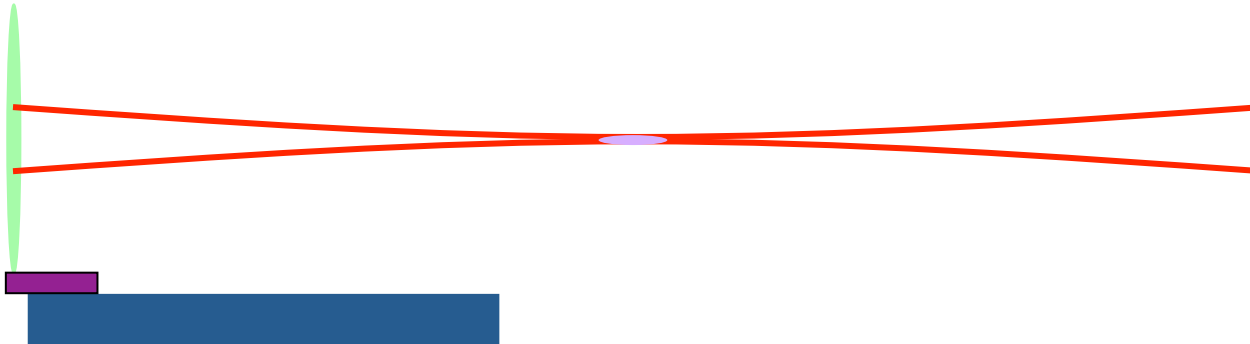
Stratégie 1 : Evolution non adiabatique



Transporter une particule dans un potentiel harmonique (1)

Transport à l'aide d'une pince optique

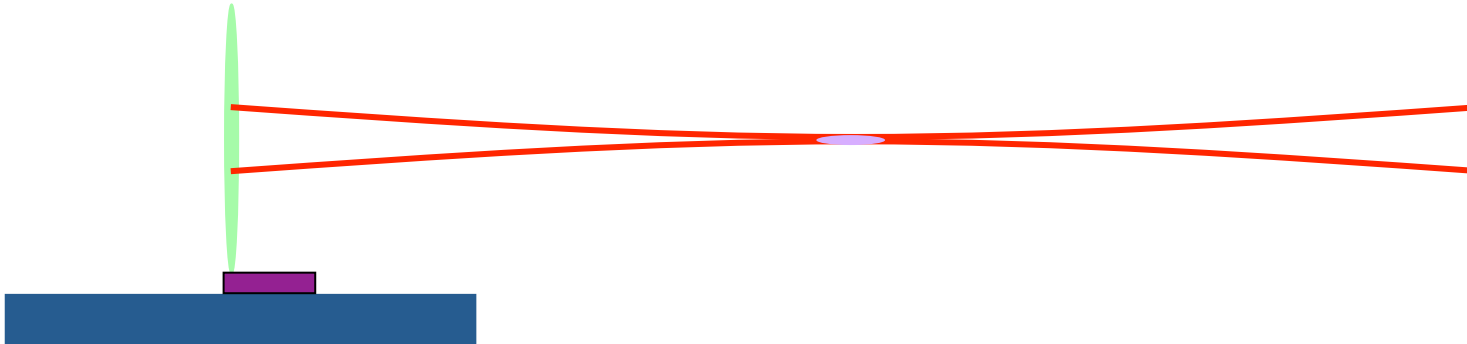
A. Couvert et al., EuroPhys. Lett. **83**, 13001 (2008)



Transporter une particule dans un potentiel harmonique (2)

Transport à l'aide d'une pince optique

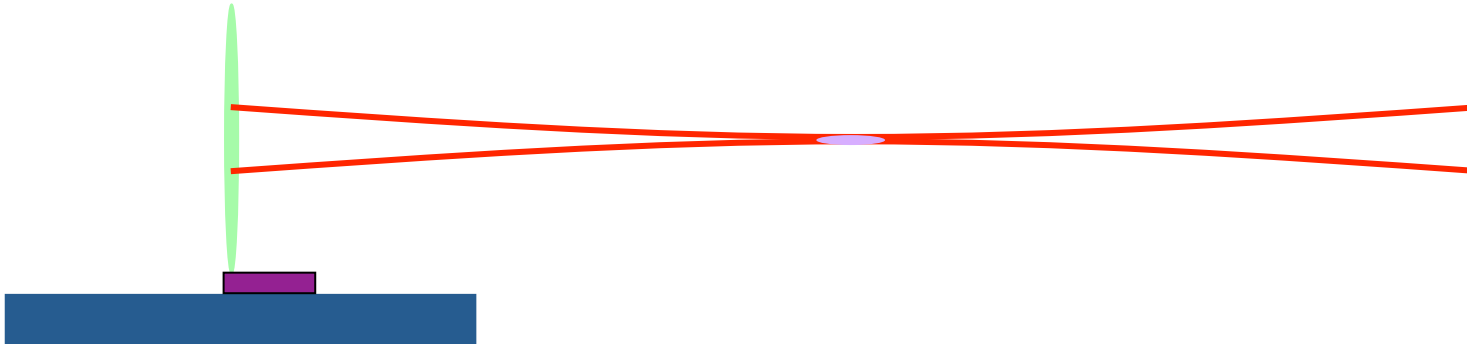
A. Couvert et al., EuroPhys. Lett. **83**, 13001 (2008)



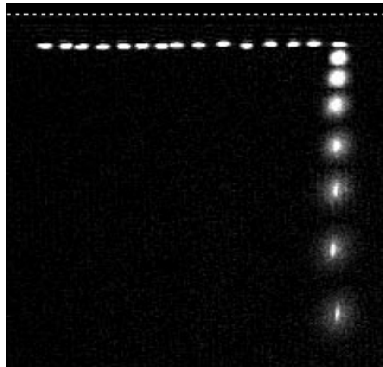
Transporter une particule dans un potentiel harmonique (2)

Transport à l'aide d'une pince optique

A. Couvert et al., EuroPhys. Lett. **83**, 13001 (2008)

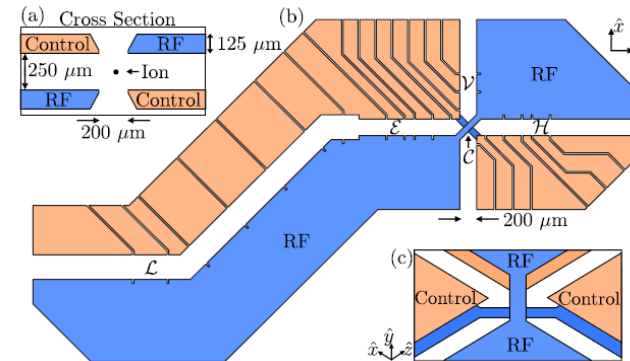


Transport magnétique

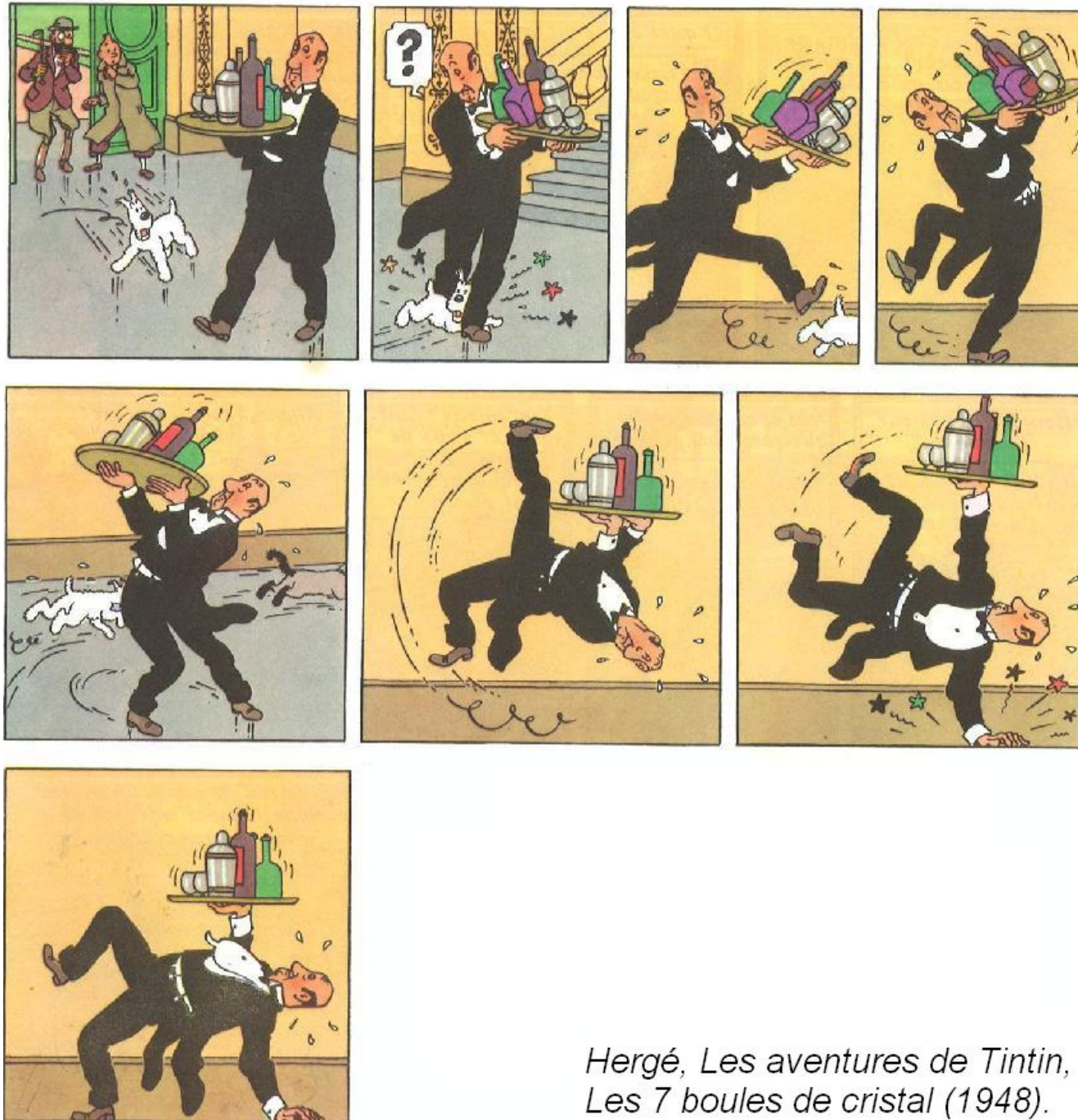


W. Hansel et al. Nature **413**, 498 (2001)

Transport électromagnétique (ions)

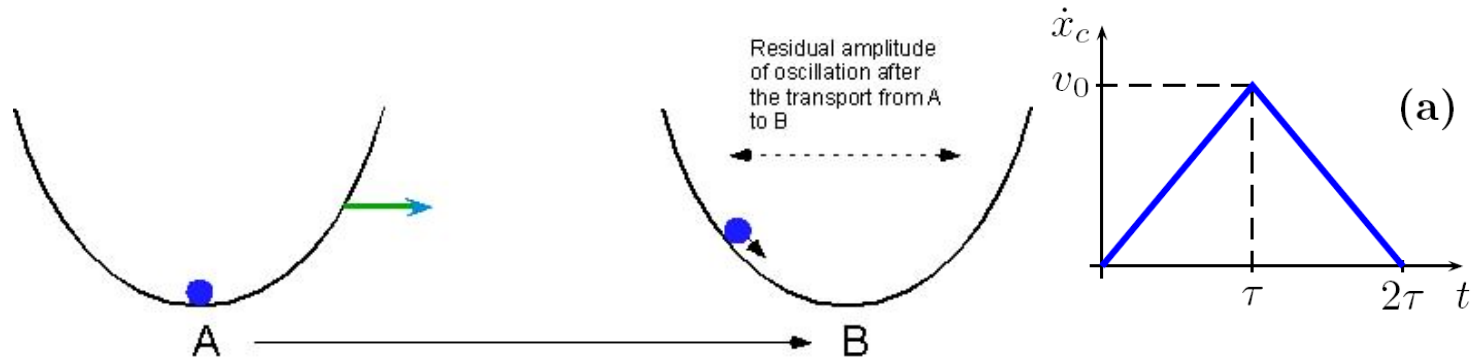


J. P. Home et al. Science **325**, 1227 (2009)

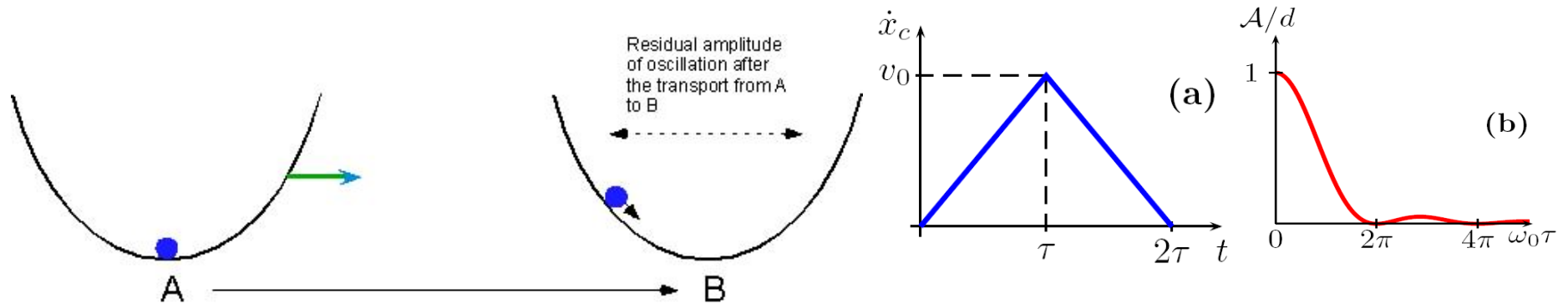


Hergé, *Les aventures de Tintin, Les 7 boules de cristal* (1948).

Transporter une particule dans un potentiel harmonique (3)



Transporter une particule dans un potentiel harmonique (3)

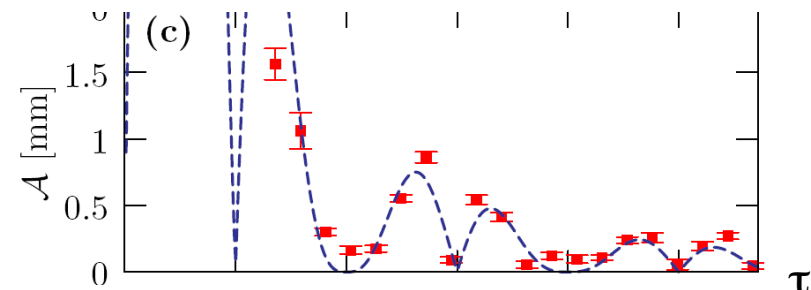


$$\mathcal{A}(T, \omega_0) = |\mathcal{F}[\dot{x}_c](\omega_0)| ,$$

L'amplitude d'oscillation du centre de masse après transport est donnée par le module de la transformée de Fourier du profil de vitesse appliqué au potentiel harmonique de confinement.
 (analogie avec la diffraction en optique)

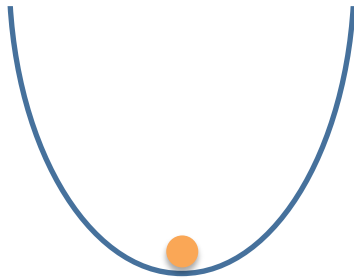
Un transport optimal requiert $\mathcal{A} = 0$

Expérience versus théorie



Transporter une particule dans un potentiel harmonique (4)

Stratégie 2 : ajout d'un potentiel de compensation



La particule bouge dans le potentiel sous l'action de la force d'inertie d'entraînement. On peut envisager de contrecarrer cette force à chaque instant.

D'un point de vue un peu plus formel

Stratégie 1

$$H_1(t) = \frac{p^2}{2m} + U(x - x_0(t))$$

On choisit $x_0(t)$
de manière adéquate

Stratégie 2

$$H_2(t) = \frac{p^2}{2m} + U(x - x_0(t)) - m\ddot{x}_0 x$$

On applique une force
homogène dépendante du
temps

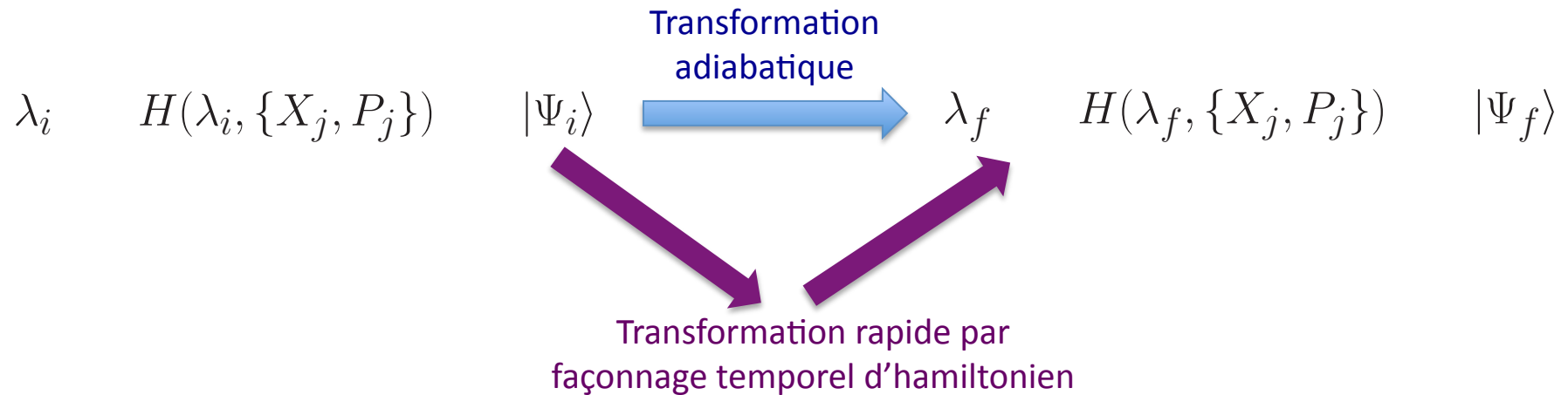
La problématique des Shortcuts To Adiabaticity (STA)

Système physique $H(\lambda, \{X_j, P_j\})$



La problématique des Shortcuts To Adiabaticity (STA)

Système physique $H(\lambda, \{X_j, P_j\})$



Plan : les méthodes et prolongements

1- Méthode Rice – Demirplak – Berry (counteradiabatic protocol/ transitionless tracking algorithm)

2- La méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld (reverse engineering)

3- Façonnage rapide par anticipation (Fast Forward method)

4- Court circuiter l'adiabaticité mécanique et thermodynamique



PLAN DE L'EXPOSE

- 1- Méthode Rice – Demirplak – Berry (counteradiabatic protocol/ transitionless tracking algorithm)
- 2- La méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld (reverse engineering)
- 3- Façonnage rapide par anticipation (Fast Forward method)
- 4- Court circuiter l'adiabaticité mécanique et thermodynamique

Méthode Rice – Demirplak – Berry (counteradiabatic protocol)

Considérons un hamiltonien dépendant du temps et sa base instantanée

$$H_0(t)|n(t)\rangle = E_n(t)|n(t)\rangle$$

L'approximation adiabatique permet de calculer la phase acquise pendant l'évolution

$$|\psi_n(t)\rangle = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds - \int_0^t \langle n(s) | \partial_s n(s) \rangle ds \right] |n(t)\rangle$$

Phase
dynamique

Phase
géométrique

Méthode Rice – Demirplak – Berry (counteradiabatic protocol)

Considérons un hamiltonien dépendant du temps et sa base instantanée

$$H_0(t)|n(t)\rangle = E_n(t)|n(t)\rangle$$

L'approximation adiabatique permet de calculer la phase acquise pendant l'évolution

$$|\psi_n(t)\rangle = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds - \int_0^t \langle n(s) | \partial_s n(s) \rangle ds \right] |n(t)\rangle$$

Phase
dynamique

Phase
géométrique

Existe-t-il un hamiltonien pour lequel l'approximation adiabatique correspond au résultat exact ?

Méthode Rice – Demirplak – Berry (counteradiabatic protocol)

Considérons un hamiltonien dépendant du temps et sa base instantanée

$$H_0(t)|n(t)\rangle = E_n(t)|n(t)\rangle$$

L'approximation adiabatique permet de calculer la phase acquise pendant l'évolution

$$|\psi_n(t)\rangle = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(s) ds - \int_0^t \langle n(s) | \partial_s n(s) \rangle ds \right] |n(t)\rangle$$

Phase
dynamique

Phase
géométrique

Existe-t-il un hamiltonien pour lequel l'approximation adiabatique correspond au résultat exact ?

$$H(t) = H_0(t) + H_1(t)$$

$$H_1(t) = i\hbar \sum_n (|\partial_t n\rangle \langle n| - \langle n | \partial_t n \rangle |n\rangle \langle n|) = i\hbar \sum_{n \neq m} \sum_m \frac{|m\rangle \langle m | \partial_t H_0 | n \rangle \langle n|}{E_n(t) - E_m(t)}$$

Rq: hamiltonien non local, et il faut connaître tout le spectre ...

Méthode R-D-B : application au transport

$$H_0(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0(t))^2$$

$$H_1(t) = p\dot{x}_0 \quad \text{Problème : comment implémenter un tel Hamiltonien ?....}$$

Méthode R-D-B : application au transport

$$H_0(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0(t))^2$$

$$H_1(t) = p\dot{x}_0 \quad \text{Problème : comment implémenter un tel Hamiltonien ?....}$$

Solution : changement de représentation (PRL **109**, 100403 (2012))

$i\hbar\partial_t|\psi_S\rangle = H|\psi_S\rangle$ on introduit $|\psi_I\rangle = U^\dagger|\psi_S\rangle$ qui évolue selon

$i\hbar\partial_t|\psi_I\rangle = H_I|\psi_I\rangle$ avec $H_I = U^\dagger(H - K)U$ et $K = i\hbar\dot{U}U^\dagger$

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & U(t_i) = U(t_f) = 1 \\ & \dot{U}(t_i) = \dot{U}(t_f) = 0 \end{array} \quad \text{alors} \quad \begin{array}{l} H_I(t_i) = H(t_i) \\ H_I(t_f) = H(t_f) \end{array}$$

Exemple du transport :

$$U(t) = \exp\left(-\frac{im\dot{x}_0x}{\hbar}\right) \quad \longrightarrow \quad \text{Stratégie 2} \quad H_2(t) = \frac{p^2}{2m} + U(x - x_0(t)) - m\ddot{x}_0x$$

Manipulation de spin $\frac{1}{2}$ par façonnage de champ magnétique



inversion de population



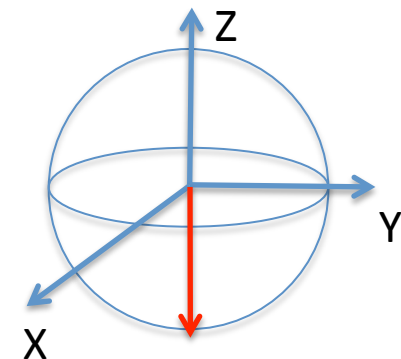
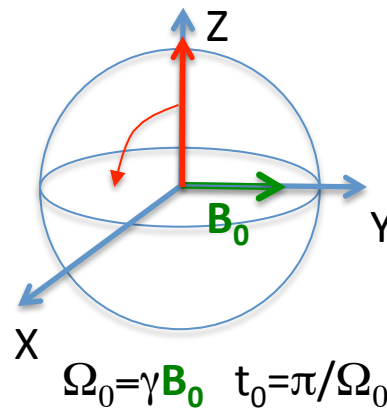
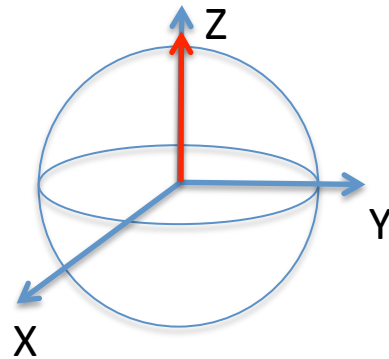
Manipulation de spin $\frac{1}{2}$ par façonnage de champ magnétique



inversion de population



Impulsion π_Y



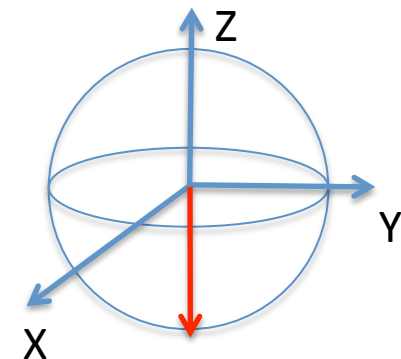
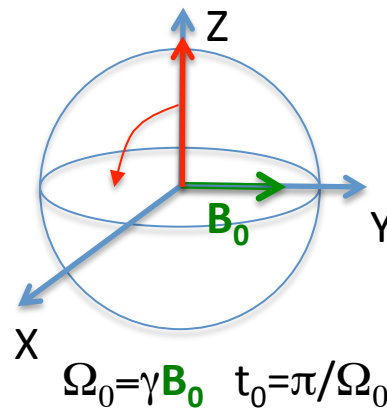
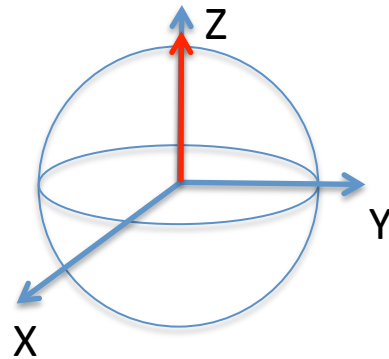
Manipulation de spin $\frac{1}{2}$ par façonnage de champ magnétique



inversion de population



Impulsion π_Y



Robustesse vis-à-vis d'une disparité des fréquences de Rabi Ω_0

Séquence composite d'impulsions $(\pi/2)_Y (\pi)_X (\pi/2)_Y$

Manipulation de spin ½ par façonnage de champ magnétique

$$H_0(t) = \gamma \vec{B}_0(t) \cdot \hat{S}$$

$$H(t) = H_0(t) + H_1(t) = \gamma \vec{B}(t) \cdot \hat{S}$$

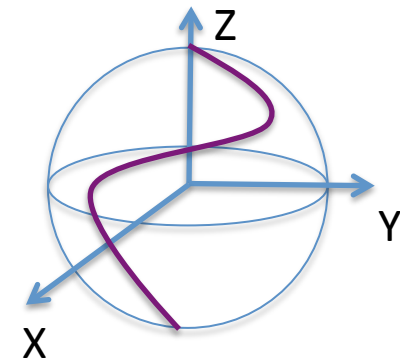
avec
$$\vec{B}(t) = \vec{B}_0(t) + \frac{1}{\gamma} \vec{b}_0(t) \times \partial_t \vec{b}_0(t)$$

$$\vec{b}_0(t) = \frac{\vec{B}_0(t)}{\|\vec{B}_0(t)\|}$$

ajout d'un champ dépendant du temps dans une direction perpendiculaire à $\vec{B}_0(t)$

Pour un chemin dépendant du temps arbitraire sur la sphère de Bloch unitaire, il peut être reproduit par le champ magnétique

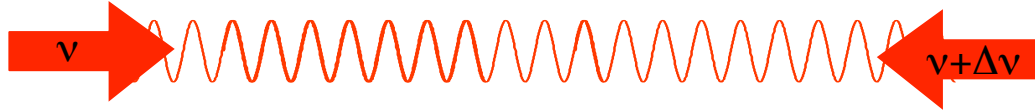
$$\vec{B}(t) = B_0(t) \hat{S}(t) + \frac{1}{\gamma} \hat{S}(t) \times \partial_t \hat{S}(t)$$



Par correspondance, ces stratégies s'appliquent à tous les systèmes à deux niveaux

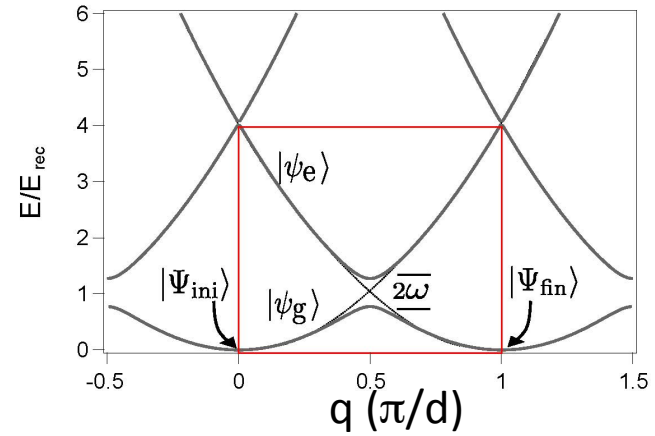
L'expérience de Pisa (Arimondo – Morsch)

M. G. Bason et al. Nat. Phys. **8**, 147 (2012)



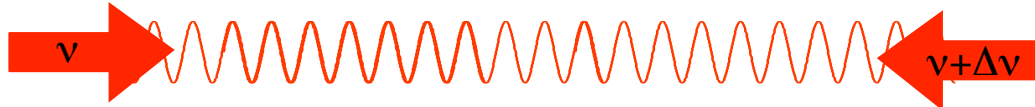
$$U(x, t) = \underline{V_0(t)} \cos(2\pi x/d + \underline{\phi(t)})$$

Systeme à 2 niveaux = deux bandes de Bloch



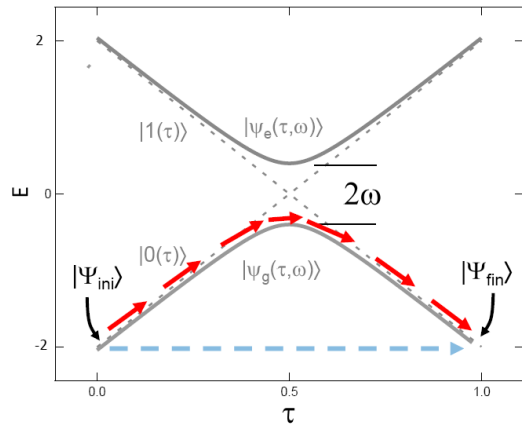
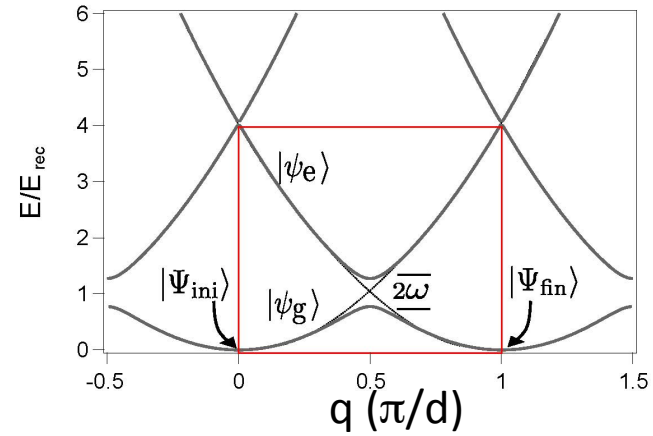
L'expérience de Pisa (Arimondo – Morsch)

M. G. Bason et al. Nat. Phys. **8**, 147 (2012)



$$U(x, t) = V_0(t) \cos(2\pi x/d + \phi(t))$$

Système à 2 niveaux = deux bandes de Bloch

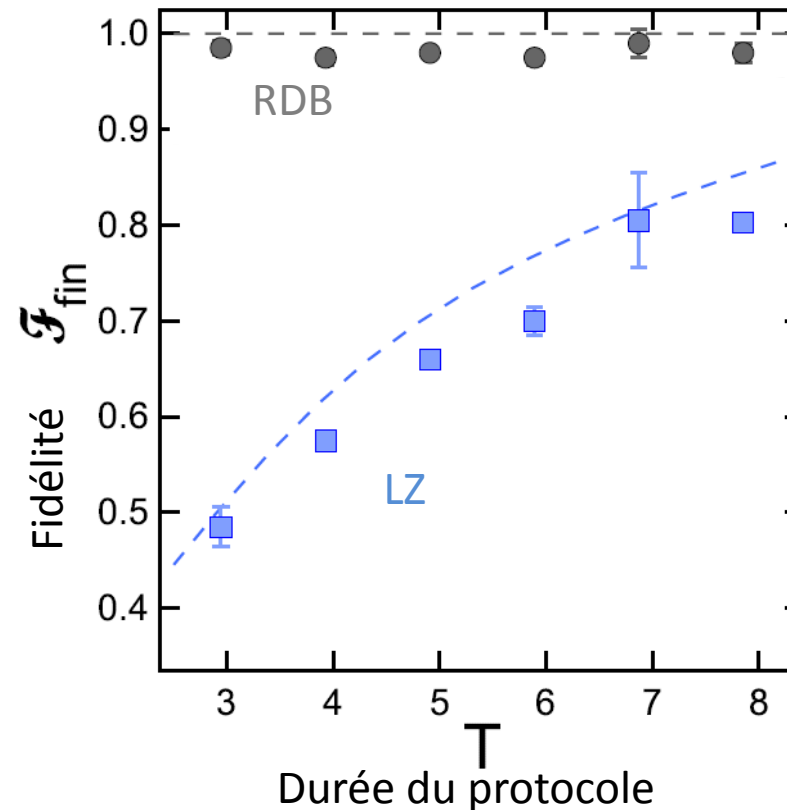


$$H(t) = \Gamma(t)\sigma_z + \omega(t)\sigma_x$$

$$\Gamma' = \Gamma - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\arctan \left(\frac{\Gamma\dot{\omega} - \omega\dot{\Gamma}}{2\omega(\Gamma^2 + \omega^2)} \right) \right]$$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 + \frac{(\Gamma\dot{\omega} - \omega\dot{\Gamma})^2}{4\omega^2(\Gamma^2 + \omega^2)^2}}$$

$$H'(t) = \Gamma'(t)\sigma_z + \omega'(t)\sigma_x$$



PLAN DE L'EXPOSE

- 1- Méthode Rice – Demirplak – Berry (counteradiabatic protocol/ transitionless tracking algorithm)
- 2- La méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld (reverse engineering)
- 3- Façonnage rapide par anticipation (Fast Forward method)
- 4- Court circuiter l'adiabaticité mécanique et thermodynamique

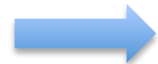
L'article de Lewis-Riesenfeld

H. R. Lewis & W. B. Riesenfeld. J. Math. Phys. **10** 1459 (1969)

Cet article établit une relation entre les solutions l'équation de Schrödinger pour un hamiltonien dépendant du temps $H(t)$ et les états propres des invariants dynamiques $I(t)$

$$I^\dagger(t) = I(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] = 0$$


$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t) |\psi(t)\rangle$$
$$\langle \psi(t) | I(t) | \psi(t) \rangle \text{ constante}$$

Les invariants dynamiques (théorie de Lewis-Riesenfeld)

$$I^\dagger(t) = I(t) \longrightarrow I(t)|\phi_n(t)\rangle = \lambda_n(t)|\phi_n(t)\rangle, \quad \lambda_n(t) \text{ réel}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] = 0 \longrightarrow \lambda_n(t) = \lambda_n \text{ Indépend du } t$$

$$I(t) = \sum_n |\phi_n(t)\rangle \lambda_n \langle \phi_n(t)|$$

Question : Est-ce que les $|\phi_n(t)\rangle$ sont solutions de l'équation de Schrödinger ?

$$\longrightarrow (\lambda_p - \lambda_n) \langle \phi_p | \left(i\hbar \frac{\partial |\phi_n(t)\rangle}{\partial t} - H(t) |\phi_n(t)\rangle \right) = 0$$

\longrightarrow Indétermination pour $p = n$

Les invariants dynamiques (théorie de Lewis-Riesenfeld)

Question : peut-on résoudre cette indétermination ?

Transformation de jauge : introduction des modes dynamiques

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{i\alpha_n(t)} |\phi_n(t)\rangle$$

$$\alpha_n(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t \left\langle \phi_n(t') \left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - H(t') \right| \phi_n(t') \right\rangle \quad \text{Phases de Lewis-Riesenfeld}$$

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t) |\psi(t)\rangle \quad \longrightarrow \quad |\psi(t)\rangle = \sum_n c_n |\psi_n(t)\rangle$$

Les coefficients de ce développement sont indépendants du temps !

Principe du « reverse engineering »

Objectif : $H(0) \xrightarrow{\text{red arrow}} H(t_f)$
en gardant les mêmes populations dans les bases instantanées initiales et finales

Exemples : On cherche l'opérateur $I(t)$ qui vérifie

$$[I(0), H(0)] = 0$$

$$[I(t_f), H(t_f)] = 0$$

Cette relation de commutation assure que si l'état initial est un état propre (par exemple le fondamental) de $H(0)$, l'état final sera le « même » état propre mais de $H(t_f)$ à une phase globale près.

Application au transport

$$H_0(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0(t))^2$$

Application au transport

$$H_0(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0(t))^2$$

$$I(t) = \frac{(p - m\dot{q}_c)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - q_c)^2 \quad \text{avec} \quad \ddot{q}_c + \omega^2(q_c - x_0(t)) = 0$$

Application au transport

$$H_0(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0(t))^2$$

$$I(t) = \frac{(p - m\dot{q}_c)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - q_c)^2 \quad \text{avec} \quad \ddot{q}_c + \omega^2(q_c - x_0(t)) = 0$$

Conséquence de la relation de commutation

$$[I(0), H(0)] = 0$$

$$[I(t_f), H(t_f)] = 0$$



$$q_c(0) = x_0(0) = 0 \quad , \quad \dot{q}_c(0) = 0 \quad , \quad \ddot{q}_c(0) = 0$$

$$q_c(t_f) = x_0(t_f) = d \quad , \quad \dot{q}_c(t_f) = 0 \quad , \quad \ddot{q}_c(t_f) = 0$$

Application au transport

$$H_0(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0(t))^2$$

$$I(t) = \frac{(p - m\dot{q}_c)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - q_c)^2 \quad \text{avec} \quad \ddot{q}_c + \omega^2(q_c - x_0(t)) = 0$$

Conséquence de la relation de commutation

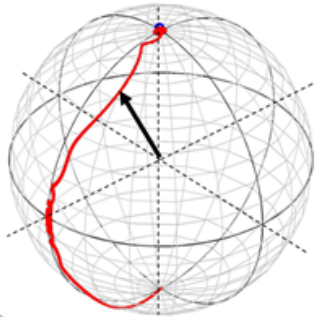
$$\begin{aligned} [I(0), H(0)] = 0 & \quad q_c(0) = x_0(0) = 0, \quad \dot{q}_c(0) = 0, \quad \ddot{q}_c(0) = 0 \\ [I(t_f), H(t_f)] = 0 & \quad q_c(t_f) = x_0(t_f) = d, \quad \dot{q}_c(t_f) = 0, \quad \ddot{q}_c(t_f) = 0 \end{aligned}$$

Il existe une infinité de possibilités. Exemple de l'interpolation polynomiale

$$\frac{q_c(t)}{d} = 10 \left(\frac{t}{t_f}\right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f}\right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f}\right)^5 \quad \longrightarrow \quad x_0(t)$$

Stratégie 1

Application au système à deux niveaux



$$H_0(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\Delta(t) & \Omega_R(t) - i\Omega_I(t) \\ \Omega_R(t) - i\Omega_I(t) & \Delta(t) \end{pmatrix}$$

Notre objectif : inversion de population en un temps arbitrairement court T

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow |\psi(T)\rangle = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Expression générale de l'invariant dynamique

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H_0] = 0$$

$$I(t) = \frac{\hbar}{2}\mu \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\alpha} \sin \theta \\ e^{i\alpha} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} \dot{\theta} &= \Omega_I \cos \alpha - \Omega_R \sin \alpha \\ \dot{\alpha} &= -\Delta - (\Omega_R \cos \alpha + \Omega_I \sin \alpha) \cot \theta \end{aligned}$$

Application au système à deux niveaux

$$I(t) = \frac{\hbar}{2}\mu \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\alpha} \sin \theta \\ e^{i\alpha} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Valeur propre

$$|\phi_+(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\alpha/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Transformation de jauge

$$|\psi_+(t)\rangle = |\phi_+(t)\rangle e^{-i\gamma(t)/2} \quad \text{avec} \quad \dot{\gamma} = -\frac{2}{\hbar} \langle \phi_+ | i\hbar \partial_t - H_0 | \phi_+ \rangle$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega_R \cos \alpha + \Omega_I \sin \alpha}{\sin \theta}$$

Solution exacte

$$\theta(0) = 0 \quad \theta(T) = \pi$$

$$\Omega_R = \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \theta - \dot{\theta} \sin \alpha$$

$$\Omega_I = \dot{\gamma} \sin \alpha \sin \theta + \dot{\theta} \cos \alpha$$

$$\Delta = -\dot{\gamma} \cos \theta - \dot{\alpha}$$

$$[H(0), I(0)] = [H(T), I(T)] = 0$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad \dot{\theta}(T) = 0$$

$$\Omega(0) = 0 \quad \Omega(T) = 0$$

$$\gamma(0) = \nu\pi \quad \gamma(T) = \nu'\pi$$

Stabilité pour une variation relative de la fréquence de Rabi

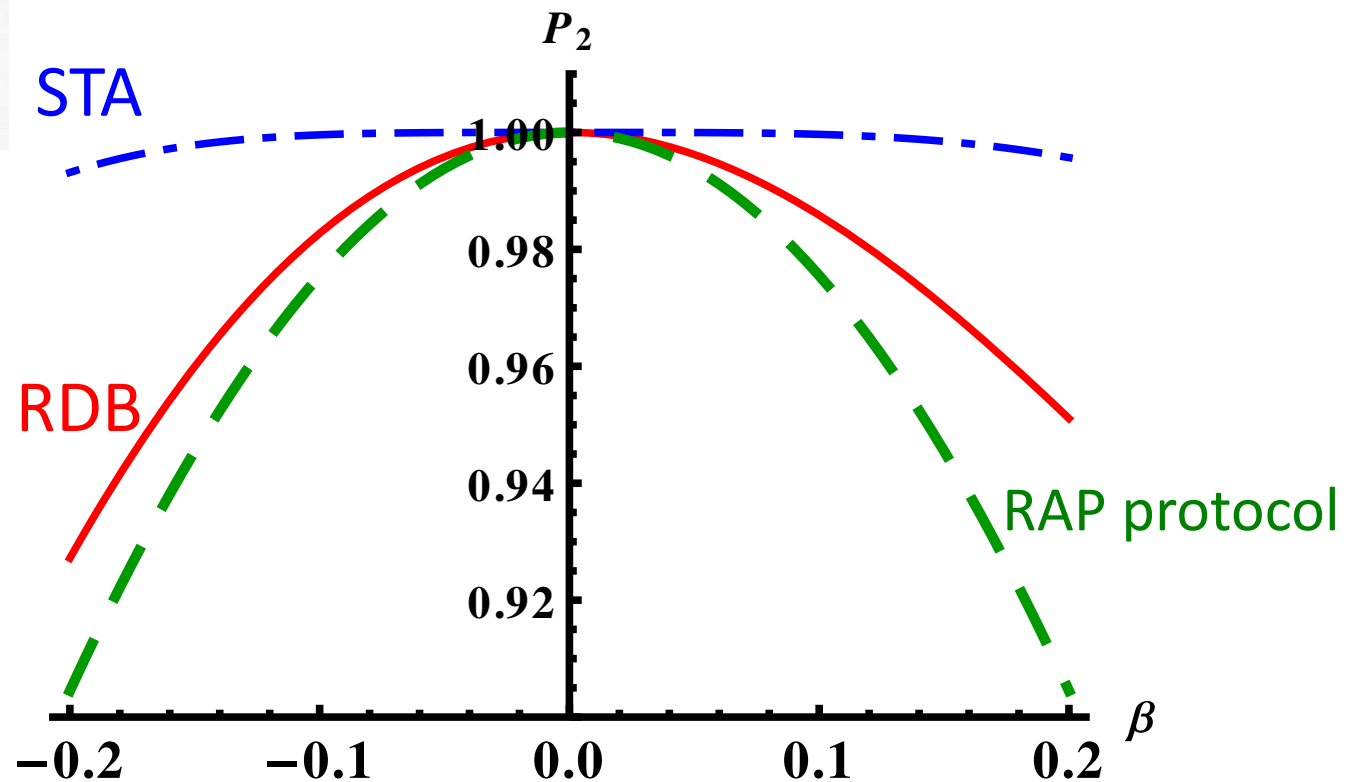
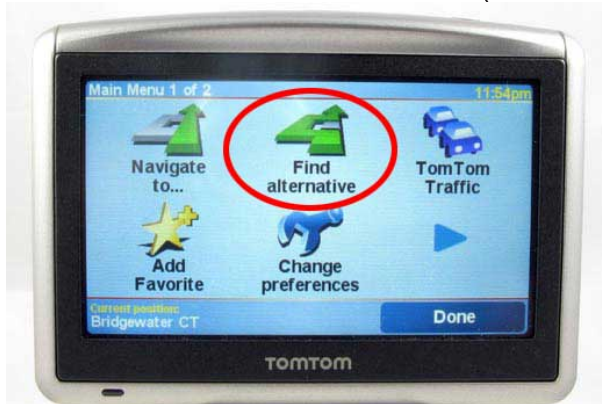
$$\Omega \longrightarrow (1 + \beta)\Omega$$

$$\Omega_R = \Omega_0 \sin(\pi t/T)$$

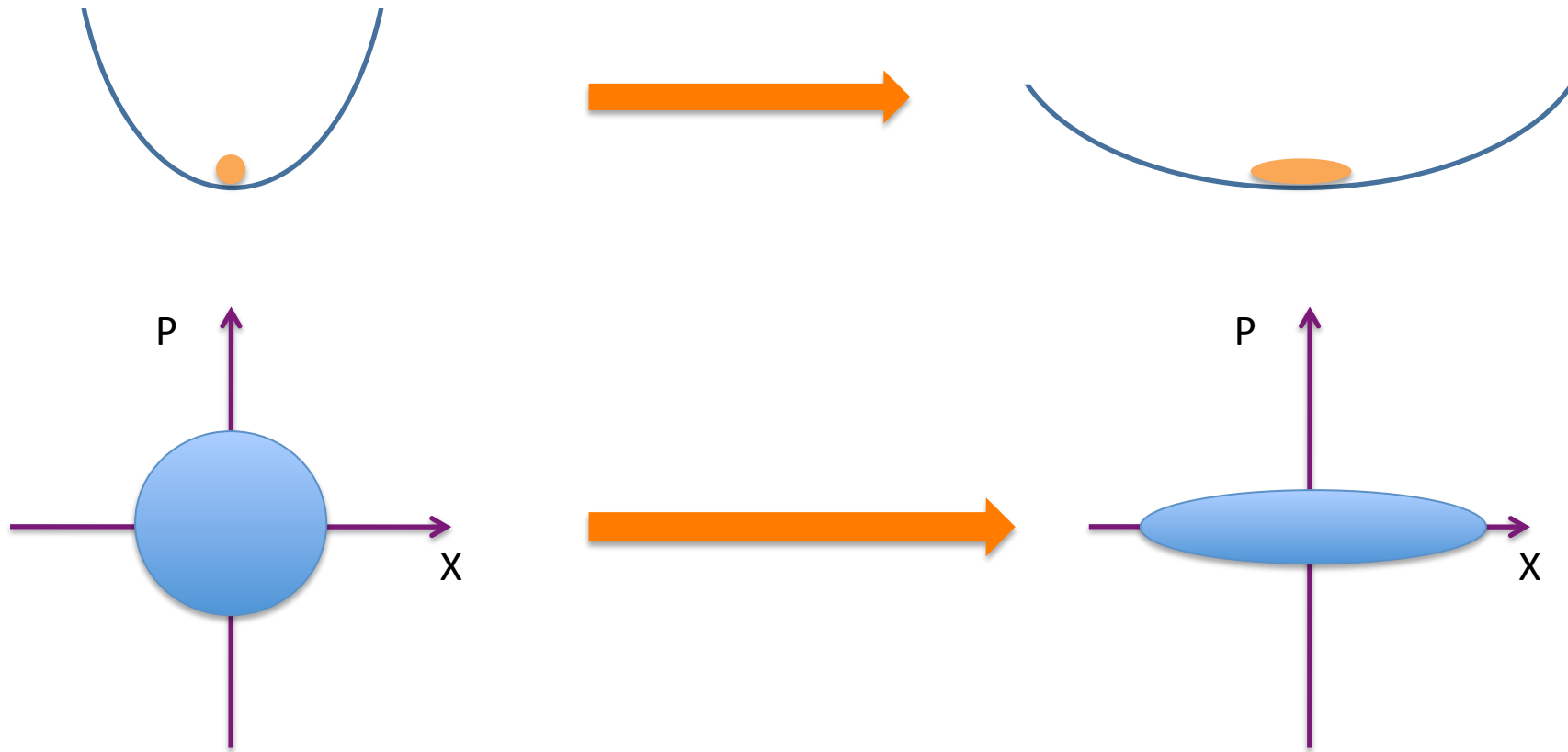
Metcalf protocol
Rapid Adiabatic Passage

$$\Omega_I = 0$$

$$\Delta(t) = -\delta_0 \cos(\pi t/T)$$



Décompression

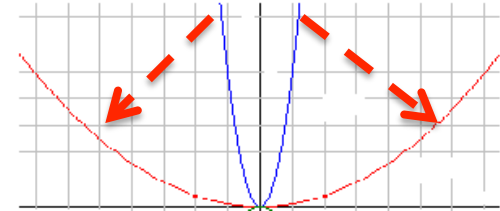


Motivation : diminuer la dispersion des vitesses Δv

Décompression standard

ouverture du piège

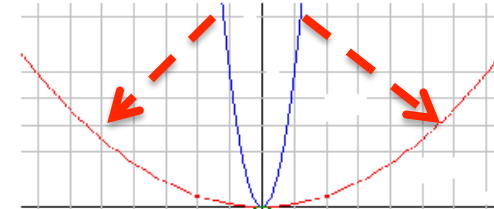
$$\omega(t) = \omega_i \left[1 + \frac{\omega_f - \omega_i}{\omega_i} \tanh \frac{t}{\tau} \right]$$



Décompression standard

ouverture du piège

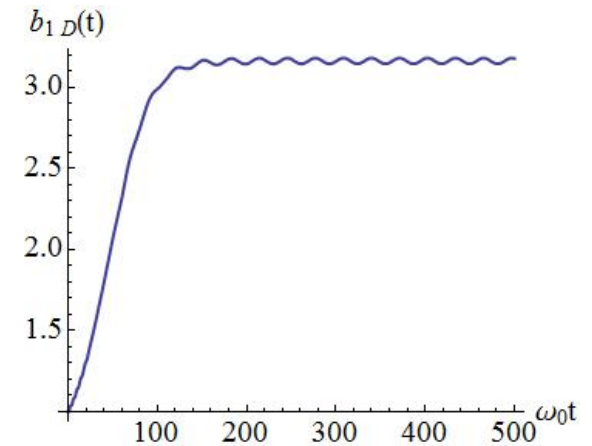
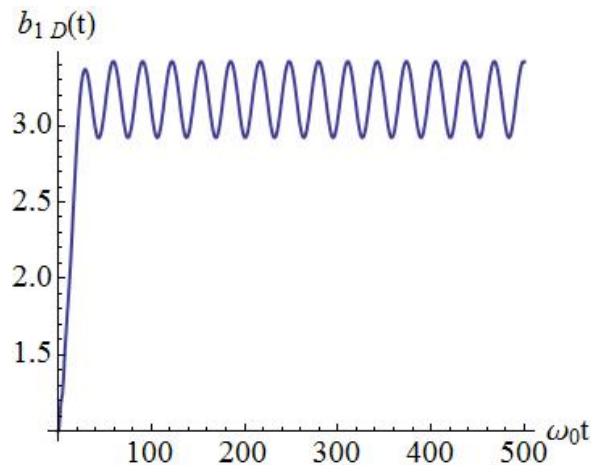
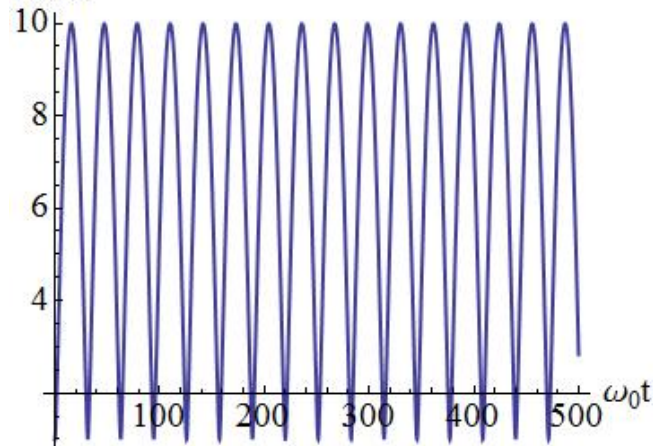
$$\omega(t) = \omega_i \left[1 + \frac{\omega_f - \omega_i}{\omega_i} \tanh \frac{t}{\tau} \right]$$



de la transition brutale à la transition adiabatique



$b_{1D}(t)$: "rayon" du nuage



Excitation du mode de respiration du nuage

Famille de problèmes à N corps

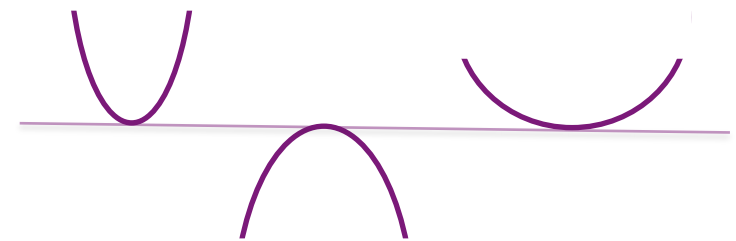
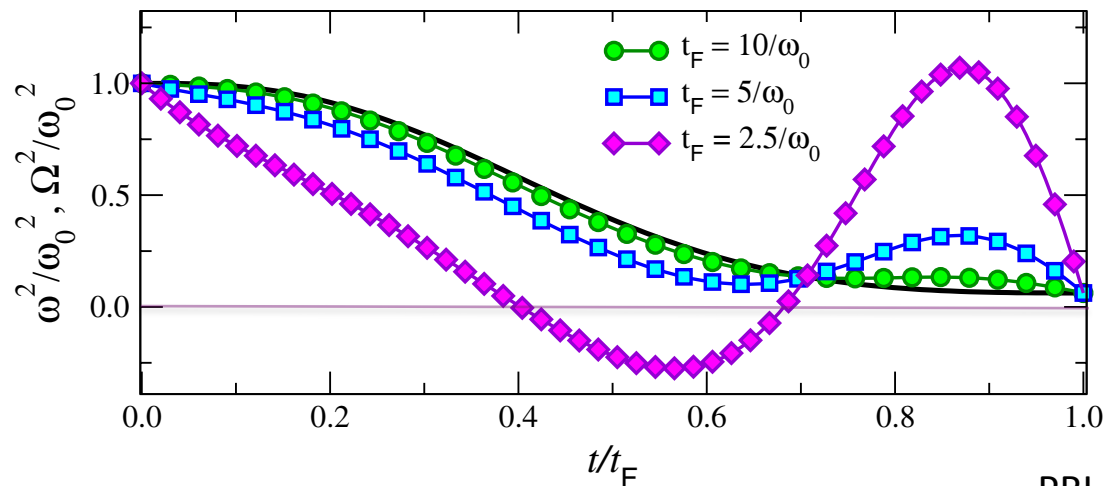
$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{q}_i} + \frac{1}{2} m \omega^2(t) \mathbf{q}_i^2 \right] + \epsilon(t) \sum_{i < j} V(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$$

$$V(\lambda \mathbf{q}) = \lambda^{-\alpha} V(\mathbf{q})$$

Les propriétés spectrales sont en général “inaccessibles”, mais la méthode RDB peut être retrouvée ici différemment

Ansatz en loi d'échelle $\Phi(t) = \gamma^{-\frac{ND}{2}} e^{-i\mu\tau(t)/\hbar} \Phi \left[\frac{\mathbf{q}_1}{\gamma(t)}, \dots, \frac{\mathbf{q}_N}{\gamma(t)}; 0 \right],$

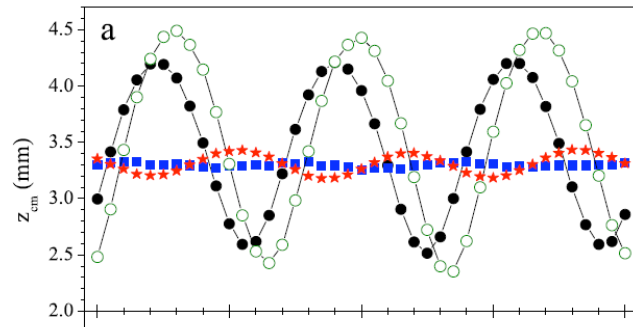
+ transformation unitaire $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^N \exp \left(\frac{im\dot{\gamma}}{2\hbar\gamma} \mathbf{q}_i^2 \right) \Phi(t) \rightarrow \Psi(t) = \mathcal{U}\Phi(t)$



Décompression : résultats expérimentaux

NICE (Labeyrie)

Gaz sans interactions



Excitation résiduelle attribuée à:
 - réalisation approximative de $\omega(t)$
 - anharmonicités

PRA **82**, 033430 (2010)

NICE (Labeyrie)

Condensat de Bose-Einstein

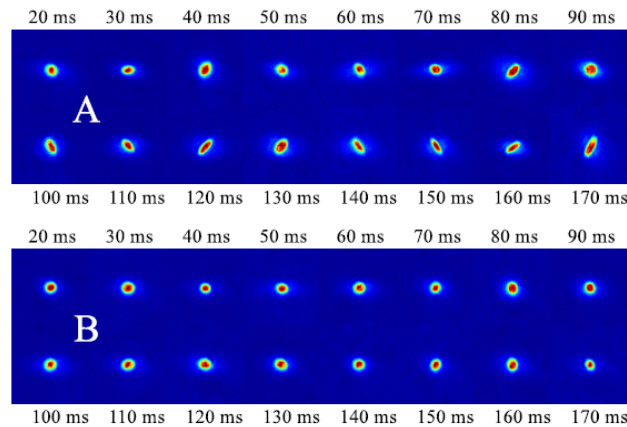
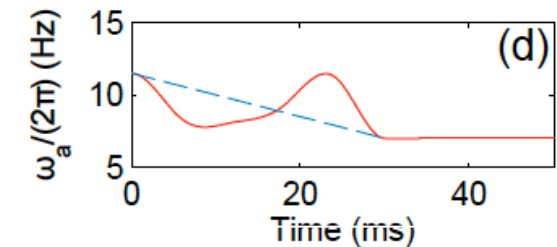
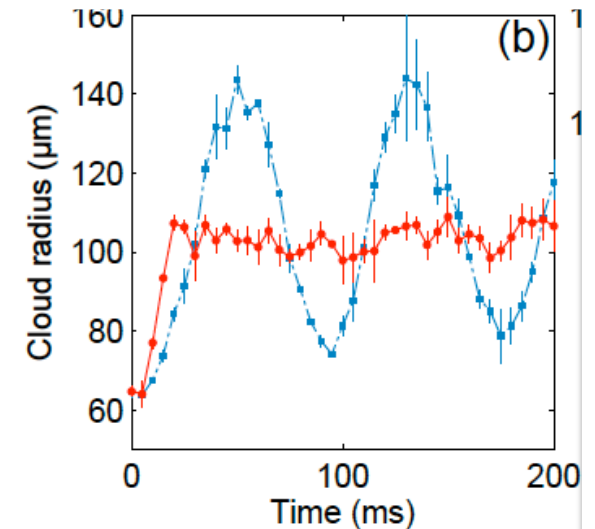


FIG. 1: Linear versus shortcut BEC decompression. We compare the time evolution of the BEC after two different decompression schemes: (A) a 30-ms-long linear ramp and (B) the shortcut trajectory (see text). The center of mass motion has been subtracted from these time of flight images for clarity.

EPL **93**, 23001 (2011)

VIENNA (Schmiedmayer)

Gaz quantique 1D (Many-Body)

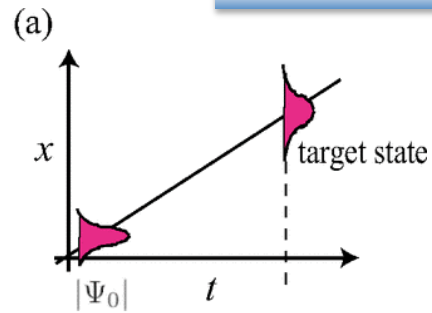


ArXiv: 1312.5948

PLAN DE L'EXPOSE

- 1- Méthode Rice – Demirplak – Berry (counteradiabatic protocol/ transitionless tracking algorithm)
- 2- La méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld (reverse engineering)
- 3- Façonnage rapide par anticipation (Fast Forward method)
- 4- Court circuiter l'adiabaticité mécanique et thermodynamique

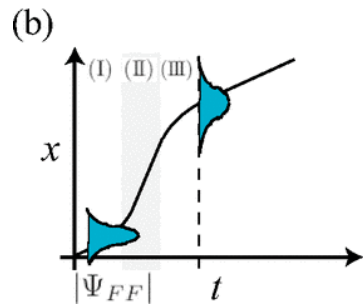
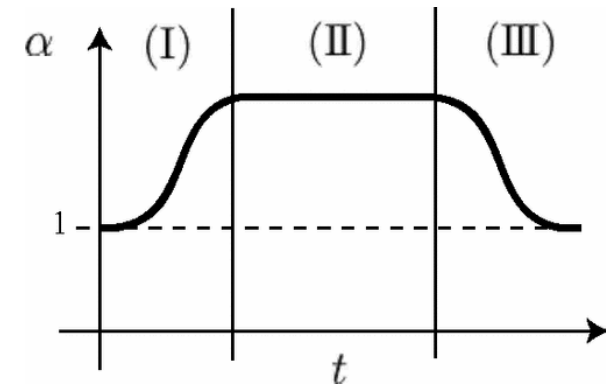
Façonnage par anticipation (Fast-Forward)



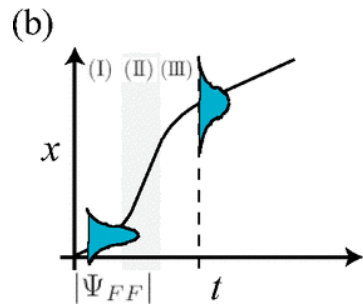
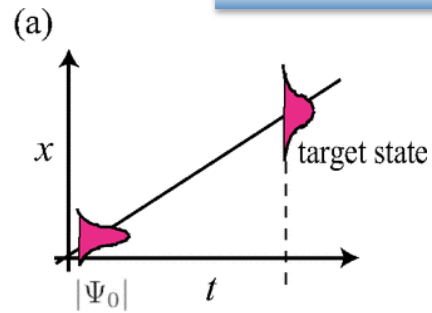
$$|\Psi_\alpha(t)\rangle = |\Psi_0(\Lambda(t))\rangle$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(t') dt'$$

$$\hat{H}_\alpha = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_\alpha} + \hat{V}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}, t)$$



Façonnage par anticipation (Fast-Forward)



$$|\Psi_\alpha(t)\rangle = |\Psi_0(\Lambda(t))\rangle$$

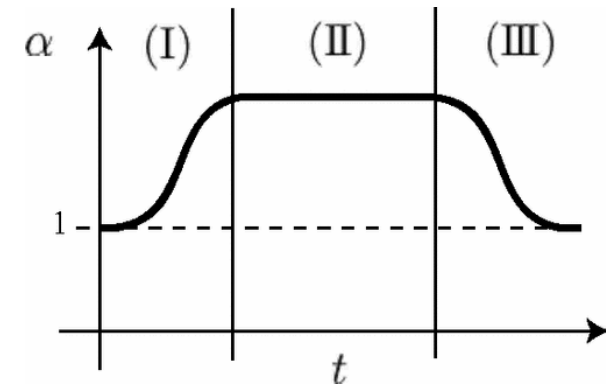
$$\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(t') dt'$$

$$\hat{H}_\alpha = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_\alpha} + \hat{V}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}, t)$$

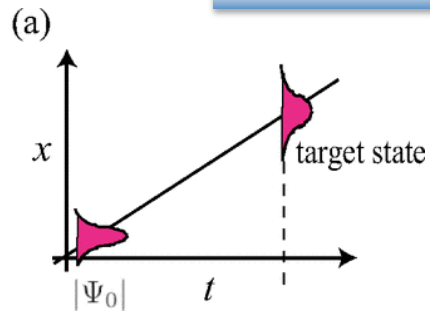
Problème

$$m_\alpha = m_0 / \alpha(t)$$

$$\hat{V}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}, t) = \alpha(t) \hat{V}_0(\hat{\mathbf{x}}, \Lambda(t))$$

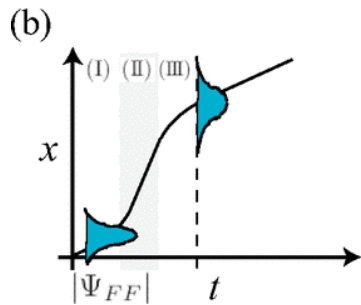
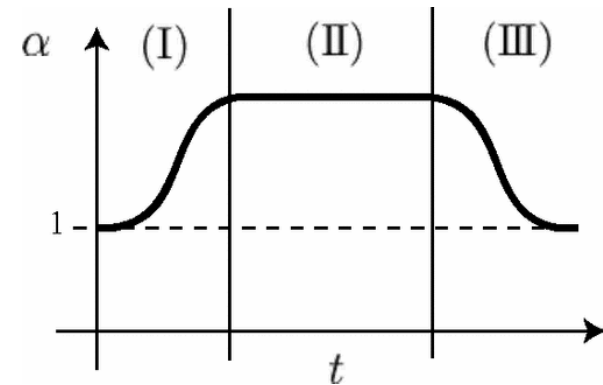


Façonnage par anticipation (Fast-Forward)



$$|\Psi_\alpha(t)\rangle = |\Psi_0(\Lambda(t))\rangle$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(t') dt'$$



$$\hat{H}_\alpha = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_\alpha} + \hat{V}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}, t)$$

Problème $m_\alpha = m_0/\alpha(t)$ $\hat{V}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}, t) = \alpha(t)\hat{V}_0(\hat{\mathbf{x}}, \Lambda(t))$

Solution $\langle \mathbf{x} | \Psi_{FF}(t) \rangle = \exp[if(\mathbf{x}, t)] \langle \mathbf{x} | \Psi_\alpha(t) \rangle$
phase

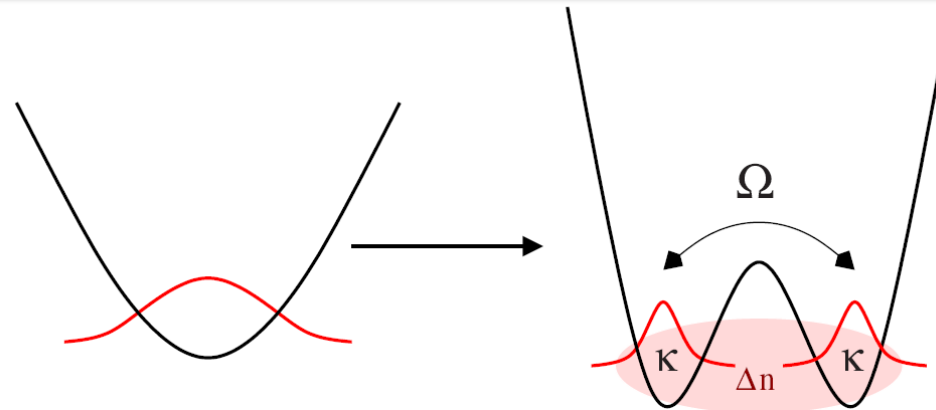
$$\hat{H}_{FF} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} + \hat{V}_{FF}(\hat{\mathbf{x}}, t)$$

$$\hat{V}_{FF}[\alpha, \Psi_\alpha, f]$$

On façonne ici un potentiel par rapport à une évolution connue

Application : problème du transport, on retrouve la **Stratégie 2**

Séparation d'une fonction d'onde en deux (1)



Nous n'avons pas trouvé de méthodes pour construire un invariant dynamique tel que

$$[I(0), H(0)] = 0$$

$$[I(t_f), H(t_f)] = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t) |\psi(t)\rangle$$

$$H = T + V$$

$$\langle \mathbf{x} | T | \psi(t) \rangle = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t)$$


$$\langle \mathbf{x} | V(t) | \mathbf{x}' \rangle = V(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

postule

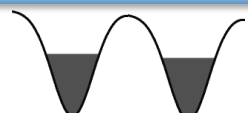
$$\langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle = r(\mathbf{x}, t) e^{i\phi(\mathbf{x}, t)}, \quad r(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$$

$$V(x, t) = \tilde{V}(r, \dot{r}, \partial_x r, \partial_{xx} r, \dot{\phi}, \partial_x \phi, \partial_{xx} \phi)$$

Séparation d'une fonction d'onde en deux (2)



$$r(x, 0) = e^{-\beta^2 x^2 / 2}$$

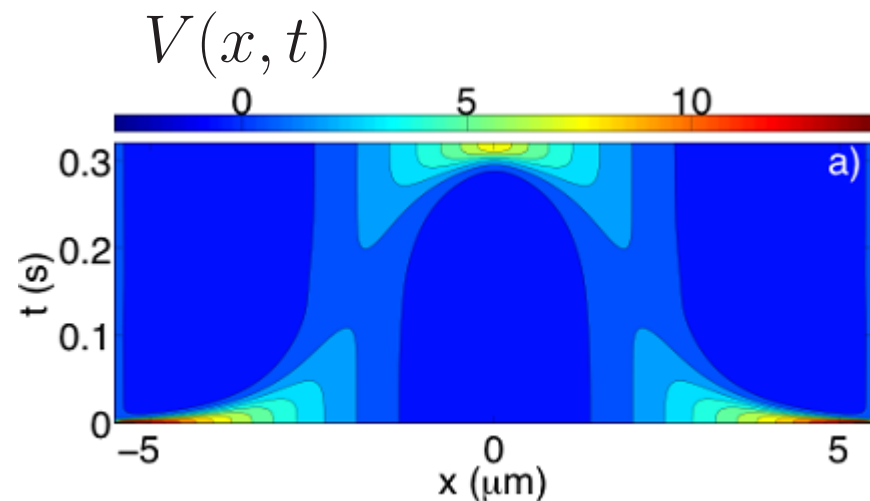
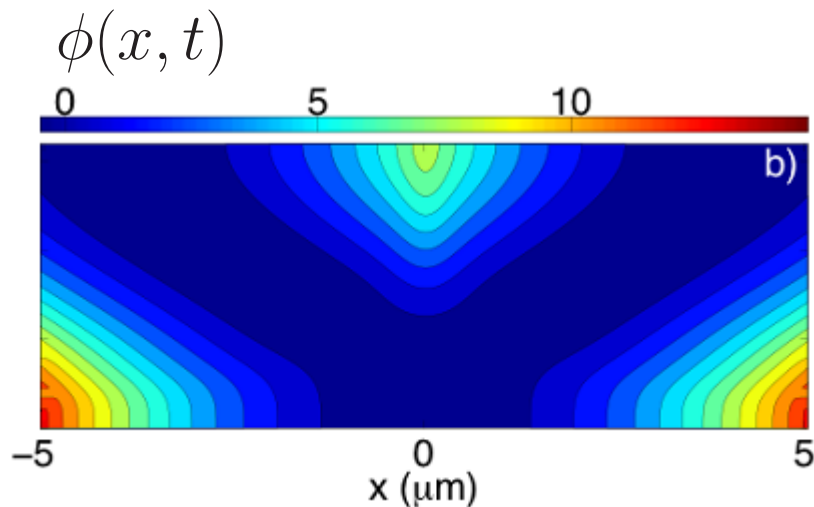


$$r(x, t_f) = e^{-\beta^2 (x-a)^2 / 2} + e^{-\beta^2 (x+a)^2 / 2}$$

interpolation $r(x, t) = \mathcal{N}(t) [(1 - f(t))r(x, 0) + f(t)r(x, t_f)]$

$\text{Im}[V(\mathbf{x}, t)] = 0$, i.e.

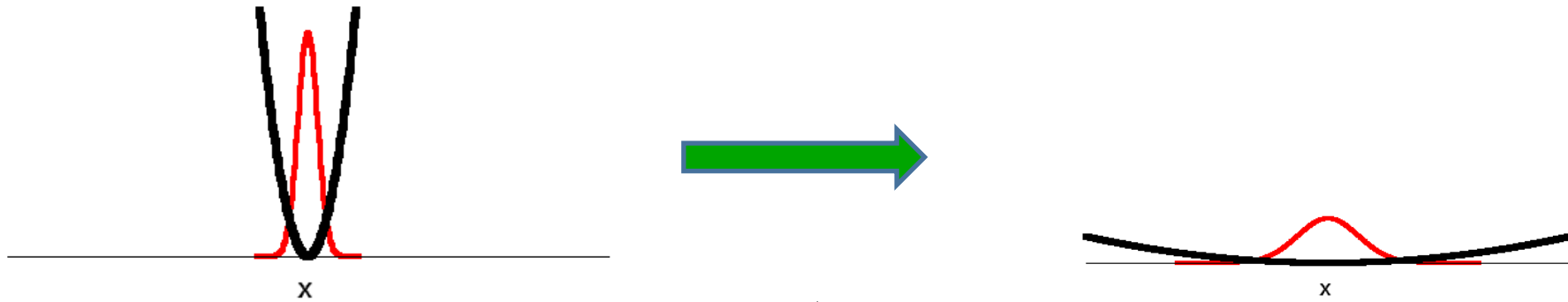
$$\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\hbar}{2m} \left(\frac{2\nabla\phi \cdot \nabla r}{r} + \nabla^2\phi \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\phi(x, t)}$$



PLAN DE L'EXPOSE

- 1- Méthode Rice – Demirplak – Berry (counteradiabatic protocol/ transitionless tracking algorithm)
- 2- La méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld (reverse engineering)
- 3- Façonnage rapide par anticipation (Fast Forward method)
- 4- Court circuiter l'adiabaticité mécanique et thermodynamique

Critère d'adiabaticité mécanique (à une particule)



$$U(r, t) = \frac{1}{2}m\omega^2(t)r^2$$

Critère d'évolution lente : $\frac{d\omega}{dt} \ll \omega^2$

L'action mécanique reste constante au cours de l'évolution lente de la fréquence angulaire

Énergie totale

$$\frac{E}{\omega} = Cte$$

Critère d'adiabaticité pour un gaz en interactions

Adiabaticité thermodynamique :

$$\frac{d\omega}{dt} \ll \frac{\omega}{\tau_{\text{therm}}}$$

τ_{therm} *temps de thermalisation*

$\gamma = n\sigma\bar{v}$ *taux de collisions introduit une nouvelle échelle de temps*

$\gamma \ll \omega$ *régime « sans interactions » (très dilué)*

$$\tau_{\text{therm}} \propto \frac{1}{\gamma}$$

$\gamma \gg \omega$ *régime hydrodynamique*

$$\tau_{\text{therm}} \propto \frac{\gamma}{\omega^2}$$

Température

$$\frac{T_f}{\omega_f} = \frac{T_i}{\omega_i}$$

conservation du rapport T/ω

dans une transformation adiabatique

Problématique physique

Une image simple de l'adiabaticité

Les populations restent constantes au cours de la transformation (travail)



Question à laquelle nous souhaiterions répondre

Est-il possible de court-circuiter le critère d'adiabaticité thermodynamique

quelque soit le régime collisionnel i.e. quelque soient les valeurs relatives de γ et ω

pour une transformation qui relie deux états d'équilibre caractérisés par

(ω_i, T_i) et (ω_f, T_f) avec la relation que nous aurions pour une transformation

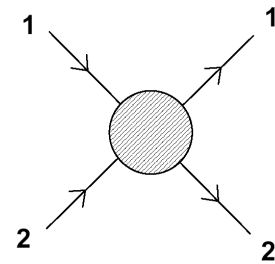
adiabatique à savoir

$$\frac{T_f}{\omega_f} = \frac{T_i}{\omega_i} \quad ?$$

Point de départ : l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \omega^2 \mathbf{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = I_{\text{coll}}$$

Intégrale de collision classique



$$I_{\text{coll}}[f(1)] = \int d^2\Omega \frac{d\sigma}{d^2\Omega} d^3v_2 |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| [f(1')f(2') - f(1)f(2)]$$

Intégrale de collision quantique dans la limite semi-classique

$$I_{\text{coll}}[f(1)] = \int d^2\Omega \frac{d\sigma}{d^2\Omega} d^3v_2 |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$$

$$[f(1')f(2')(1 \pm f(1))(1 \pm f(2)) - f(1)f(2)(1 \pm f(1'))(1 \pm f(2'))]$$

Classe de solutions exactes de l'équation de Boltzmann (1)

On cherche une solution dans le noyau de l'intégrale de collisions

Par exemple dans le cas de l'équation de Boltzmann classique, l'ansatz suivant est solution

Il repose sur la conservation du nombre de particules, de l'énergie et de l'impulsion

$$f_m(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{\pi^3} (\alpha\beta - \gamma^2/4)^{3/2} \exp(-\alpha r^2 - \beta v^2 - \gamma \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$$

où $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ sont des paramètres dépendant du temps

Corrélations
position-vitesse

$$I_{\text{coll}}[f_m] = 0 \quad \text{pas de relaxation !}$$

$$f_m(1)f_m(2) = f_m(1')f_m(2')$$

Classe de solutions exactes de l'équation de Boltzmann (2)

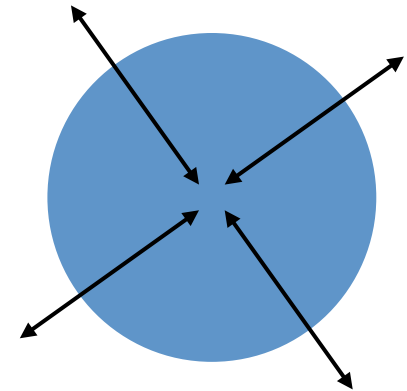
En effet, si on « injecte » cet ansatz dans l'équation de Boltzmann, les paramètres obéissent au système d'équations couplées suivant

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \omega^2(t)\gamma \\ \dot{\beta} &= -\gamma \\ \dot{\gamma} &= 2\omega^2(t)\beta - 2\alpha\end{aligned}$$

Le facteur de normalisation de la distribution dans l'espace des phases est une fonction de $(\alpha\beta - \gamma^2/4)$, quantité dont on démontre à partir du système d'équations précédent simplement qu'elle est constante.

Mode monopolaire ou de respiration

Si on impose $\omega(t) = \omega_0$, on trouve que le rayon quadratique moyen oscille à deux fois la fréquence angulaire de piégeage quel que soit le taux de collisions élastiques



Ce mode ne peut jamais s'amortir !

$$I_{\text{coll}}[f_m] = 0$$

Cette propriété repose sur les lois de conservation.

Elle peut être généralisée à tous les potentiels de confinement de la forme

$$U(r) \propto \left(r^2 + \frac{b}{r^2} \right)$$

Solution exacte et adiabaticité

Les trois équations couplées
du premier ordre,

$$\dot{\alpha} = \omega^2(t)\gamma$$

$$\dot{\beta} = -\gamma$$

$$\dot{\gamma} = 2\omega^2(t)\beta - 2\alpha$$

conduisent à une équation
du troisième ordre pour

$$\ddot{\ddot{\beta}} + 4\omega^2\dot{\beta} + 4\omega\dot{\omega}\beta = 0$$

Pour une variation lente de $\omega(t)$, le terme $\ddot{\ddot{\beta}}$ peut être négligé

Sous cette hypothèse on retrouve le résultat de l'évolution adiabatique

$$\beta(t)/\beta(0) = \omega(0)/\omega(t) \quad \longrightarrow \quad \omega(t)/T(t) = Cte$$

où $T(t) = \beta(t)^{-1}$ joue le rôle d'une température effective

Connexion entre les deux états thermodynamiques

$$f_m(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{\pi^3} (\alpha\beta - \gamma^2/4)^{3/2} \exp(-\alpha r^2 - \beta v^2 - \gamma \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$$

$$(\omega_i, T_i) \quad \longrightarrow \quad (\omega_f, T_f)$$

$$\alpha_i = \omega_i^2 / T_i$$

$$\beta_i = 1/T_i$$

$$\gamma_i = 0$$

$$\alpha_f = \omega_f^2 / T_f$$

$$\beta_f = 1/T_f$$

$$\gamma_f = 0$$

avec

$$\frac{T_f}{\omega_f} = \frac{T_i}{\omega_i}$$

Protocole de “court-circuit” de l’adiabaticité

Nous souhaitons effectuer la transformation en un temps \mathcal{T}

$$\begin{array}{ccc} \beta(0) = \beta_i & & \beta(\tau) = \beta_f \\ \dot{\beta}(0) = 0 & \longrightarrow & \dot{\beta}(\tau) = 0 \\ \ddot{\beta}(0) = 0 & & \ddot{\beta}(\tau) = 0 \\ \dddot{\beta}(0) = 0 & & \dddot{\beta}(\tau) = 0 \end{array}$$

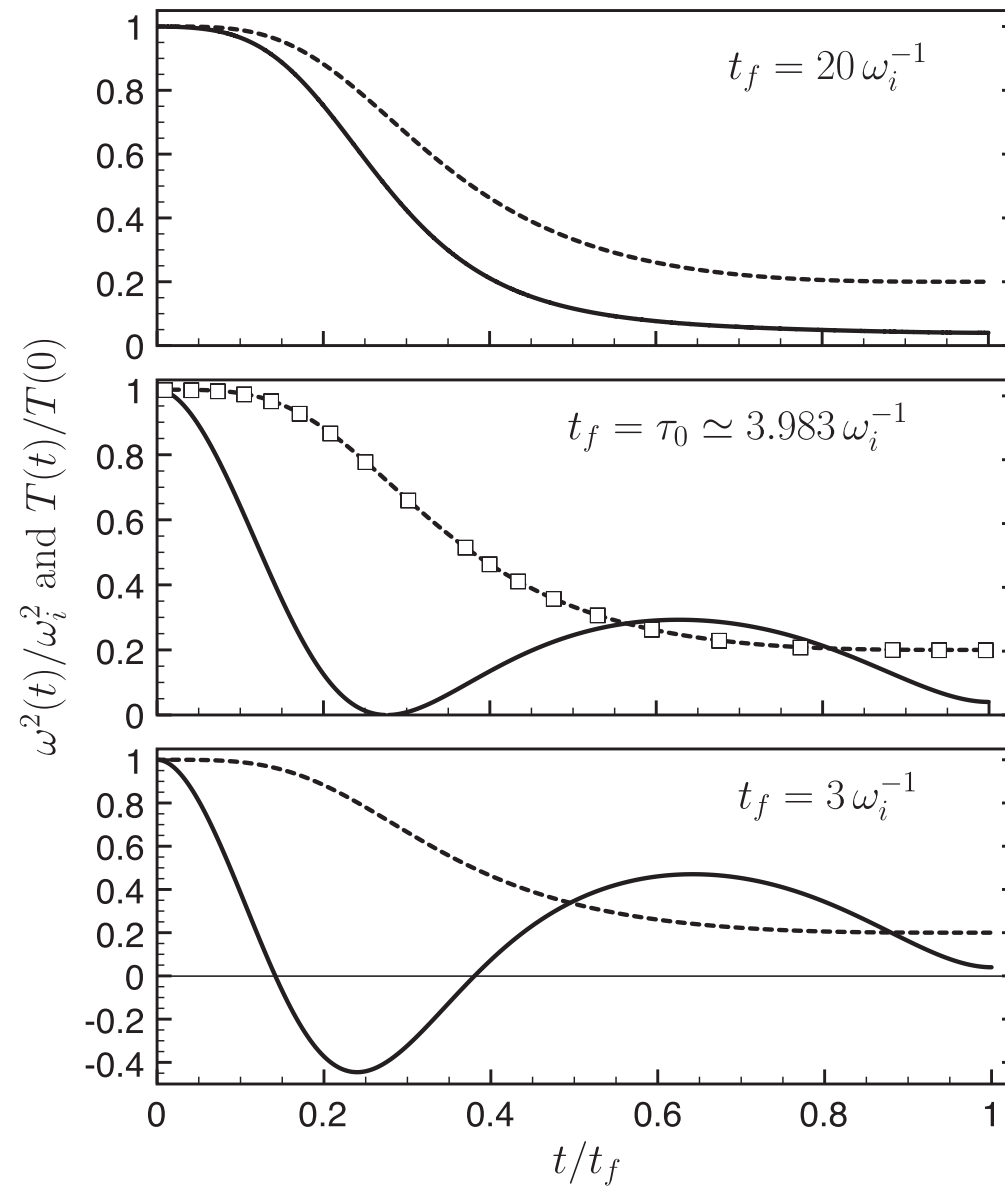
Introduisons la variable de temps réduite $s = t/\tau$, ces conditions aux limites sont réalisées

par exemple grâce à une interpolation polynomiale

$$\beta(s) = (\beta_f - \beta_i)(-20s^7 + 70s^6 - 84s^5 + 35s^4) + \beta_i$$

$$\ddot{\beta} + 4\omega^2\dot{\beta} + 4\omega\dot{\omega}\beta = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\omega(t)}$$

Exemple décompression par un facteur 5

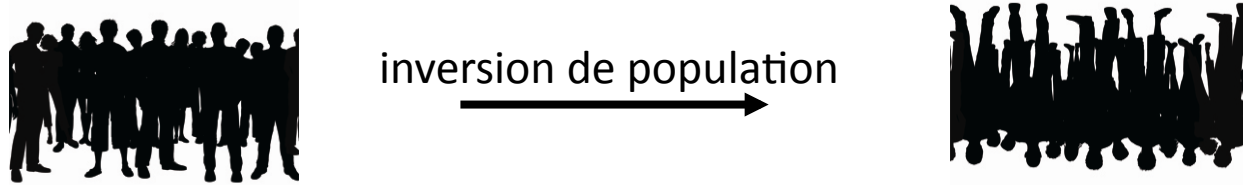


Conclusion et tout ce dont je n'ai pas parlé ...

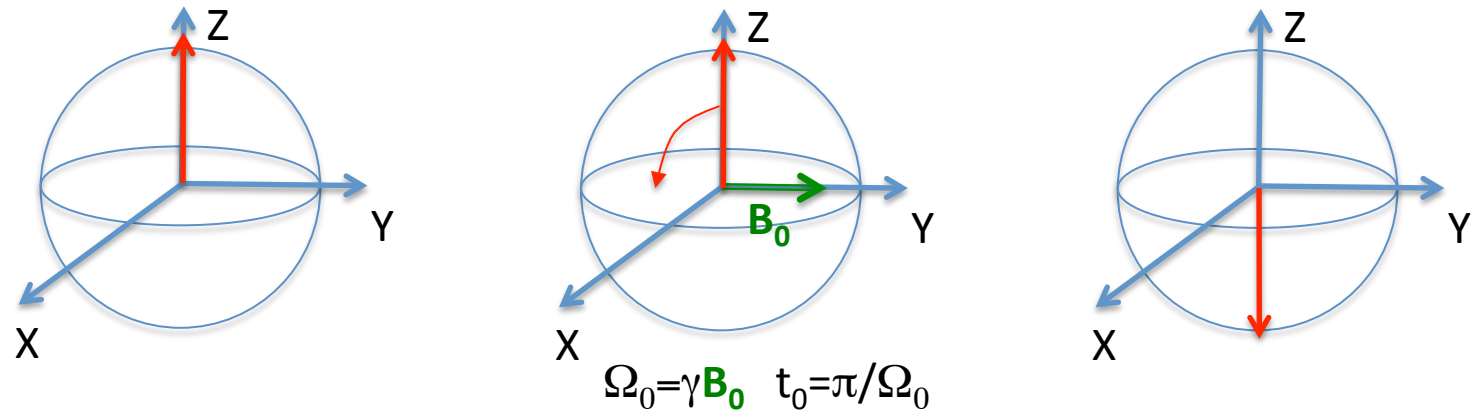
Boîte à outils pour accélérer certaines transformations en mécanique quantique et classique, pour **certains** problèmes à 1 corps et N corps

- Lien entre RDB et méthode des invariants (PRA **83**, 062116)
- Combiner ces méthodes avec des méthodes d'optimisation (inclure d'autres contraintes e.g. Contrainte coût énergétique)
- Formulation algébrique (algèbres de Lie PRA **89** 043408 (2014))
- Design de réseau photonique
- Robustesse vis-à-vis des différents types de bruit (NJP **14** 093040 (2012), PRA **88** 033406 (2013))
- Généralisation système à N niveaux
- Problèmes à N corps (ex. spin squeezing dans les jonctions Josephson, PRA **88** 043607)
- Application aux systèmes ouverts
- Génération d'états non classiques (états intriqués, chats de Schrödinger ...)

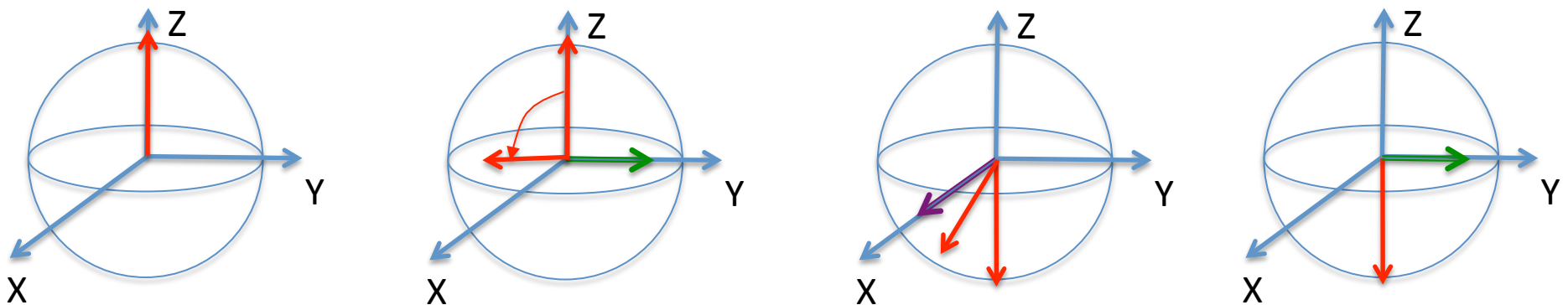
Manipulation de spin 1/2 par façonnage de champ magnétique



Impulsion π_Y



Séquence composite d'impulsions $(\pi/2)_Y (\pi)_X (\pi/2)_Y$



Robustesse vis-à-vis d'une disparité des fréquences de Rabi Ω_0