

Géométrie Algorithmique

Données, Modèles, Programmes

1. Modèles Géométriques Discrets

Jean-Daniel Boissonnat

Collège de France

29 mars 2017

Géométrie algorithmique

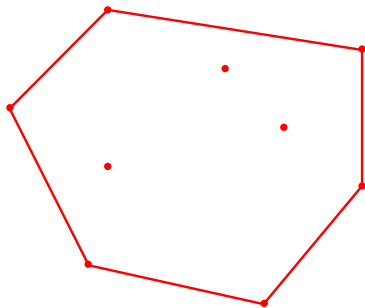
Données, modèles, programmes

- 1 Modèles géométriques discrets
F. Cazals : Modèles géométriques pour la prédiction des interactions macro-moléculaires
- 2 La puissance de l'aléa : algorithmes randomisés
P. Calka : Probabilités géométriques
- 3 Le calcul géométrique
S. Pion : La bibliothèque logicielle CGAL
- 4 Génération de maillages
J-M. Mirebeau : Les deux réductions de Voronoï et leur application aux équations aux dérivées partielles
- 5 Courbes et surfaces
P. Alliez : Reconstruction de surfaces
- 6 Espaces de configurations
A. de Mesmay : Dessin de graphes
- 7 Structures de données géométriques
D. Feldman : Core sets
- 8 Géométrie des données
F. Chazal : Analyse topologique des données

- 1 Enveloppes convexes
- 2 Diagrammes de Voronoï et triangulations de Delaunay
- 3 Molécules et diagrammes affines
- 4 Modèles de croissance et variations algébriques

Calculer l'enveloppe convexe de n points du plan

$$\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$$

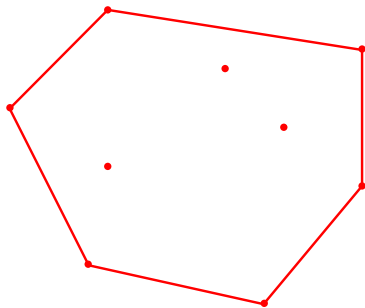


$$\text{conv}(\mathcal{P}) = \left\{ \sum_i^n \lambda_i p_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_i^n \lambda_i = 1 \right\}$$

= { arêtes $[p_i p_j]$ telles que tous les points de \mathcal{P} sont dans un même demi-plan limité par $(p_i p_j)$ }

Calculer l'enveloppe convexe de n points du plan

$$\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$$



$$\text{conv}(\mathcal{P}) = \left\{ \sum_i^n \lambda_i p_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_i^n \lambda_i = 1 \right\}$$

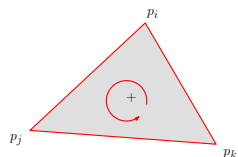
= { arêtes $[p_i p_j]$ telles que tous les points de \mathcal{P} sont dans un même demi-plan limité par $(p_i p_j)$ }

Modèle de calcul

Opérations élémentaires de coût unitaire

- $+$, $-$, \times , $/$
- $<$, \leq , $=$, \geq , $>$
- ...

Prédicat d'orientation



$$\text{Orient}(p_i, p_j, p_k) = \text{signe} \begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \text{signe} ((x_j - x_i)(y_k - y_i) - (y_j - y_i)(x_k - x_i))$$

Analyse de complexité

Compter le nombre d'opérations élémentaires

Borne supérieure

$$g(n) = O(f(n)) \Leftrightarrow \exists C, N, \forall n \geq N, g(n) \leq C f(n)$$

Borne inférieure

$$g(n) = \Omega(f(n)) \Leftrightarrow \exists C', N, \forall n \geq N, g(n) \geq C' f(n)$$

Borne exacte

$$g(n) = \Theta(f(n)) \Leftrightarrow \exists C, C', N, \forall n \geq N, C' f(n) \leq g(n) \leq C f(n)$$

Exemple : Le tri de n nombres par comparaisons :

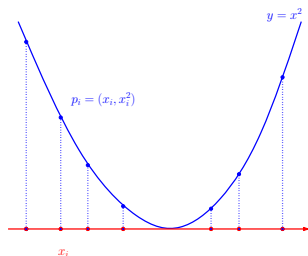
$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

Calcul de l'enveloppe convexe de n points du plan

Entrée : un ensemble \mathcal{P} de n points de \mathbb{R}^2

Sortie : la liste ordonnée dans le sens trigonométrique des sommets de l'enveloppe convexe $\text{conv}(\mathcal{P})$

- Borne inférieure : $\Omega(n \log n)$



$$\text{conv}(\{p_i\}) \implies \text{tri}(\{x_i\})$$

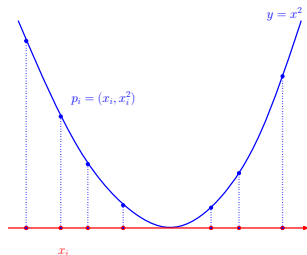
- Borne supérieure naïve : $O(n^3)$

Calcul de l'enveloppe convexe de n points du plan

Entrée : un ensemble \mathcal{P} de n points de \mathbb{R}^2

Sortie : la liste ordonnée dans le sens trigonométrique des sommets de l'enveloppe convexe $\text{conv}(\mathcal{P})$

- Borne inférieure : $\Omega(n \log n)$

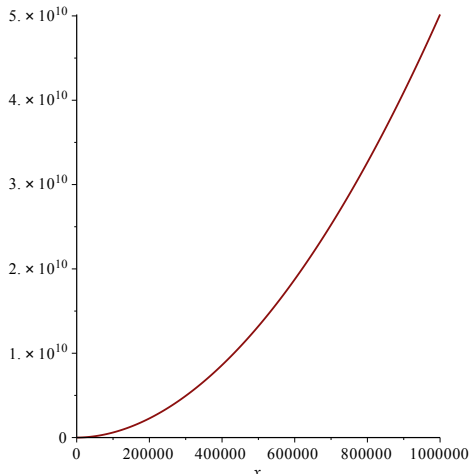


$$\text{conv}(\{p_i\}) \implies \text{tri}(\{x_i\})$$

- Borne supérieure naïve : $O(n^3)$

L'enjeu de la complexité algorithmique

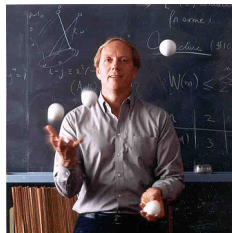
`plot($\frac{x \cdot x}{\log[2](x)}$, x = 10 .. 1000000);`



5×10^{10} secondes = 1585 ans !

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

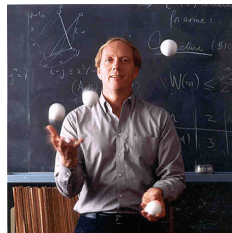
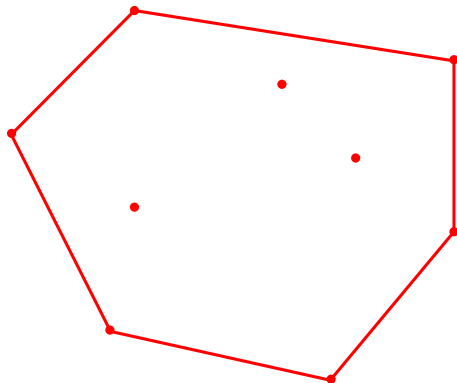


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

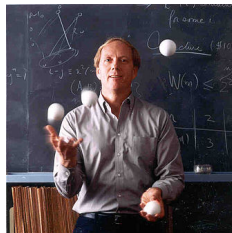
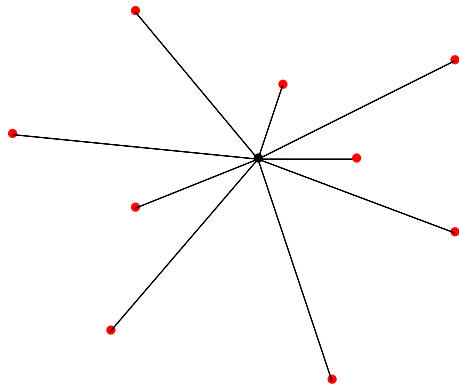


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

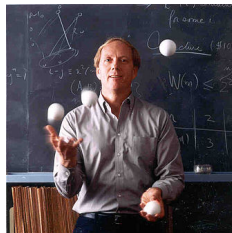
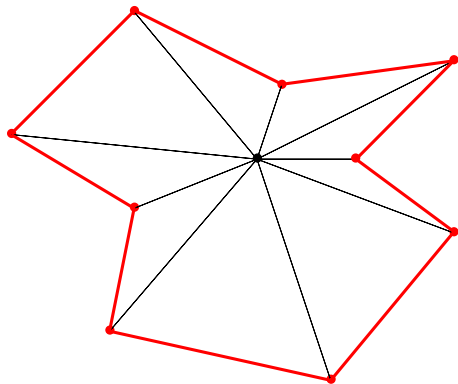


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

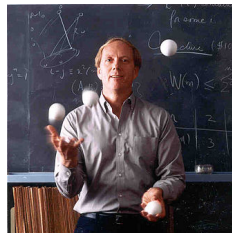
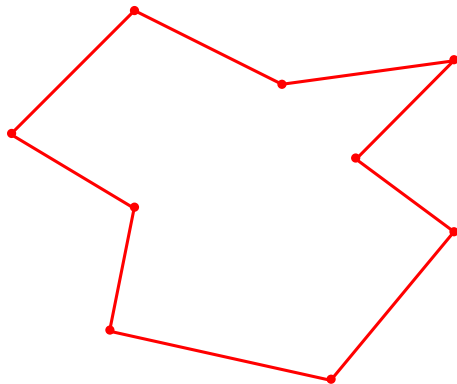


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

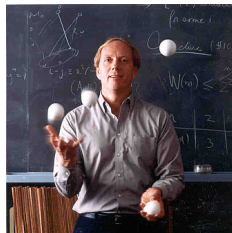
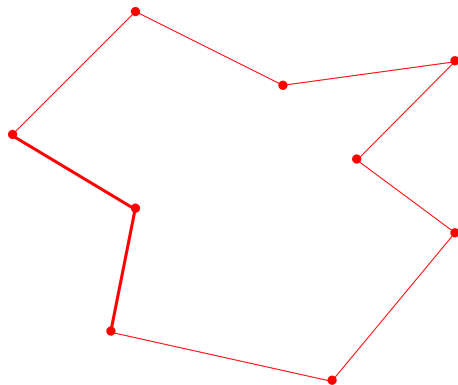


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

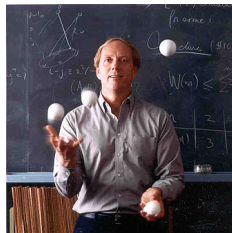
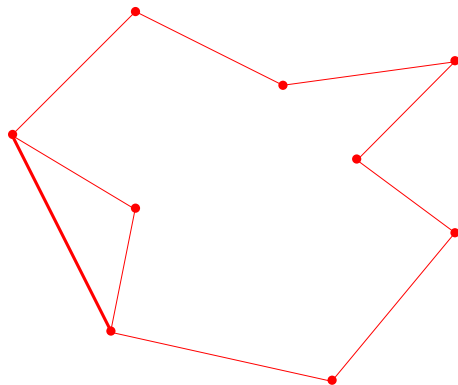


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

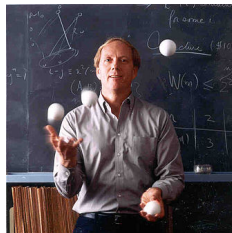
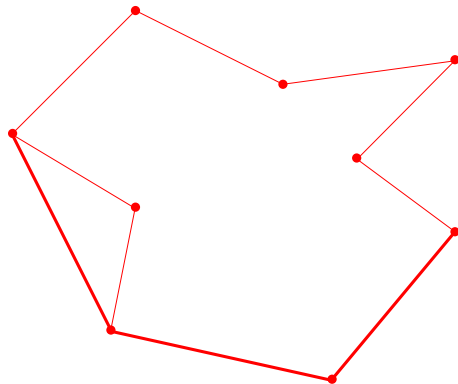


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

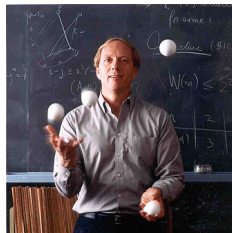
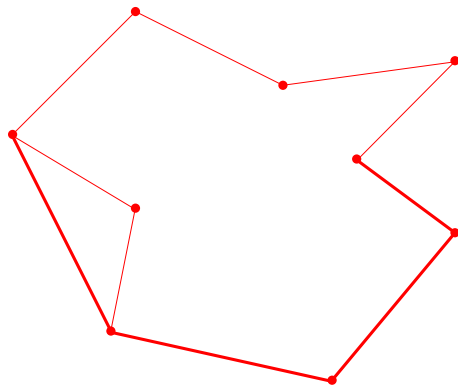


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

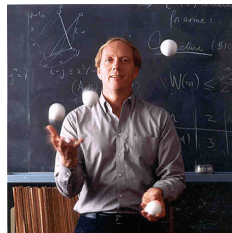
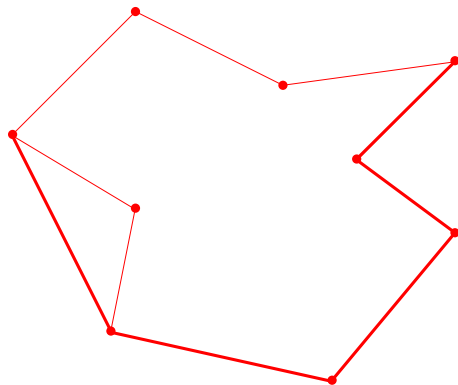


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

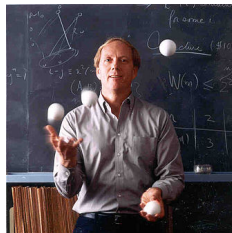
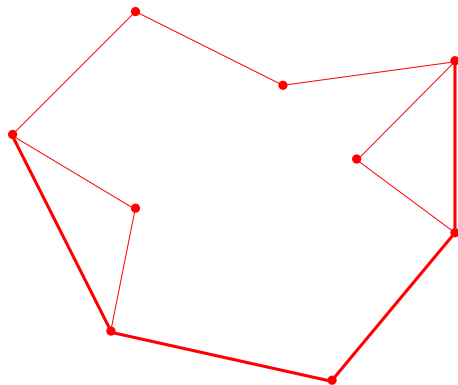


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

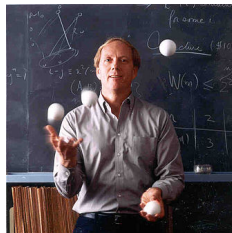
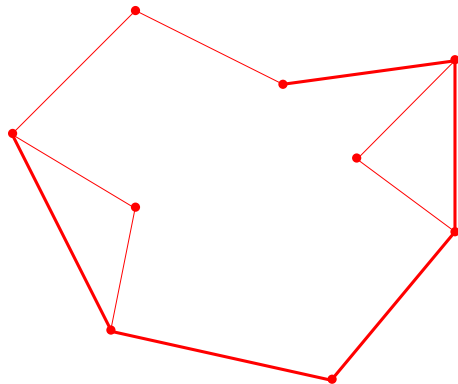


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

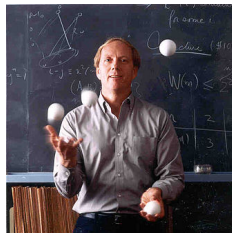
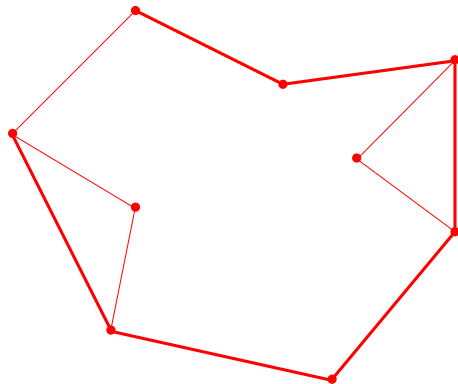


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

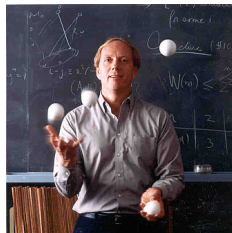
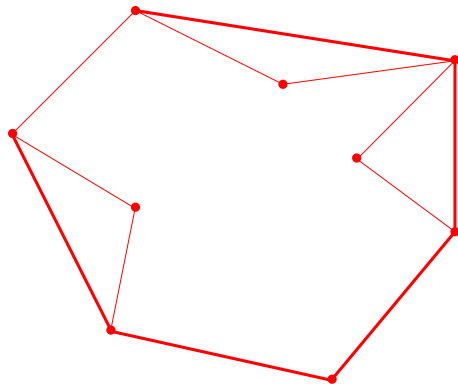


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

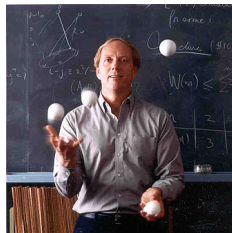
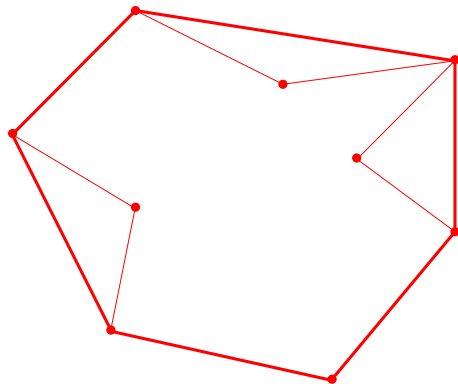


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

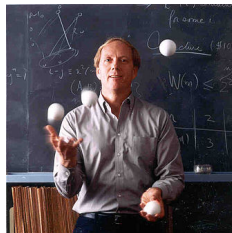
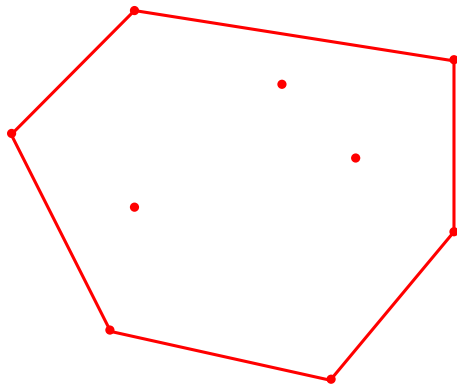


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham

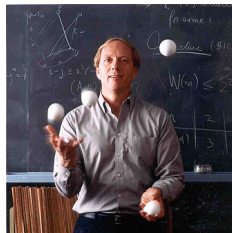
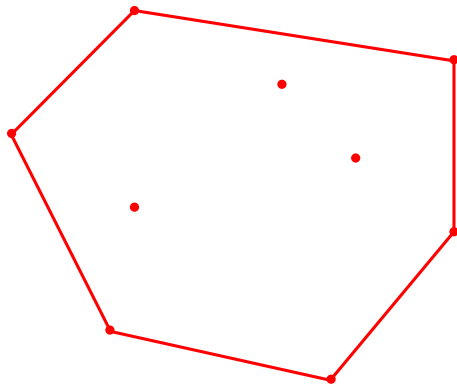


R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

Un algorithme optimal

Algorithme de Graham



R. Graham

$$T(n) = O(n \log n)$$

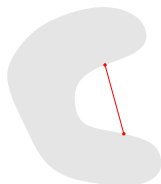
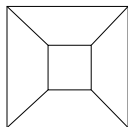
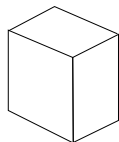
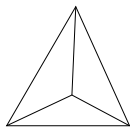
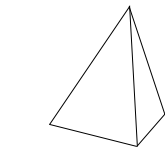
Le cas de la dimension 3

Formule d'Euler pour les polyèdres convexes de dimension 3

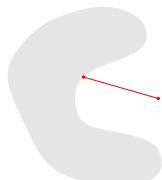
Les nombres de sommets, arêtes et facettes vérifient

$$s - a + f = 2$$

Diagramme de Schlegel



$$\begin{aligned} s &= s' \\ a' &= a + 1 \\ f' &= f + 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} s' &= s + 1 \\ a' &= a + 1 \\ f' &= f + 1 \end{aligned}$$

Enveloppe convexe de n points de \mathbb{R}^3

Complexité combinatoire

Formule d'Euler $\Rightarrow n - a + f \geq 2$

Incidences arêtes-facettes

$$2a \geq 3f \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a &\leq 3n - 6 \\ f &\leq 2n - 4 \end{aligned}$$

avec égalité quand les facettes sont toutes des triangles (position générale)

- Complexité combinatoire $O(n)$
- Complexité algorithmique $O(n \log n)$?

Enveloppe convexe de n points de \mathbb{R}^3

Complexité combinatoire

Formule d'Euler $\Rightarrow n - a + f \geq 2$

Incidences arêtes-facettes

$$2a \geq 3f \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a &\leq 3n - 6 \\ f &\leq 2n - 4 \end{aligned}$$

avec égalité quand les facettes sont toutes des triangles (position générale)

- Complexité combinatoire $O(n)$
- Complexité algorithmique $O(n \log n)$?

Au delà de la dimension 3

Théorème de la borne supérieure

[McMullen 1971]

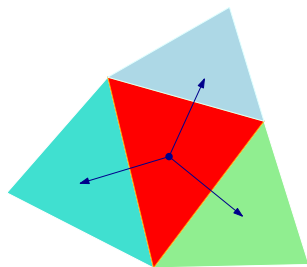
L'enveloppe convexe de n points de \mathbb{R}^d a $\Theta(n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor})$ faces
(de dimensions 0 jusqu'à $d - 1$)

Z : La complexité combinatoire d'une enveloppe convexe varie de
 $d + 1$ à $\Theta(n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor})$

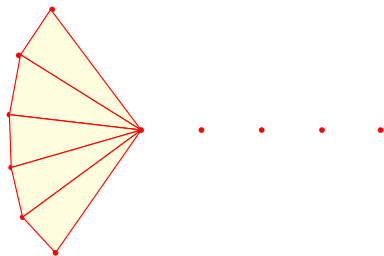
Représentation d'une enveloppe convexe

Graphe d'adjacence des facettes : $GA = (V, E)$

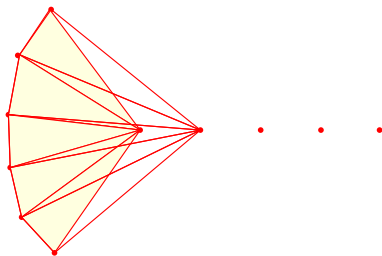
- $V =$ ensemble des facettes
- $(f, f') \in E$ ssi $f \cap f'$ partage une arête



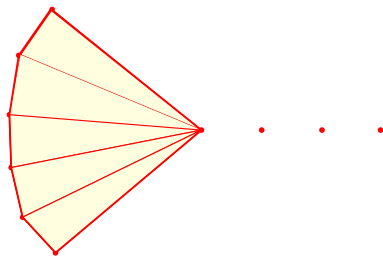
Algorithme incrémental



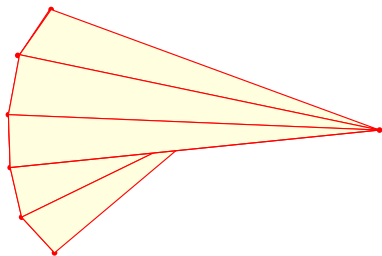
Algorithme incrémental



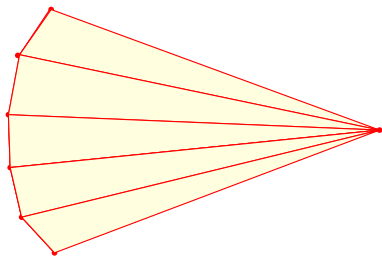
Algorithme incrémental



Algorithme incrémental



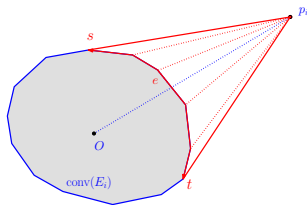
Algorithme incrémental



Algorithme incrémental

\mathcal{P}_{i-1} : ensemble des $i - 1$ premiers points insérés

$\text{conv}(\mathcal{P}_{i-1})$: env. convexe à l'étape i



$f = [p_1, p_2, p_3]$ est une facette rouge ssi son plan support sépare p_i de $\text{conv}(\mathcal{P}_i)$

$$\iff \text{orient}(p_1, p_2, p_3, p_i) \times \text{orient}(p_1, p_2, p_3, O) < 0$$

$$\text{orient}(p_0, p_1, p_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

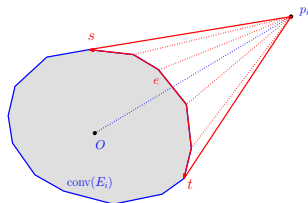
Mise à jour de $\text{conv}(\mathcal{P}_i)$

facette rouge = facette dont le plan support sépare o et p_i

horizon : aêtes partagées par une facette rouge et une facette bleue

Mise à jour de $\text{conv}(\mathcal{P}_i)$:

- 1 Trouver l'ensemble des facettes rouges
- 2 Les supprimer et créer les nouvelles facettes
 $[p_i, g], \forall g \in \text{horizon}$
- 3 Créer les nouvelles adjacences



Complexité

proportionnelle au nombre de facettes rouges créées (ou supprimées)

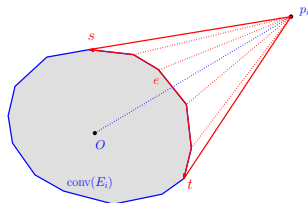
Mise à jour de $\text{conv}(\mathcal{P}_i)$

facette rouge = facette dont le plan support sépare o et p_i

horizon : aêtes partagées par une facette rouge et une facette bleue

Mise à jour de $\text{conv}(\mathcal{P}_i)$:

- 1 Trouver l'ensemble des facettes rouges
- 2 Les supprimer et créer les nouvelles facettes
 $[p_i, g], \forall g \in \text{horizon}$
- 3 Créer les nouvelles adjacences

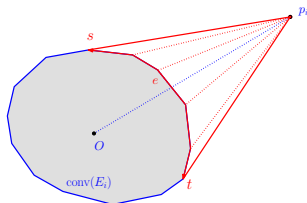


Complexité

proportionnelle au nombre de facettes rouges créées (ou supprimées)

Analyse de complexité

- mise à jour proportionnelle au nombre de facettes rouges
- # nouvelles facettes = $|\text{conv}(i, d-1)| = O(i^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor})$
- localisation rapide : insérer les points dans l'ordre lexicographique et chercher une première facette rouge incidente à p_{i-1} (qui existe nécessairement)

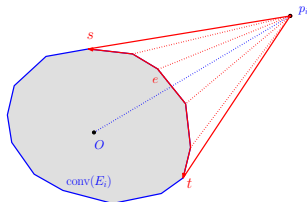


$$\begin{aligned} T(n, d) &= O(n \log n) + O\left(\sum_{i=1}^n i^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}\right) \\ &= O\left(n \log n + n^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor}\right) \end{aligned}$$

Optimal en dimensions paires, quadratique pour $d = 3$

Analyse de complexité

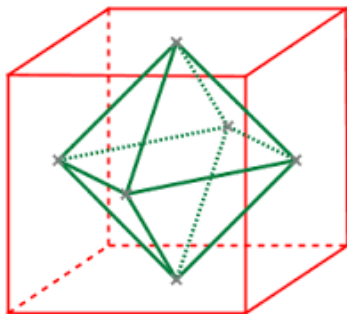
- mise à jour proportionnelle au nombre de facettes rouges
- # nouvelles facettes = $|\text{conv}(i, d - 1)| = O(i^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor})$
- localisation rapide : insérer les points dans l'ordre lexicographique et chercher une première facette rouge incidente à p_{i-1} (qui existe nécessairement)



$$\begin{aligned} T(n, d) &= O(n \log n) + O(\sum_{i=1}^n i^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}) \\ &= O(n \log n + n^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor}) \end{aligned}$$

Optimal en dimensions **paires**, quadratique pour $d = 3$

Dualité entre polyèdres convexes



Bijection $*$ entre les faces qui inverse les relations d'inclusion

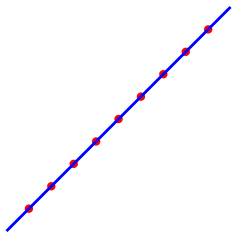
$$f \subset g \Leftrightarrow g^* \subset f^*$$

Espace des droites et dualité

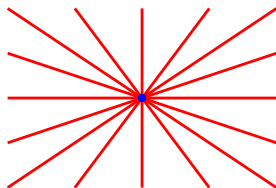
Dualité point/droite non verticale

droite $h = \{(x, y) : y = 2ax - b\} \longrightarrow$ point dual $h^* = (a, b)$

point $p = (x, y) \longrightarrow$ droite duale $p^* = \{(a, b) : y = 2ax - b\}$



Primal



Dual

Se généralise en une dualité **point/hyperplan** en toutes dimensions

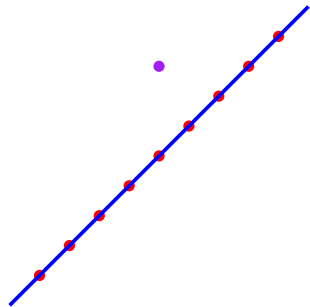
Espace des droites et dualité

Dualité point/droite non verticale

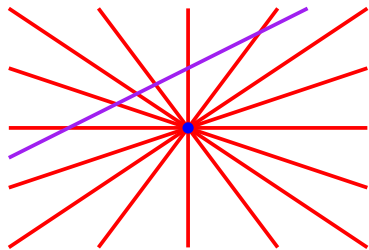
droite $h = \{(x, y) : y = 2ax - b\} \longrightarrow$ point dual $h^* = (a, b)$

point $p = (x, y)$

\longrightarrow droite duale $p^* = \{(a, b) : y = 2ax - b\}$

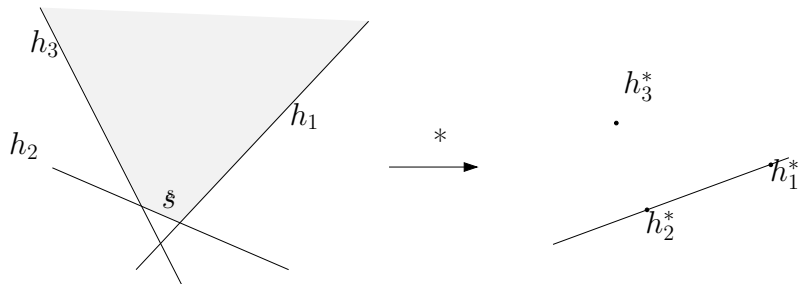


Primal



Dual

Enveloppe convexe et intersection de demi-espaces

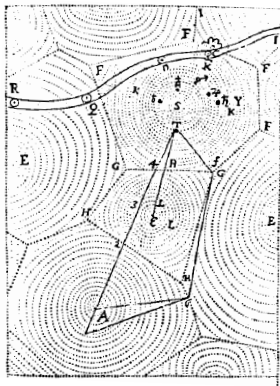
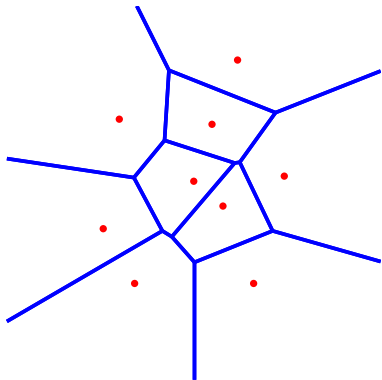


Du point de vue algorithmique, calculer *l'intersection* de n demi-espaces supérieurs de \mathbb{R}^d est équivalent à calculer *l'enveloppe convexe inférieure* de n points de \mathbb{R}^d

- 1 Enveloppes convexes
- 2 Diagrammes de Voronoï et triangulations de Delaunay**
- 3 Molécules et diagrammes affines
- 4 Modèles de croissance et variations algébriques

Diagrammes de Voronoï

Fonction distance et croissance



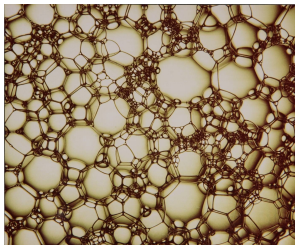
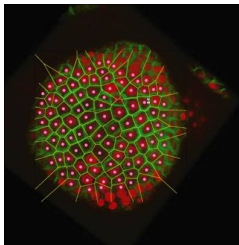
G. Voronoï
(1868-1908)



R. Descartes
(1596-1650)

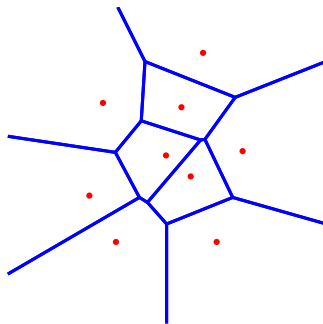
Diagrammes de Voronoï

Diagrammes de Voronoï dans la nature



Diagrammes de Voronoï

Un ensemble \mathcal{P} de n points de \mathbb{R}^d



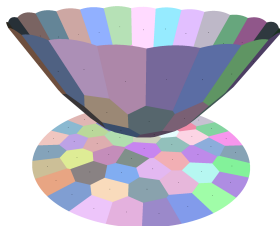
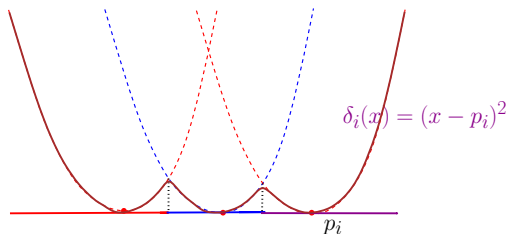
Cellule de Voronoï

$$V(p_i) = \{x : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|, \forall j\}$$

Diagramme de Voronoï (\mathcal{P})

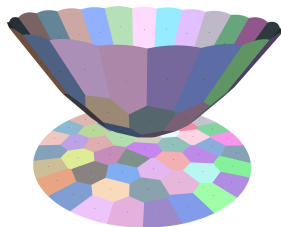
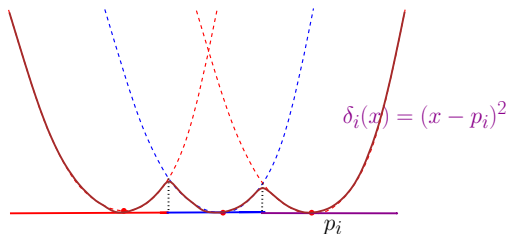
$$= \{ \text{ensemble des cellules } V(p_i), p_i \in \mathcal{P} \}$$

Enveloppes inférieures de fonctions



- $\text{Vor}(p_i) = \{x : \delta_i(x) \leq \delta_j(x), \forall j\}$
- $\text{Vor}(\mathcal{P})$ est la projection de l'enveloppe inférieure des δ_i
= le **diagramme de minimisation** des δ_i
- $\delta_i(x) \leq \delta_j(x) \Leftrightarrow h_{p_i} = p_i \cdot x - p_i^2 \geq h_{p_j} = p_j \cdot x - p_j^2$
- $\text{Vor}(\mathcal{P})$ est la projection de l'enveloppe supérieure des h_{p_i}
= le diagramme de **maximisation** des h_{p_i}

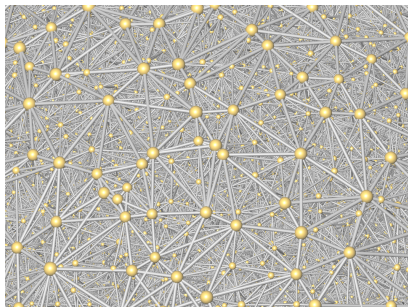
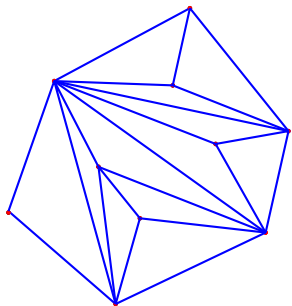
Enveloppes inférieures de fonctions



- $\text{Vor}(p_i) = \{x : \delta_i(x) \leq \delta_j(x), \forall j\}$
- $\text{Vor}(\mathcal{P})$ est la projection de l'enveloppe inférieure des δ_i
= le **diagramme de minimisation** des δ_i
- $\delta_i(x) \leq \delta_j(x) \Leftrightarrow h_{p_i} = p_i \cdot x - p_i^2 \geq h_{p_j} = p_j \cdot x - p_j^2$
- $\text{Vor}(\mathcal{P})$ est la projection de l'enveloppe supérieure des h_{p_i}
= le **diagramme de maximisation** des h_{p_i}

Triangulations d'ensembles finis de points

Assemblage de simplexes

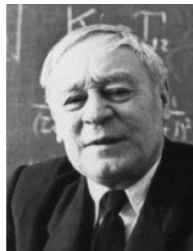
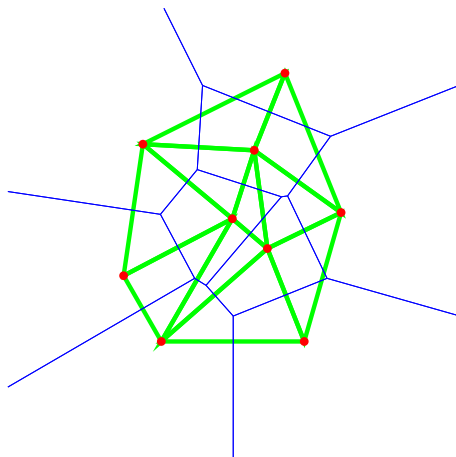


Triangulation de \mathcal{P} : un ensemble maximal de d simplexes tel que

- deux simplexes ne s'intersectent pas ou s'intersectent selon une face commune
- l'union des simplexes = $\text{conv}(\mathcal{P})$

Triangulations de Delaunay

Sur la sphère vide, Boris Delaunay (1934)



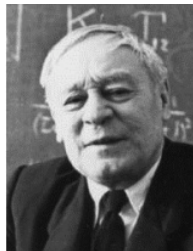
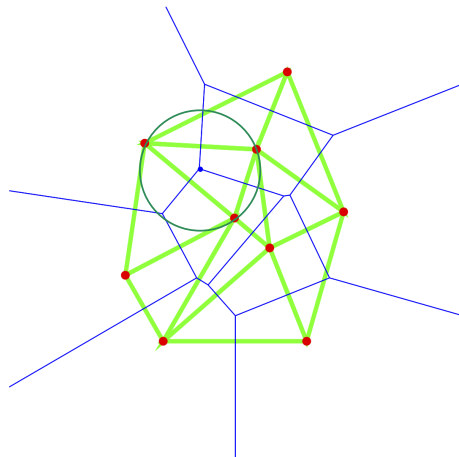
$\text{Del}(\mathcal{P})$ est le **nerf** de $\text{Vor}(\mathcal{P})$

Théorème

Si aucune hypersphère ne contient $d + 2$ points de \mathcal{P} , alors $\text{Del}(\mathcal{P})$ est une triangulation de \mathcal{P}

Triangulations de Delaunay

Sur la sphère vide, Boris Delaunay (1934)



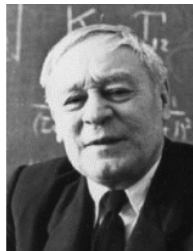
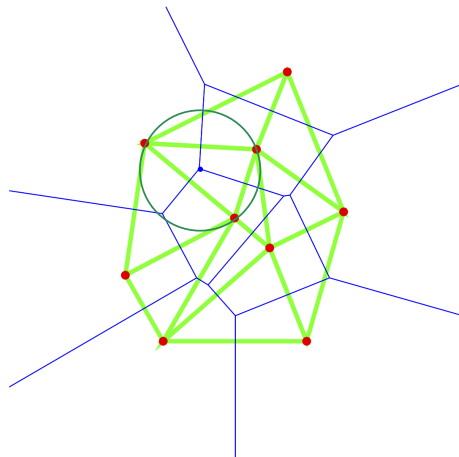
$\text{Del}(\mathcal{P})$ est le **nerf** de $\text{Vor}(\mathcal{P})$

Théorème

Si aucune hypersphère ne contient $d + 2$ points de \mathcal{P} , alors $\text{Del}(\mathcal{P})$ est une triangulation de \mathcal{P}

Triangulations de Delaunay

Sur la sphère vide, Boris Delaunay (1934)



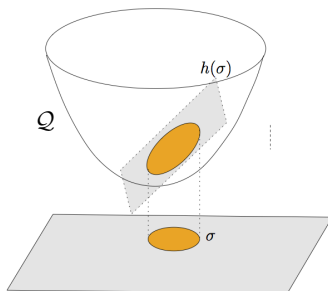
$\text{Del}(\mathcal{P})$ est le **nerf** de $\text{Vor}(\mathcal{P})$

Théorème

Si aucune hypersphère ne contient $d + 2$ points de \mathcal{P} , alors $\text{Del}(\mathcal{P})$ est une triangulation de \mathcal{P}

Démonstration du théorème de Delaunay

Linéarisation



σ hypersphère d'équation $\sigma(x) = 0$

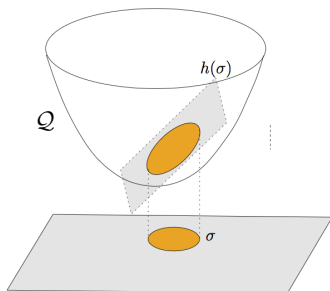
$$\sigma(x) = x^2 - 2c \cdot x + s, \quad s = c^2 - r^2$$

$$\sigma(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z < 2c \cdot x - s & (h_\sigma^-) \\ z = x^2 & (Q) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = (x, x^2) \in h_\sigma^-$$

Démonstration du théorème de Delaunay

Linéarisation



σ hypersphère d'équation $\sigma(x) = 0$

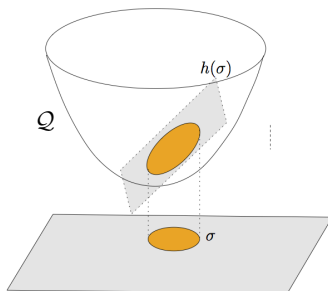
$$\sigma(x) = x^2 - 2c \cdot x + s, \quad s = c^2 - r^2$$

$$\sigma(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z < 2c \cdot x - s & (h_{\sigma}^-) \\ z = x^2 & (Q) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = (x, x^2) \in h_{\sigma}^-$$

Démonstration du théorème de Delaunay

Linéarisation



σ hypersphère d'équation $\sigma(x) = 0$

$$\sigma(x) = x^2 - 2c \cdot x + s, \quad s = c^2 - r^2$$

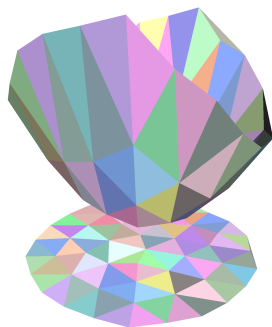
$$\sigma(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z < 2c \cdot x - s & (h_\sigma^-) \\ z = x^2 & (Q) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \hat{x} = (x, x^2) \in h_\sigma^-$$

Démonstration du théorème de Delaunay

Triangulation de Delaunay et enveloppe convexe

\mathcal{P} en position générale pour les sphères $\Leftrightarrow \hat{\mathcal{P}}$ en position générale



σ un simplexe, B_σ sa boule circonscrite

$\sigma \in \text{Del}(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \forall i, p_i \notin B_\sigma$

$\Leftrightarrow \forall i, \hat{p}_i \in h_{S_\sigma}^+$

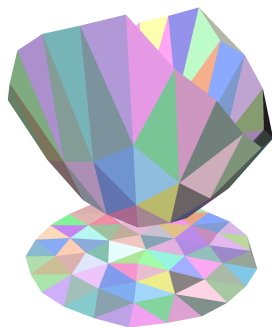
$\Leftrightarrow \hat{\sigma}$ est une face de $\text{conv}^-(\hat{\mathcal{P}})$

$$\text{Del}(\mathcal{P}) = \text{proj}(\text{conv}^-(\hat{\mathcal{P}}))$$

Démonstration du théorème de Delaunay

Triangulation de Delaunay et enveloppe convexe

\mathcal{P} en position générale pour les sphères $\Leftrightarrow \hat{\mathcal{P}}$ en position générale



σ un simplexe, B_σ sa boule circonscrite

$\sigma \in \text{Del}(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \forall i, p_i \notin B_\sigma$

$\Leftrightarrow \forall i, \hat{p}_i \in h_{S_\sigma}^+$

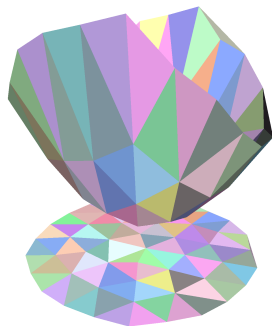
$\Leftrightarrow \hat{\sigma}$ est une face de $\text{conv}^-(\hat{\mathcal{P}})$

$$\text{Del}(\mathcal{P}) = \text{proj}(\text{conv}^-(\hat{\mathcal{P}}))$$

Démonstration du théorème de Delaunay

Triangulation de Delaunay et enveloppe convexe

\mathcal{P} en position générale pour les sphères $\Leftrightarrow \hat{\mathcal{P}}$ en position générale



σ un simplexe, B_σ sa boule circonscrite

$\sigma \in \text{Del}(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \forall i, p_i \notin B_\sigma$

$\Leftrightarrow \forall i, \hat{p}_i \in h_{S_\sigma}^+$

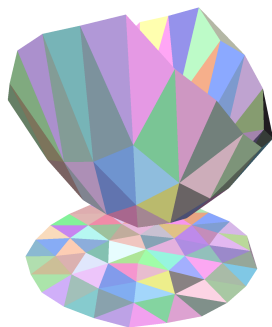
$\Leftrightarrow \hat{\sigma}$ est une face de $\text{conv}^-(\hat{\mathcal{P}})$

$$\text{Del}(\mathcal{P}) = \text{proj}(\text{conv}^-(\hat{\mathcal{P}}))$$

Démonstration du théorème de Delaunay

Triangulation de Delaunay et enveloppe convexe

\mathcal{P} en position générale pour les sphères $\Leftrightarrow \hat{\mathcal{P}}$ en position générale



σ un simplexe, B_σ sa boule circonscrite

$\sigma \in \text{Del}(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \forall i, p_i \notin B_\sigma$

$\Leftrightarrow \forall i, \hat{p}_i \in h_{S_\sigma}^+$

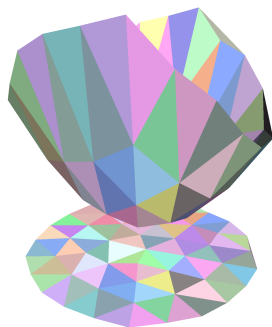
$\Leftrightarrow \hat{\sigma}$ est une face de $\text{conv}^-(\hat{\mathcal{P}})$

$$\text{Del}(\mathcal{P}) = \text{proj}(\text{conv}^-(\hat{\mathcal{P}}))$$

Démonstration du théorème de Delaunay

Triangulation de Delaunay et enveloppe convexe

\mathcal{P} en position générale pour les sphères $\Leftrightarrow \hat{\mathcal{P}}$ en position générale



σ un simplexe, B_σ sa boule circonscrite

$\sigma \in \text{Del}(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \forall i, p_i \notin B_\sigma$

$\Leftrightarrow \forall i, \hat{p}_i \in h_{S_\sigma}^+$

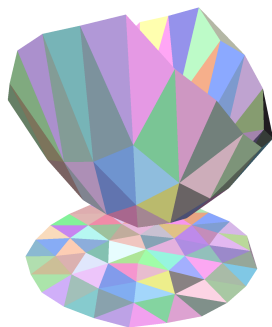
$\Leftrightarrow \hat{\sigma}$ est une face de $\text{conv}^-(\hat{\mathcal{P}})$

$$\text{Del}(\mathcal{P}) = \text{proj}(\text{conv}^-(\hat{\mathcal{P}}))$$

Démonstration du théorème de Delaunay

Triangulation de Delaunay et enveloppe convexe

\mathcal{P} en position générale pour les sphères $\Leftrightarrow \hat{\mathcal{P}}$ en position générale



σ un simplexe, B_σ sa boule circonscrite

$\sigma \in \text{Del}(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \forall i, p_i \notin B_\sigma$

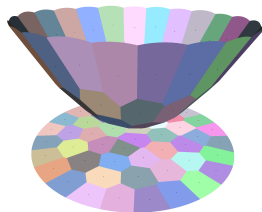
$\Leftrightarrow \forall i, \hat{p}_i \in h_{S_\sigma}^+$

$\Leftrightarrow \hat{\sigma}$ est une face de $\text{conv}^-(\hat{\mathcal{P}})$

$$\text{Del}(\mathcal{P}) = \text{proj}(\text{conv}^-(\hat{\mathcal{P}}))$$

Correspondance entre structures

$$h_{p_i} : x_{d+1} = 2p_i \cdot x - p_i^2$$

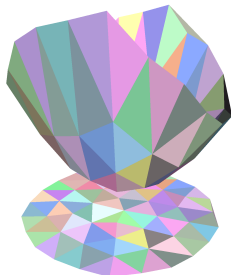


$$\mathcal{V}(\mathcal{P}) = h_{p_1}^+ \cap \dots \cap h_{p_n}^+$$

↑

Diag. de Voronoï de \mathcal{P}

$$\hat{p}_i = (p_i, p_i^2) = h_{p_i}^*$$



$$\mathcal{D}(\mathcal{P}) = \text{conv}^-(\{\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n\})$$

↓

Triang. de Delaunay de \mathcal{P}

dualité
→

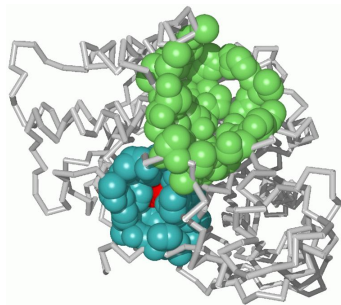
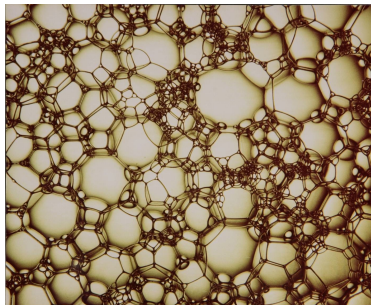
nerf
→

Le diagramme commute si \mathcal{P} est en position générale pour les sphères

- 1 Enveloppes convexes
- 2 Diagrammes de Voronoï et triangulations de Delaunay
- 3 Molécules et diagrammes affines**
- 4 Modèles de croissance et variations algébriques

Mousses et molécules

Diagrammes de sphères et unions de boules



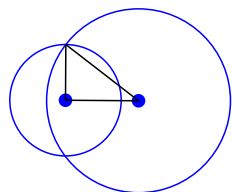
Boules orthogonales

Boule : $b(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|p - x\| \leq r\}$

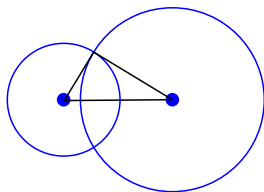
(Hyper)-sphère : $\partial b(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|p - x\| = r\}$

« Distance » entre boules : $D(b_1, b_2) = (p_1 - p_2)^2 - r_1^2 - r_2^2$

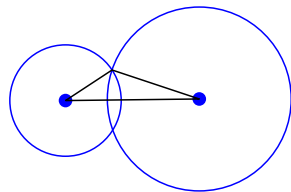
Boules orthogonales : $D(b_1, b_2) = 0$



$$D(b_1, b_2) < 0$$



$$D(b_1, b_2) = 0$$

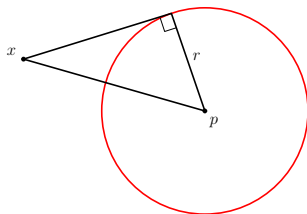


$$D(b_1, b_2) > 0$$

Puissance d'un point par rapport à une boule

Puissance de x par rapport à b : $D(x, b) = (x - p)^2 - r^2$

\mathbb{Z} : D n'est pas une distance



$$x \in \text{int}b \iff D(x, b) < 0$$

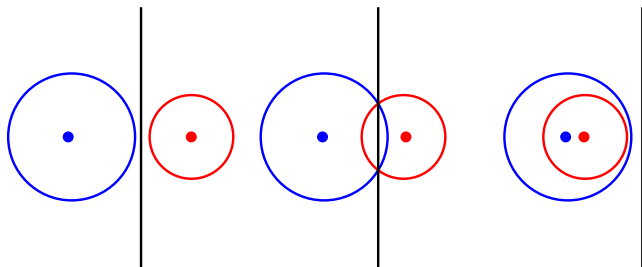
$$x \in \partial b \iff D(x, b) = 0$$

$$x \notin b \iff D(x, b) > 0$$

Hyperplan radical

- L'ensemble des points qui ont même puissance par rapport à deux boules $b_1(p_1, r_1)$ and $b_2(p_2, r_2)$ est un **hyperplan**

$$\begin{aligned}D(x, b_1) = D(x, b_2) &\iff (x - p_1)^2 - r_1^2 = (x - p_2)^2 - r_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} r_x^2 \\ &\iff -2p_1x + p_1^2 - r_1^2 = -2p_2x + p_2^2 - r_2^2 \\ &\iff 2(p_2 - p_1)x + (p_1^2 - r_1^2) - (p_2^2 - r_2^2) = 0\end{aligned}$$

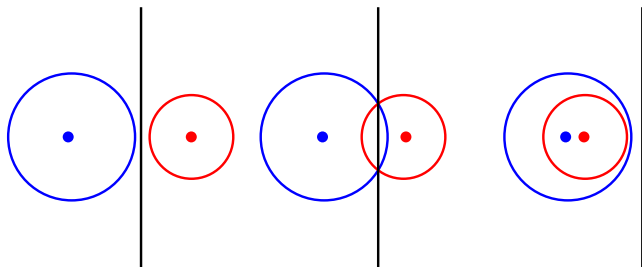


- L'hyperplan radical est l'ensemble des centres x des boules $B(x, r_x)$ orthogonales à b_1 et à b_2

Hyperplan radical

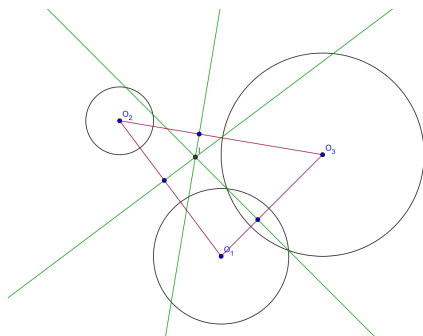
- L'ensemble des points qui ont même puissance par rapport à deux boules $b_1(p_1, r_1)$ and $b_2(p_2, r_2)$ est un **hyperplan**

$$\begin{aligned}D(x, b_1) = D(x, b_2) &\iff (x - p_1)^2 - r_1^2 = (x - p_2)^2 - r_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} r_x^2 \\ &\iff -2p_1x + p_1^2 - r_1^2 = -2p_2x + p_2^2 - r_2^2 \\ &\iff 2(p_2 - p_1)x + (p_1^2 - r_1^2) - (p_2^2 - r_2^2) = 0\end{aligned}$$



- L'hyperplan radical est l'ensemble des centres x des boules $B(x, r_x)$ **orthogonales** à b_1 et à b_2

Centre radical



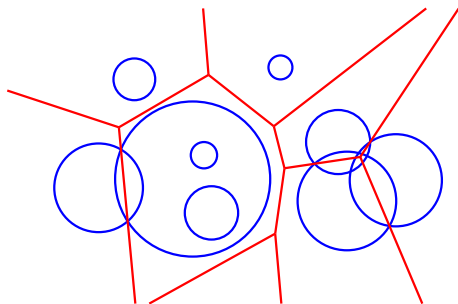
Il existe un **unique** point qui a même puissance par rapport à $d + 1$ boules b_0, \dots, b_d de \mathbb{R}^d

ce point est le centre de l'unique boule orthogonale à b_0, \dots, b_d

Boules en position générale : aucune boule n'est orthogonale à $d + 2$ boules de \mathcal{B}

Diagrammes de Laguerre (de puissance)

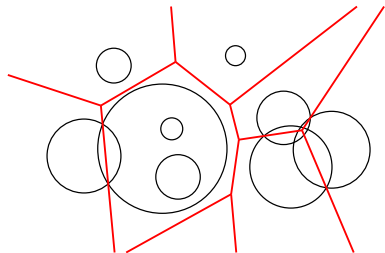
$$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$$



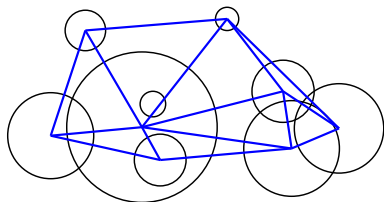
Cellule de Voronoï : $V(b_i) = \{x : D(x, b_i) \leq D(x, b_j) \forall j\}$

Diagramme de Voronoï de \mathcal{B} : = { ensemble des cellules $V(b_i)$, $b_i \in \mathcal{B}$ }

Triangulations de Delaunay de boules



$\text{Vor}(\mathcal{B})$

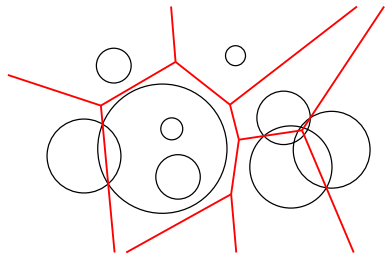


$\text{Del}(\mathcal{B})$ est le **nerf** de $\text{Vor}(\mathcal{B})$

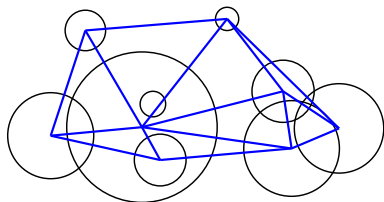
Théorème

Si les boules sont en position générale, alors $\text{Del}(\mathcal{B})$ est une triangulation de $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$

Triangulations de Delaunay de boules



$\text{Vor}(\mathcal{B})$



$\text{Del}(\mathcal{B})$ est le **nerf** de $\text{Vor}(\mathcal{B})$

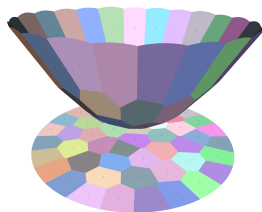
Théorème

Si les boules sont en position générale, alors $\text{Del}(\mathcal{B})$ est une triangulation de $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$

Correspondance entre structures

$$h_{b_i} : x_{d+1} = 2p_i \cdot x - p_i^2 + r_i^2$$

$$\hat{b}_i = (p_i, p_i^2 - r_i^2) = h_{b_i}^*$$



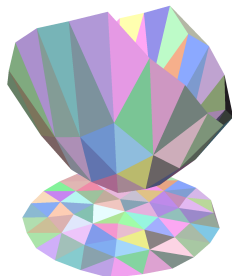
$$\mathcal{V}(\mathcal{B}) = h_{b_1}^+ \cap \dots \cap h_{b_n}^+$$

↑

Diag. de Voronoï de \mathcal{B}

dualité
→

nerf
→



$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \text{conv}^-(\{\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n\})$$

↓

Triang. de Delaunay de \mathcal{B}

Le diagramme commute si \mathcal{B} est en position générale

Diagrammes affines

Sites + fonctions distance tels que les médiateurs sont des hyperplans

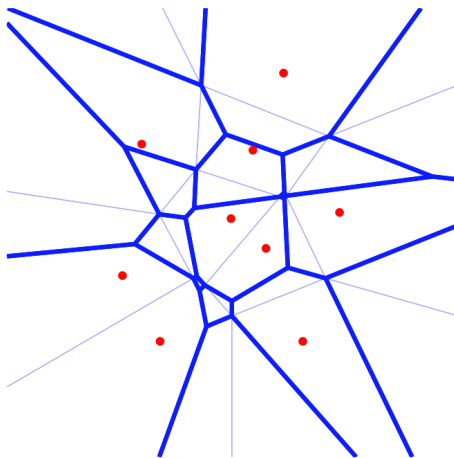
Théorème [Aurenhammer]

Tout diagramme affine de \mathbb{R}^d est le diagramme de Laguerre d'un ensemble de boules de \mathbb{R}^d

Exemple : L'intersection d'un diagramme de Voronoï avec un espace affine est un diagramme de Laguerre

Diagramme de Voronoï d'ordre k

Un exemple de diagramme affine



Chaque cellule est l'ensemble des points qui a les mêmes k plus proches sites

Les diagrammes de Voronoï d'ordre k sont des diagrammes de Laguerre

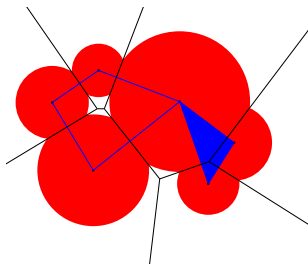
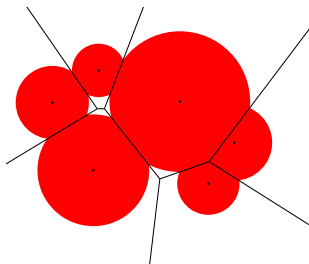
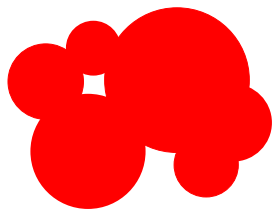
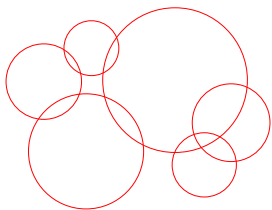
S_1, S_2, \dots les sous-ensembles de k points de \mathcal{P}

$$\begin{aligned}\delta(x, S_i) &= \frac{1}{k} \sum_{p \in S_i} (x - p)^2 \\ &= x^2 - \frac{2}{k} \sum_{p \in S_i} p \cdot x + \frac{1}{k} \sum_{p \in S_i} p^2 \\ &= D(b_i, x)\end{aligned}$$

où b_i est la boule centrée en $c_i = \frac{1}{k} \sum_{p \in S_i} p$ de rayon $r_i^2 = c_i^2 - \frac{1}{k} \sum_{p \in S_i} p^2$

$$x \in \text{Vor}_k(S_i) \Leftrightarrow \delta(x, S_i) \leq \delta(x, S_j) \quad \forall j$$

Triangulation restreinte à une molécule

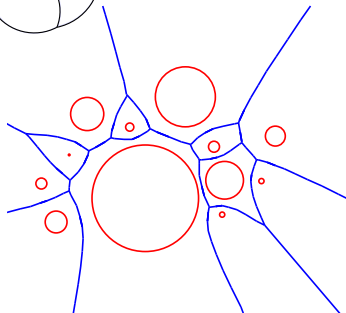
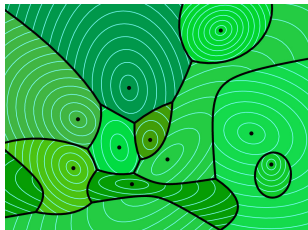
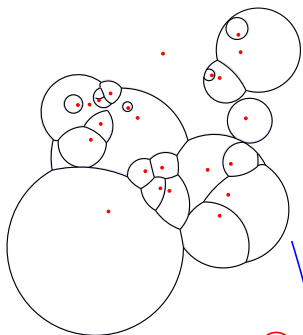


$$C(b) = b \cap V(b) \\ U = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} C(b)$$

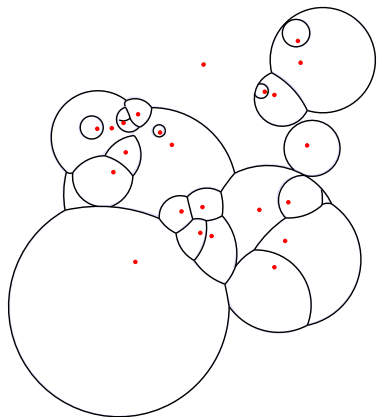
$$\text{Vor}|_U(\mathcal{B}) = \{f \in \text{Vor}(\mathcal{B}), f \cap U \neq \emptyset\} \\ \text{Del}|_U(\mathcal{B})$$

- 1 Enveloppes convexes
- 2 Diagrammes de Voronoï et triangulations de Delaunay
- 3 Molécules et diagrammes affines
- 4 Modèles de croissance et variations algébriques**

Fonctions distance et modèles de croissance



Diagrammes de Möbius



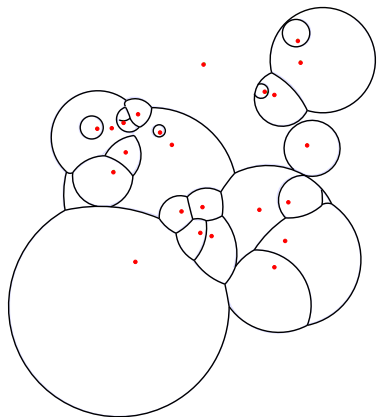
$$W_i = (p_i, \lambda_i, \mu_i)$$

$$\delta_M(x, W_i) = \lambda_i \|x - p_i\|^2 - \mu_i$$

$$\text{Mob}(W_i) = \{x, \delta(x, \sigma_i) \leq \delta(x, \sigma_j)\}$$

Les médiateurs sont des **hypersphères** (hyperplans ou \emptyset)

Diagrammes de Möbius



$$W_i = (p_i, \lambda_i, \mu_i)$$

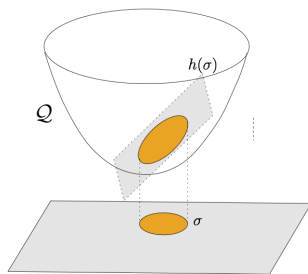
$$\delta_M(x, W_i) = \lambda_i \|x - p_i\|^2 - \mu_i$$

$$\text{Mob}(W_i) = \{x, \delta(x, \sigma_i) \leq \delta(x, \sigma_j)\}$$

Les médiateurs sont des **hypersphères** (hyperplans ou \emptyset)

Linéarisation

Un diagramme de Möbius de \mathbb{R}^d est la restriction d'un diagramme affine de \mathbb{R}^{d+1}



Relever les médiateurs sphériques sur \mathcal{Q} et prendre les hyperplans polaires

Les hyperplans définissent un diagramme affine $\text{Vor}(\mathcal{B})$ dans \mathbb{R}^{d+1}

Les faces du diagramme de Möbius sont les projetés des faces de $\text{Vor}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{Q}$

Corollaires

- 1 *Tout diagramme sphérique (i.e. dont les médiateurs sont des hypersphères) est un diagramme de Möbius*
- 2 *L'ensemble des diagrammes de Möbius est stable par transformation de Möbius*
- 3 *L'intersection d'un diagramme sphérique avec un espace affine est un diagramme sphérique*
- 4 \boxed{Z} : *le nerf d'un diagramme de Möbius a une réalisation dans \mathbb{R}^{d+1} mais n'est pas (en général) une triangulation de \mathbb{R}^d*

Corollaires

- 1 *Tout diagramme sphérique (i.e. dont les médiateurs sont des hypersphères) est un diagramme de Möbius*
- 2 *L'ensemble des diagrammes de Möbius est stable par transformation de Möbius*
- 3 *L'intersection d'un diagramme sphérique avec un espace affine est un diagramme sphérique*
- 4 \boxed{Z} : *le nerf d'un diagramme de Möbius a une réalisation dans \mathbb{R}^{d+1} mais n'est pas (en général) une triangulation de \mathbb{R}^d*

Corollaires

- 1 *Tout diagramme sphérique (i.e. dont les médiateurs sont des hypersphères) est un diagramme de Möbius*
- 2 *L'ensemble des diagrammes de Möbius est stable par transformation de Möbius*
- 3 *L'intersection d'un diagramme sphérique avec un espace affine est un diagramme sphérique*
- 4 Z : *le nerf d'un diagramme de Möbius a une réalisation dans \mathbb{R}^{d+1} mais n'est pas (en général) une triangulation de \mathbb{R}^d*

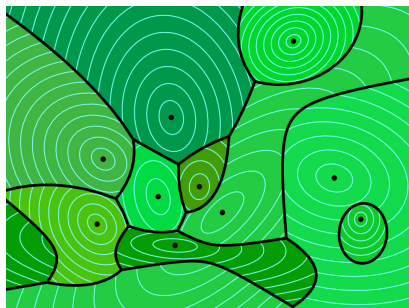
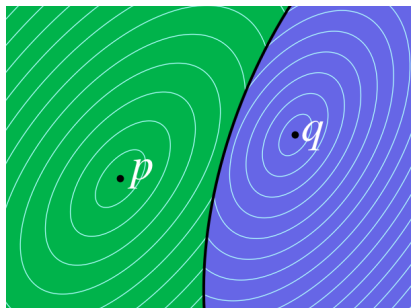
Corollaires

- 1 *Tout diagramme sphérique (i.e. dont les médiateurs sont des hypersphères) est un diagramme de Möbius*
- 2 *L'ensemble des diagrammes de Möbius est stable par transformation de Möbius*
- 3 *L'intersection d'un diagramme sphérique avec un espace affine est un diagramme sphérique*
- 4 \boxed{Z} : *le nerf d'un diagramme de Möbius a une réalisation dans \mathbb{R}^{d+1} mais n'est pas (en général) une triangulation de \mathbb{R}^d*

Diagrammes de Voronoï anisotropes

Métrie en p : M_p : matrice $d \times d$ symétrique, définie positive

$$d_p(x, y) = \sqrt{(x - y)^t M_p (x - y)}$$



[Labelle & Shewchuk 2003]

$$V(p) = \{x : d_p(x, p) \leq d_q(x, q) \text{ for all } p, q \in P\}$$

Linéarisation

A tout point $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on associe les deux points

$$\tilde{\phi}(x) = (x_i x_j, 1 \leq i \leq j \leq d) \in \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$$

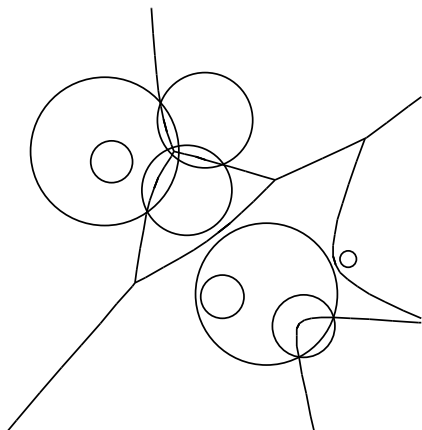
$$\hat{\phi}(x) = (x, \tilde{\phi}(x)) \in \mathbb{R}^D, \quad D = \frac{d(d+3)}{2}$$

et on définit \mathcal{Q} comme la « surface » de dimension d de \mathbb{R}^D

$$\mathcal{Q} = \left\{ \hat{\phi}(x), x \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Théorème : Le diagramme anisotrope de \mathcal{P} est la projection de la restriction du diagramme de Laguerre d'un ensemble de n boules restreint à \mathcal{Q}

Diagrammes d'Apollonius (ou Johnson-Mehl)



$$\sigma_i = (p_i, r_i)$$

$$\delta(x, \sigma_i) = \|x - p_i\| - r_i$$

Les médiateurs sont des nappes
quadratiques

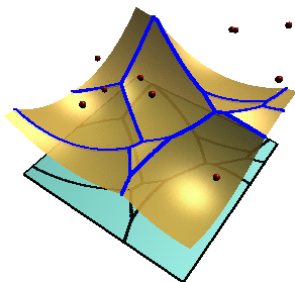
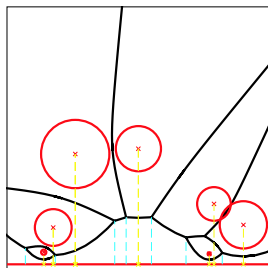
$$\text{Apo}(\sigma_i) = \{x, \delta(x, \sigma_i) \leq \delta(x, \sigma_j)\}$$

Un lien entre diagrammes d'Apollonius et de Möbius

σ_0 un hyperplan de \mathbb{R}^d ($x_d = 0$)

un ensemble fini d'hypersphères $\{\sigma_i = (p_i, \omega_i)\}_{i=1}^n$

$$V(\sigma_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, \sigma_0) \leq d(x, \sigma_i), \forall i\}$$



Lemme de projection

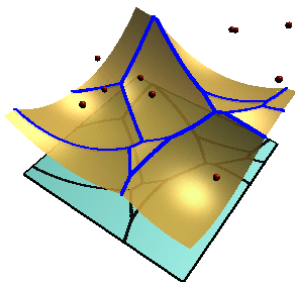
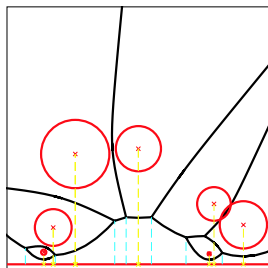
La projection verticale de $\partial V(\sigma_0)$ sur σ_0 est un diagramme de Möbius

Un lien entre diagrammes d'Apollonius et de Möbius

σ_0 un hyperplan de \mathbb{R}^d ($x_d = 0$)

un ensemble fini d'hypersphères $\{\sigma_i = (p_i, \omega_i)\}_{i=1}^n$

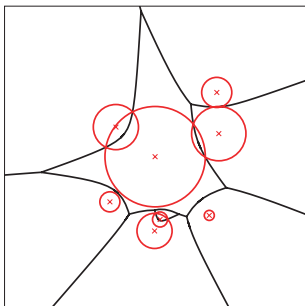
$$V(\sigma_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, \sigma_0) \leq d(x, \sigma_i), \forall i\}$$



Lemme de projection

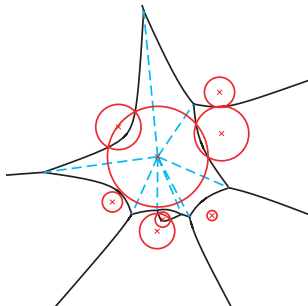
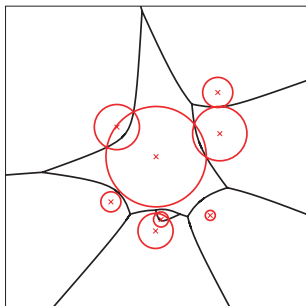
La projection verticale de $\partial V(\sigma_0)$ sur σ_0 est un diagramme de Möbius

Le lemme de projection se généralise à tout ensemble de sphères



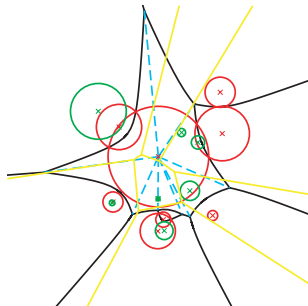
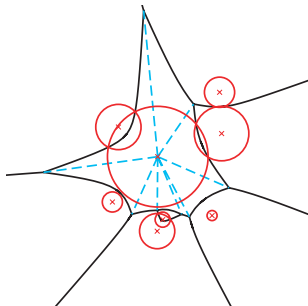
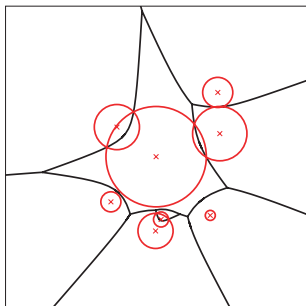
Question ouverte : quelle est la complexité combinatoire d'un diagramme d'Apollonius en dimensions paires > 2 ?

Le lemme de projection se généralise à tout ensemble de sphères



Question ouverte : quelle est la complexité combinatoire d'un diagramme d'Apollonius en dimensions paires > 2 ?

Le lemme de projection se généralise à tout ensemble de sphères



Question ouverte : quelle est la complexité combinatoire d'un diagramme d'Apollonius en dimensions paires > 2 ?

Questions pour la suite du cours

- Algorithmes de construction optimaux
- Complexité combinatoire et algorithmique « en pratique »
- Métriques plus générales
- Triangulation de surfaces