

Probabilités géométriques

Pierre Calka

Collège de France
Séminaire du cours de Jean-Daniel Boissonnat

19 avril 2017



institut
universitaire
de France



Des casse-têtes mathématiques...

1733

Problème de l'aiguille
de Buffon

1864

Problème des 4 points
de Sylvester

1888

Problème de la corde
de Bertrand

Des casse-têtes mathématiques...

1733

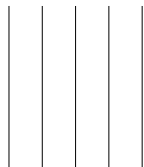
Problème de l'aiguille
de Buffon

1864

Problème des 4 points
de Sylvester

1888

Problème de la corde
de Bertrand



Des casse-têtes mathématiques...

1733

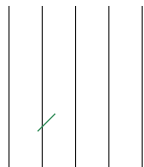
Problème de l'aiguille
de Buffon

1864

Problème des 4 points
de Sylvester

1888

Problème de la corde
de Bertrand



Des casse-têtes mathématiques...

1733

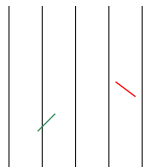
Problème de l'aiguille
de Buffon

1864

Problème des 4 points
de Sylvester

1888

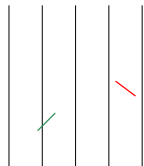
Problème de la corde
de Bertrand



Des casse-têtes mathématiques...

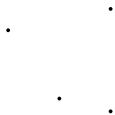
1733

Problème de l'aiguille
de Buffon



1864

Problème des 4 points
de Sylvester



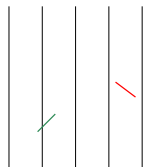
1888

Problème de la corde
de Bertrand

Des casse-têtes mathématiques...

1733

Problème de l'aiguille
de Buffon



1864

Problème des 4 points
de Sylvester



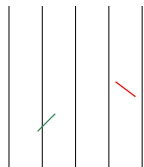
1888

Problème de la corde
de Bertrand

Des casse-têtes mathématiques...

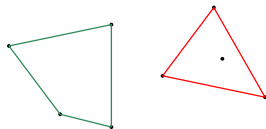
1733

Problème de l'aiguille
de Buffon



1864

Problème des 4 points
de Sylvester



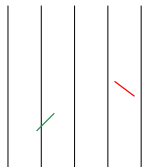
1888

Problème de la corde
de Bertrand

Des casse-têtes mathématiques...

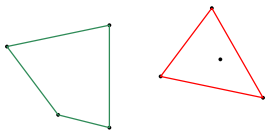
1733

Problème de l'aiguille
de Buffon



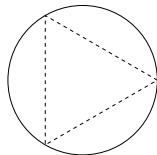
1864

Problème des 4 points
de Sylvester



1888

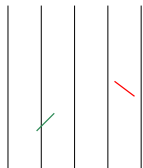
Problème de la corde
de Bertrand



Des casse-têtes mathématiques...

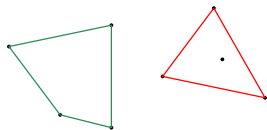
1733

Problème de l'aiguille
de Buffon



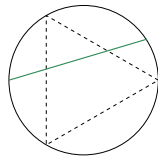
1864

Problème des 4 points
de Sylvester



1888

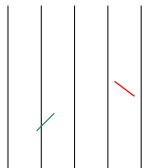
Problème de la corde
de Bertrand



Des casse-têtes mathématiques...

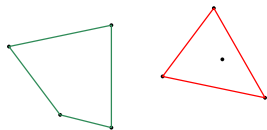
1733

Problème de l'aiguille
de Buffon



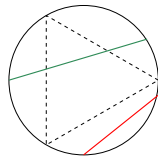
1864

Problème des 4 points
de Sylvester

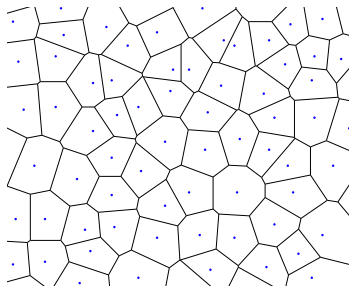
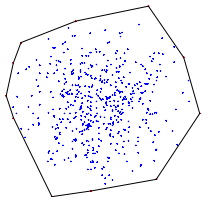


1888

Problème de la corde
de Bertrand

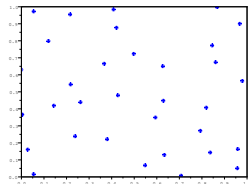
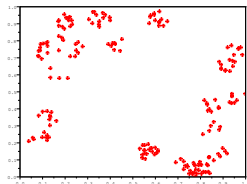
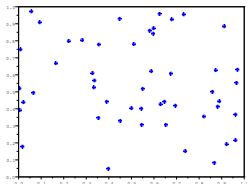


...à des modèles probabilistes

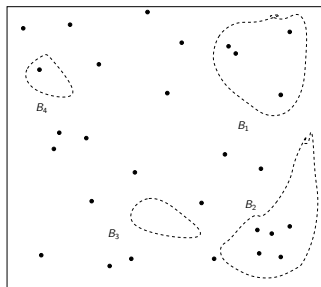


Des points au hasard : processus ponctuel

processus ponctuel : ensemble localement fini de \mathbb{R}^d



Processus ponctuels sans interaction et homogènes



Processus binomial

K corps convexe de \mathbb{R}^d

X_1, \dots, X_n i.i.d. uniformes dans K

$\mathcal{E} := \{X_1, \dots, X_n\}$

- ▶ $\#(\mathcal{E} \cap B_1)$ v.a. binomiale $(n, \frac{\text{Vol}(B_1)}{\text{Vol}(K)})$
- ▶ $\#(\mathcal{E} \cap B_1), \dots, \#(\mathcal{E} \cap B_\ell)$ non indépendantes

Processus de Poisson

$\lambda > 0$ intensité du processus

\mathcal{P} ensemble localement fini tel que

- ▶ $\#(\mathcal{P} \cap B_1)$ v.a. de Poisson $(\lambda \text{Vol}(B_1))$
- ▶ $\#(\mathcal{P} \cap B_1), \dots, \#(\mathcal{P} \cap B_\ell)$ indépendantes

Enveloppes convexes aléatoires

Mosaïque de Poisson-Voronoi

Basé sur des travaux en commun avec

Joseph Yukich (Lehigh University, États-Unis)

Tomasz Schreiber (Toruń University, Pologne)

Yann Demichel (Paris-Nanterre)

Nathanaël Enriquez (Paris-Nanterre)

Enveloppes convexes aléatoires

Construction

Premières questions

Espérances asymptotiques

Résultats asymptotiques du second ordre

Nouveaux résultats : variances limites

Corps flottant

Effet du changement d'échelle dans \mathbb{D}

Effet du changement d'échelle dans $(0, \infty)^2$

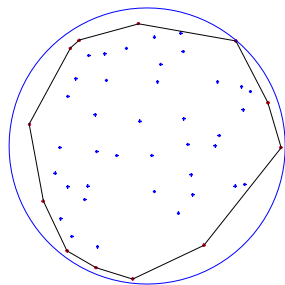
Mosaïque de Poisson-Voronoi

Polytope aléatoire : modèle binomial uniforme

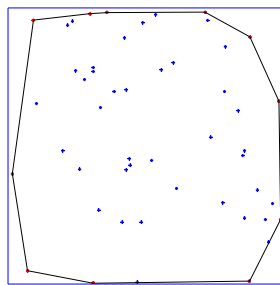
K corps convexe de \mathbb{R}^d

$(X_k, k \in \mathbb{N}^*)$: indépendantes et de loi uniforme dans K

$$\bar{K}_n := \text{Conv}(X_1, \dots, X_n)$$



\bar{K}_{50} , K disque



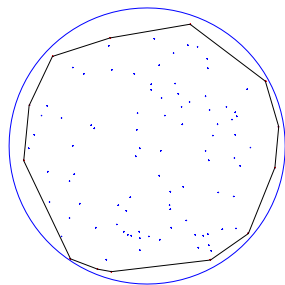
\bar{K}_{50} , K carré

Polytope aléatoire : modèle binomial uniforme

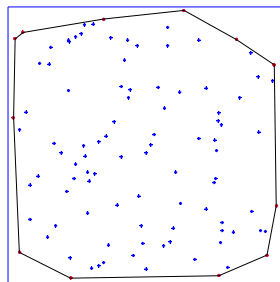
K corps convexe de \mathbb{R}^d

$(X_k, k \in \mathbb{N}^*)$: indépendantes et de loi uniforme dans K

$$\bar{K}_n := \text{Conv}(X_1, \dots, X_n)$$



\bar{K}_{100} , K disque



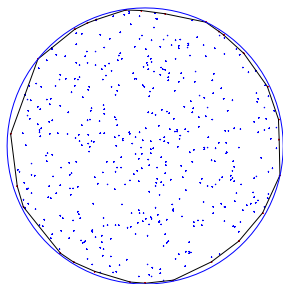
\bar{K}_{100} , K carré

Polytope aléatoire : modèle binomial uniforme

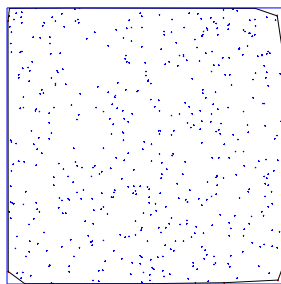
K corps convexe de \mathbb{R}^d

$(X_k, k \in \mathbb{N}^*)$: indépendantes et de loi uniforme dans K

$$\bar{K}_n := \text{Conv}(X_1, \dots, X_n)$$



\bar{K}_{500} , K disque



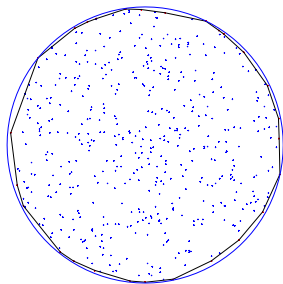
\bar{K}_{500} , K carré

Polytope aléatoire : modèle poissonnien uniforme

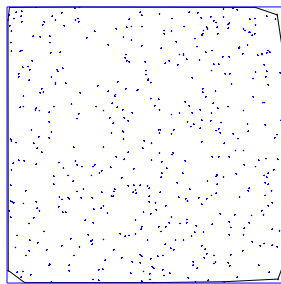
K corps convexe de \mathbb{R}^d

\mathcal{P}_λ , $\lambda > 0$: processus ponctuel de Poisson d'intensité λ

$$K_\lambda := \text{Conv}(\mathcal{P}_\lambda \cap K)$$



K_{500} , K disque



K_{500} , K carré

Premières questions

$f_0(\cdot)$: nombre de points extrémaux

$\text{Vol}(\cdot)$: volume, $f_k(\cdot)$: nombre de faces k -dimensionnelles

- Problème de **Sylvester** (1864) : En dimension 2

$$\mathbb{P}[f_0(\overline{K}_3) = 3] = 1$$

$$\mathbb{P}[f_0(\overline{K}_4) = 4] = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } K = \triangle \\ 1 - \frac{35}{12\pi^2} & \text{si } K = \bigcirc \end{cases}$$

- **Wendel** (1962): si K est symétrique par rapport à l'origine,

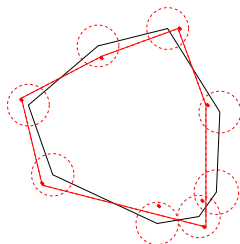
$$\mathbb{P}[0 \notin \overline{K}_n] = 2^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n-1}{k} \quad (n \geq d)$$

- **Efron** (1965) : $\mathbb{E}f_0(\overline{K}_n) = n \left(1 - \frac{\mathbb{E}\text{Vol}(\overline{K}_{n-1})}{\text{Vol}(K)} \right)$

Étude asymptotique : pourquoi ?

- ▶ Calculs explicites à nombre de points jetés fixé très limités
- ▶ Approximation du corps convexe K par un polytope
- ▶ Information sur l'analyse en moyenne de la complexité d'algorithmes d'enveloppes convexes

Devillers, Glisse, Goaoc et Thomasse (2016) :
complexité lissée, pour des données en position convexe bruitées



Espérances asymptotiques

Uniforme, K lisse

$\kappa_s :=$ courbure gaussienne de ∂K

$$\mathbb{E}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} c_{d,k} \int_{\partial K} \kappa_s^{\frac{1}{d+1}} ds \lambda^{\frac{d-1}{d+1}}$$

Uniforme, K polytope

$F(K) :=$ nombre de drapeaux de K

$$\mathbb{E}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} c'_{d,k} F(K) \log^{d-1}(\lambda)$$

A. Rényi & R. Sulanke (1963), H. Raynaud (1970), R. Schneider & J. Wieacker (1978), F. Affentranger & R. Schneider (1992)

Résultats asymptotiques du second ordre

- Théorème central limite :

$$\mathbb{P} \left[\frac{f_k(K_\lambda) - \mathbb{E}[f_k(K_\lambda)]}{\sqrt{\text{Var}[f_k(K_\lambda)]}} \leq t \right] \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

- Encadrements de variances

Uniforme, K lisse $\text{Var}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} \Theta(\lambda^{\frac{d-1}{d+1}})$

Uniforme, K polytope $\text{Var}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} \Theta(\log^{d-1}(\lambda))$

Nouveaux résultats : variances limites

Uniforme, K lisse

$$\text{Var}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} c_{d,k} \int_{\partial K} \kappa_s^{\frac{1}{d+1}} ds \lambda^{\frac{d-1}{d+1}}$$

$\kappa_s :=$ courbure gaussienne de ∂K

Uniforme, K polytope simple

$$\text{Var}[f_k(K_\lambda)] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} c'_{d,k} f_0(K) \log^{d-1}(\lambda)$$

Remarque : le résultat analogue pour le modèle binomial \overline{K}_n n'est justifié que dans le cas lisse.

- ▶ Décomposition des grandeurs considérées

$$f_k(K_\lambda) = \sum_{x \in \mathcal{P}_\lambda} \xi(x, \mathcal{P}_\lambda)$$

où le score de x est

$$\xi(x, \mathcal{P}_\lambda) := \begin{cases} \frac{1}{k+1} \#k\text{-faces contenant } x & \text{si } x \text{ extrémal} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

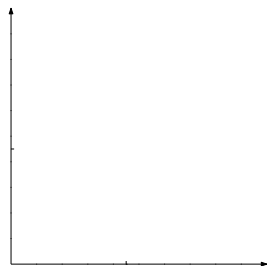
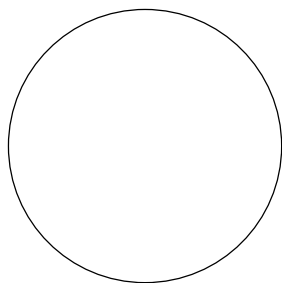
- ▶ Définition de scores pour $\lambda = \infty$ après changement d'échelle
- ▶ Compréhension de la forme limite *typique* de K_λ :
le corps flottant

Corps flottant

$v(x) := \inf\{\text{Vol}(K \cap H^+) : H^+ \text{ demi-espace contenant } x\}, x \in K$

Corps flottant : $K(v \geq t) := \{x \in K : v(x) \geq t\}$

$K(v \geq t)$ est un corps convexe et $K(v \geq 1/\lambda)$ est *proche* de K_λ .

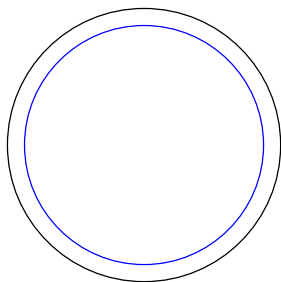


Corps flottant

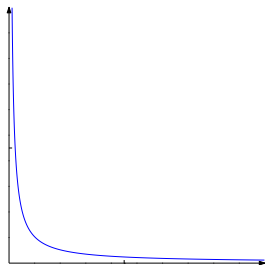
$v(x) := \inf\{\text{Vol}(K \cap H^+) : H^+ \text{ demi-espace contenant } x\}, x \in K$

Corps flottant : $K(v \geq t) := \{x \in K : v(x) \geq t\}$

$K(v \geq t)$ est un corps convexe et $K(v \geq 1/\lambda)$ est *proche* de K_λ .



$$\mathbb{D}(v \geq 1/\lambda) = (1 - f(\lambda))\mathbb{D}$$
$$f(\lambda) \sim c\lambda^{-\frac{2}{3}}$$



Comparaison entre K_λ et le corps flottant

► *Espérance*

Bárány & Larman (1988):

$$c \text{Vol}(K(v \leq 1/\lambda)) \leq \text{Vol}(K) - \mathbb{E}[\text{Vol}(K_\lambda)] \leq C \text{Vol}(K(v \leq 1/\lambda))$$

► *Variance*

Bárány & Reitzner (2010):

$$c\lambda^{-1} \text{Vol}(K(v \leq 1/\lambda)) \leq \text{Var}[\text{Vol}(K_\lambda)]$$

► *Sandwiching*

Bárány & Reitzner (2010b):

$$\mathbb{P}[\partial K_\lambda \not\subset [K(v \geq s) \setminus K(v \geq T)]] = O((\log(\lambda))^{-16})$$

$$s := \frac{c}{\lambda(\log(\lambda))^{17}}, \quad T := c' \frac{\log(\log(\lambda))}{\lambda}$$

Construction du changement d'échelle

Règles du changement d'échelle

- ▶ Une coordonnée de *profondeur* fournie par la famille des corps flottants: $\lambda^{\frac{2}{3}}(1-r)$ pour \mathbb{D} , $\lambda x_1 x_2$ pour $(0, \infty)^2$
- ▶ Une coordonnée *spatiale* sur le corps flottant associé
- ▶ $\Theta(1)$ points par unité de volume après transformation

$$K = \mathbb{D}$$

$$T^\lambda : \begin{cases} \mathbb{D} \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ (r, \theta) & \longmapsto (\lambda^{\frac{1}{3}}\theta, \lambda^{\frac{2}{3}}(1-r)) \end{cases}$$

$$K = (0, \infty)^2$$

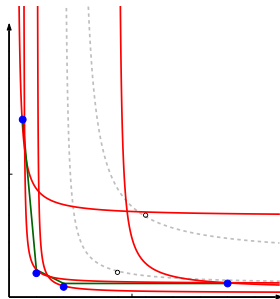
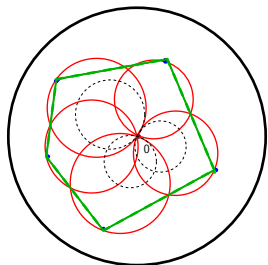
$$T^{(\lambda)} : \begin{cases} (0, \infty)^2 & \longrightarrow L \times \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto (\text{proj}_L((\log(x_1), \log(x_2))), \frac{1}{2} \log(\lambda x_1 x_2)) \end{cases}$$

$$\text{où } L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$$

Caractérisation duale des points extrémaux

Chaque point x engendre un **pétale** $S(x)$ qui est l'ensemble des points de tangence des courbes $K(V = \frac{t}{\lambda})$, $t > 0$, avec les droites contenant x .

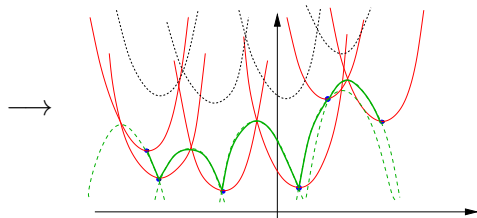
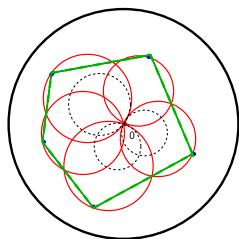
x est extrémal si et seulement si son pétale n'est pas recouvert par les autres pétales.



Effet du changement d'échelle dans \mathbb{D}

$$\Pi^\uparrow := \{(v, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : h \geq \frac{v^2}{2}\}, \quad \Pi^\downarrow := \{(v, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : h \leq -\frac{v^2}{2}\}$$

Frontière de l'enveloppe	Union de portions de paraboles
Pétale	Translaté de $\partial\Pi^\uparrow$
Point extrémal	$(x + \Pi^\uparrow)$ non recouvert
Processus \mathcal{P}_λ	Processus \mathcal{P} d'intensité 1

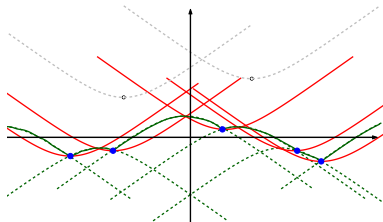
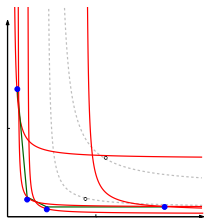


Effet du changement d'échelle dans $(0, \infty)^2$

$$G(v) := \log \left(\operatorname{ch} \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \right) \right), \quad v \in V$$

$$\Pi^\uparrow := \{(v, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : h \geq G(v)\}, \quad \Pi^\downarrow := \{(v, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : h \leq -G(v)\}$$

Frontière de l'enveloppe	Union de portions de pseudo-cônes
Pétale	Translaté de $\partial\Pi^\uparrow$
Point extrémal	$(x + \Pi^\uparrow)$ non recouvert
Processus \mathcal{P}_λ	Processus \mathcal{P} d'intensité $\sqrt{2}e^{2h}dv dh$



Enveloppes convexes aléatoires

Mosaïque de Poisson-Voronoi

- Construction

- Premières questions

- La cellule de Poisson-Voronoi autour d'un point isolé

- Nouveaux résultats : espérances limites

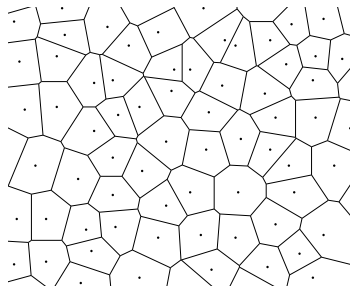
- Problème inverse

Mosaïque de Voronoï

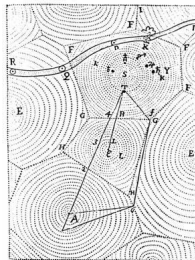
- ▶ χ ensemble localement fini de points de \mathbb{R}^2
- ▶ Pour tout **germe** $x \in \chi$, **cellule** associée

$$C(x|\chi) := \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y - x\| \leq \|y - x'\| \forall x' \in \chi\}$$

- ▶ **Mosaïque de Poisson-Voronoi** : engendrée par un processus de Poisson \mathcal{P}_λ d'intensité λ



Mosaïque de Poisson-Voronoi



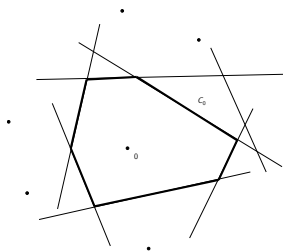
Original de René Descartes, 1644

Premières questions

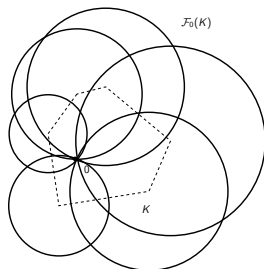
- ▶ Notion de **cellule typique** \mathcal{C} : choisie au hasard uniformément parmi toutes les cellules

$$\mathbb{E}(f(\mathcal{C})) = \frac{1}{\lambda \mathcal{A}(B)} \mathbb{E} \left(\sum_{x \in \mathcal{P}_\lambda \cap B} f(\mathcal{C}(x|\mathcal{P}_\lambda) - x) \right), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

- ▶ **Slivnyak** (1962) : $\mathcal{C} \stackrel{D}{=} \mathcal{C}(0|\mathcal{P}_\lambda \cup \{0\})$
- ▶ Calculs de moments : $\mathbb{E}f_0(\mathcal{C}) = 6$



Appartenir à la zéro-cellule



- ▶ K corps convexe contenant 0 dans son intérieur
- ▶ **Fleur** de K : $\mathcal{F}_0(K) = \bigcup_{x \in K} B(x, \|x\|)$

Deux propriétés

- ▶ Calcul de probabilité : $\mathbb{P}(K \subset C(0|\mathcal{P}_\lambda \cup \{0\})) = e^{-\lambda \mathcal{A}(\mathcal{F}_0(K))}$
- ▶ Loi conditionnelle : $(\mathcal{P}_\lambda | K \subset C(0|\mathcal{P}_\lambda \cup \{0\})) \stackrel{D}{=} \mathcal{P}_\lambda \setminus \mathcal{F}_0(K)$

La cellule de Poisson-Voronoi autour d'un point isolé



- ▶ K corps convexe de \mathbb{R}^2
- ▶ Origine 0 choisie dans $\text{int}(K)$
- ▶ Processus ponctuel $\mathcal{P}'_\lambda \stackrel{D}{=} (\mathcal{P}_\lambda | K \subset C(0 | \mathcal{P}_\lambda \cup \{0\}))$
- ▶ *Problème*. Étude asymptotique de la cellule

$$K^\lambda = C(0 | \mathcal{P}'_\lambda \cup \{0\})$$

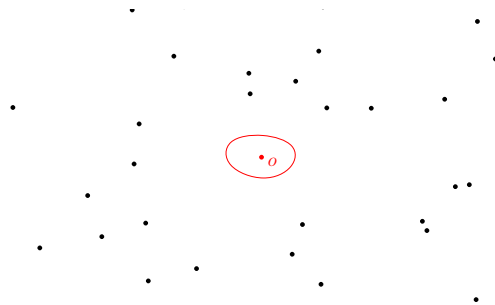
La cellule de Poisson-Voronoi autour d'un point isolé



- ▶ K corps convexe de \mathbb{R}^2
- ▶ Origine 0 choisie dans $\text{int}(K)$
- ▶ Processus ponctuel $\mathcal{P}'_\lambda \stackrel{D}{=} (\mathcal{P}_\lambda | K \subset C(0 | \mathcal{P}_\lambda \cup \{0\}))$
- ▶ *Problème*. Étude asymptotique de la cellule

$$K^\lambda = C(0 | \mathcal{P}'_\lambda \cup \{0\})$$

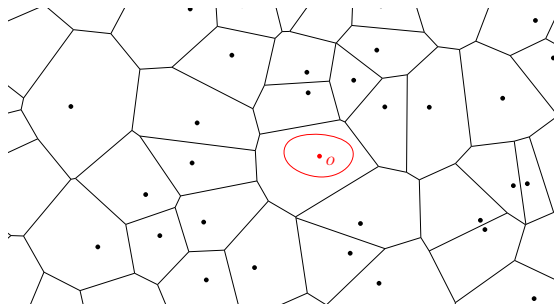
La cellule de Poisson-Voronoi autour d'un point isolé



- ▶ K corps convexe de \mathbb{R}^2
- ▶ Origine 0 choisie dans $\text{int}(K)$
- ▶ Processus ponctuel $\mathcal{P}'_\lambda \stackrel{D}{=} (\mathcal{P}_\lambda | K \subset C(0 | \mathcal{P}_\lambda \cup \{0\}))$
- ▶ *Problème*. Étude asymptotique de la cellule

$$K^\lambda = C(0 | \mathcal{P}'_\lambda \cup \{0\})$$

La cellule de Poisson-Voronoi autour d'un point isolé



- ▶ K corps convexe de \mathbb{R}^2
- ▶ Origine 0 choisie dans $\text{int}(K)$
- ▶ Processus ponctuel $\mathcal{P}'_\lambda \stackrel{D}{=} (\mathcal{P}_\lambda | K \subset C(0 | \mathcal{P}_\lambda \cup \{0\}))$
- ▶ *Problème*. Étude asymptotique de la cellule

$$K^\lambda = C(0 | \mathcal{P}'_\lambda \cup \{0\})$$

Motivations

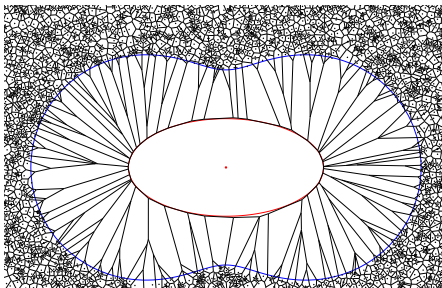
- ▶ Effet provoqué par une inhomogénéité
- ▶ Approximation d'un corps convexe K par l'extérieur
- ▶ Les grandes cellules d'une mosaïque de Poisson-Voronoi sont *proches* de la forme circulaire.

D. Hug, M. Reitzner & R. Schneider (2004)

Nouveaux résultats : espérances limites, cas lisse

$\mathcal{A}(\cdot)$: aire, $\mathcal{U}(\cdot)$: périmètre, $f_0(\cdot)$: nombre de sommets

r_s : rayon de courbure, n_s : vecteur normal unitaire sortant en $s \in \partial K$



$$\mathbb{E}(\mathcal{A}(K^\lambda)) - \mathcal{A}(K) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{-\frac{2}{3}} 2^{-2} 3^{-\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \int_{\partial K} r_s^{\frac{1}{3}} \langle s, n_s \rangle^{-\frac{2}{3}} ds$$

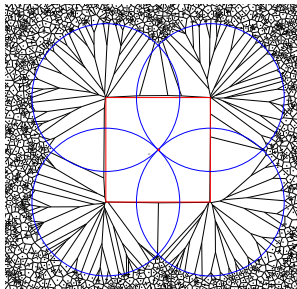
$$\mathbb{E}(\mathcal{U}(K^\lambda)) - \mathcal{U}(K) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{-\frac{2}{3}} 3^{-\frac{4}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \int_{\partial K} r_s^{-\frac{2}{3}} \langle s, n_s \rangle^{-\frac{2}{3}} ds$$

$$\mathbb{E}(f_0(K^\lambda)) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{\frac{1}{3}} 2^2 3^{-\frac{4}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \int_{\partial K} r_s^{-\frac{2}{3}} \langle s, n_s \rangle^{\frac{1}{3}} ds$$

Nouveaux résultats : espérances limites, cas polygonal

$\mathcal{A}(\cdot)$: aire, $\mathcal{U}(\cdot)$: périmètre, $f_0(\cdot)$: nombre de sommets

n_K : nombre de sommets de K , $\{a_i\}$: sommets de K , o_i : projection de 0 sur (a_i, a_{i+1})

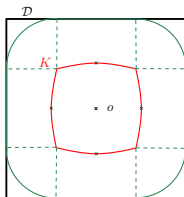


$$\mathbb{E}(\mathcal{A}(K^\lambda)) - \mathcal{A}(K) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{9}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^{n_K} \|o_i\|^{-\frac{1}{2}} \|a_{i+1} - a_i\|^{\frac{3}{2}}$$

$$\mathbb{E}(\mathcal{U}(K^\lambda)) - \mathcal{U}(K) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} (\lambda^{-1} \log \lambda) \cdot 2^{-1} 3^{-1} \sum_{i=1}^{n_K} \|o_i\|^{-1}$$

$$\mathbb{E}(f_0(K^\lambda)) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} (\log \lambda) \cdot 2 \cdot 3^{-1} n_K.$$

Problème inverse : cellule $\mathcal{C}_\lambda(\mathcal{D}) = C(0|(\mathcal{P}_\lambda \setminus \mathcal{D}) \cup \{0\})$



- ▶ \mathcal{D} domaine fermé, $0 \in \text{int}(\mathcal{D})$
- ▶ $\mathcal{C}_\lambda(\mathcal{D}) = C(0|(\mathcal{P}_\lambda \setminus \mathcal{D}) \cup \{0\})$
- ▶ K : corps convexe tel que $\mathcal{F}_0(K)$ est la plus grande fleur dans \mathcal{D}
- ▶ \mathcal{D}^* : étoilé maximal dans \mathcal{D} , avec équation C^3 par morceaux $d(\cdot)$

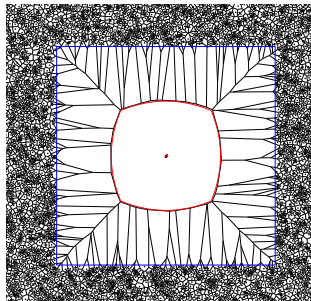
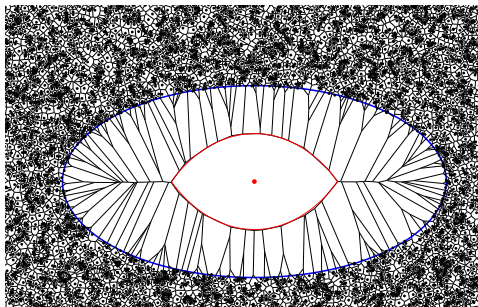
$\mathcal{C}_\lambda(\mathcal{D}) \xrightarrow{\mathbb{P}} K$ pour la métrique de Hausdorff

$$\mathbb{E}(\mathcal{A}(\mathcal{C}_\lambda(\mathcal{D}))) - \mathcal{A}(K) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{-\frac{2}{3}} 2^{-\frac{8}{3}} 3^{-\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \int (d(\theta) + d''(\theta))^{\frac{4}{3}} d(\theta)^{-\frac{2}{3}} d\theta$$

$$\mathbb{E}(\mathcal{U}(\mathcal{C}_\lambda(\mathcal{D}))) - \mathcal{U}(K) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{-\frac{2}{3}} 2^{-\frac{2}{3}} 3^{-\frac{4}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \int (d(\theta) + d''(\theta))^{\frac{1}{3}} d(\theta)^{-\frac{2}{3}} d\theta$$

$$\mathbb{E}(f_0(\mathcal{C}_\lambda(\mathcal{D}))) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{\frac{1}{3}} 2^{-\frac{8}{3}} 3^{-\frac{4}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \int (d(\theta) + d''(\theta))^{\frac{1}{3}} d(\theta)^{\frac{1}{3}} d\theta$$

Problème inverse : cellule $\mathcal{C}_\lambda(\mathcal{D}) = C(0 | (\mathcal{P}_\lambda \setminus \mathcal{D}) \cup \{0\})$



Merci pour votre attention !