Séminaire BOURBAKI Mars 2004
56ème annéee, 2003-2004, n$^{\text{o}}$ 932

COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ

par **Jean–Pierre SERRE**

1. INTRODUCTION : LE CAS DU GROUPE LINÉAIRE

1.1. Rappels

Soient k un corps commutatif et Γ un groupe. Un Γ-*module* (ou *une représentation linéaire* de Γ) est un k-espace vectoriel V de dimension finie, muni d'une action linéaire de Γ.

On dit que :

(1.1.1) V est *irréductible* (ou *simple*) si $V \neq 0$ et si V ne contient aucun sous-Γ-module distinct de 0 et de V.

(1.1.2) V est *complètement réductible* (ou *semi-simple*) si V est somme directe de Γ-modules irréductibles.

(1.1.3) V est *indécomposable* si $V \neq 0$, et si V n'est pas somme directe de deux sous-Γ-modules $\neq 0$.

[Dans la suite, nous abrégerons en écrivant ir, cr, ind respectivement.]

Les propriétés suivantes sont bien connues :

(1.1.4) V est cr si et seulement si, pour tout sous-module W de V, il existe un sous-module W' de V tel que $V = W \oplus W'$.

(1.1.5) Si V est somme directe de sous-modules V_i, alors V est cr $\Leftrightarrow$ tous les V_i sont cr.

On connaît moins bien les propriétés relatives au produit tensoriel $V \otimes V'$ de deux représentations V et V'. La plupart des cours d'Algèbre se bornent à définir le produit en question, et à en démontrer des propriétés évidentes. Aucun, à ma connaissance, ne signale le résultat très frappant suivant, dû à Chevalley :

Théorème 1.1 ([Ch. 54, p. 88]). — *Supposons k de caractéristique 0. Si V et V' sont des Γ-modules complètement réductibles, leur produit tensoriel $V \otimes V'$ est complètement réductible.*

(Noter que l'on ne fait aucune hypothèse sur le groupe Γ.)

Lorsqu'on veut étendre ce théorème à la caractéristique p (avec des conditions restrictives sur dim V et dim V'), il est utile de disposer d'une notion de *complète réductibilité* dans laquelle le groupe linéaire $\mathbf{GL}(V)$ est remplacé par un groupe réductif quelconque. Cette notion peut se définir, soit en termes de sous-groupes paraboliques, soit en termes d'*immeubles de Tits*. C'est ce que nous allons faire. Les §§ 2,3 contiennent les énoncés généraux, et les §§ 4,5 donnent des critères plus précis, ainsi que diverses applications.

1.2. Exemple: l'immeuble de $\mathbf{GL}(V)$

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie n. On supposera $n \geq 2$ (sinon, l'immeuble correspondant est vide).

1.2.1. *Définition.* L'immeuble de $\mathbf{GL}(V)$, appelé aussi immeuble de V, est un complexe simplicial $X = X(V)$, de dimension $n-2$, qui est défini de la manière suivante :

– les sommets de X sont les sous-espaces vectoriels de V distincts de 0 et de V. (Si W est un tel sous-espace, on note x_W le sommet correspondant.)

– un ensemble s de sommets de X est un simplexe de X si et seulement si les sous-espaces vectoriels correspondants forment un drapeau, i.e. une filtration strictement croissante de V. [Si l'on préfère la géométrie projective à la géométrie affine, on peut aussi voir les sommets de X comme les sous-variétés projectives de l'espace projectif $\mathbf{P}(V)$, distinctes de $\varnothing$ et de $\mathbf{P}(V)$.]

1.2.2. *Type.* Si $x = x_W$ est un sommet de X, on note type(x) la dimension de l'espace vectoriel W. L'ensemble des types de sommets est l'ensemble $\{1, \ldots, n-1\}$.

1.2.3. *Opposition.* Deux sommets $x = x_W$ et $x' = x_{W'}$ sont dits *opposés* si V est somme directe de W et W' ; leurs types se correspondent par l'involution $t \mapsto n-t$ de $\{1, \ldots, n-1\}$. Deux simplexes sont *opposés* si tout sommet de l'un est opposé à un sommet de l'autre. En termes de filtrations, cela correspond à la notion usuelle de *filtrations opposées*.

1.2.4. *Sous-groupes paraboliques.* Les sous-groupes paraboliques de $\mathbf{GL}(V)$ sont les stabilisateurs des drapeaux de V. Les sous-groupes paraboliques *propres* (i.e. distincts de $\mathbf{GL}(V)$) correspondent donc aux simplexes non vides de l'immeuble X ; les paraboliques maximaux correspondent aux sommets de X et le simplexe $\varnothing$ au groupe $\mathbf{GL}(V)$. Deux simplexes s et s', correspondant aux paraboliques P et P', sont opposés au sens du n° 1.2.3 si et seulement si P et P' sont opposés au sens usuel du terme, c'est-à-dire si $P \cap P'$ est un sous-groupe de Levi de chacun d'eux, cf. [BT 65, 4.8].

1.2.5. *Appartements.* Soit T un tore déployé maximal de $\mathbf{GL}(V)$. L'action de T sur V décompose V en somme directe de droites D_i. Si, dans la définition de X, on se restreint aux W qui sont sommes directes de certaines des D_i, on obtient un sous-complexe C de X qui est isomorphe au *complexe de Coxeter* du groupe symétrique S_n. D'un point de vue combinatoire, c'est la subdivision barycentrique du bord d'un $(n-1)$-simplexe ;

topologiquement, c'est une sphère de dimension $n-2$. Un sous-complexe de X obtenu de cette façon est appelé un *appartement* de X. Par construction, les appartements correspondent aux tores déployés maximaux de $\mathbf{GL}(V)$.

1.2.6. *Exemple.* Prenons $n = 3$. L'immeuble correspondant est un *graphe*, qui a deux types de sommets : ceux qui correspondent aux points de $\mathbf{P}_2$ et ceux qui correspondent aux droites. Deux sommets sont voisins (i.e. sont les extrémités d'une arête) si et seulement si ils correspondent à un point situé sur une droite : la relation de voisinage est la relation d'incidence. Les appartements sont les hexagones a-B-c-A-b-C-a associés aux triangles ABC, de côtés de côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$: la théorie de Tits transforme triangles en hexagones !

1.3. **Traductions immobilières : le cas de $\mathbf{GL}(V)$**

Si V est un Γ-module, le groupe Γ opère de façon naturelle sur l'immeuble $X = X(V)$ du no 1.2. Cette action respecte les types (au sens du n° 1.2.2). En particulier, si un simplexe s de X est stable par Γ, il est fixé par Γ. Si P est le sous-groupe parabolique correspondant à s, P est normalisé par Γ, i.e. contient Γ (puisqu'un parabolique est son propre normalisateur). Le sous-espace X^Γ des points fixes de Γ est un *sous-complexe simplicial* de X, et les définitions du n° 1.1 se traduisent de la façon suivante :

(1.3.1) V est *irréductible* $\Leftrightarrow$ $X^\Gamma = \varnothing$ $\Leftrightarrow$ Γ n'est contenu dans aucun sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{GL}(V)$.

(1.3.2) V est *complètement réductible* $\Leftrightarrow$ pour tout sommet x de X^Γ il existe un sommet x' de X^Γ qui est opposé à x (cf. 1.2.3) $\Leftrightarrow$ pour tout parabolique maximal P contenant Γ, il existe un parabolique P' opposé à P qui contient Γ.

(1.3.3) V est *indécomposable* $\Leftrightarrow$ X^Γ ne contient aucun couple de sommets opposés $\Leftrightarrow$ Il n'existe pas de couple (P, P') de paraboliques propres de $\mathbf{GL}(V)$ qui soient opposés et contiennent tous deux Γ.

Il n'est pas difficile de montrer que (1.3.2) équivaut à :

(1.3.2$'$) pour tout simplexe s de X^Γ, il existe un simplexe s' de X^Γ qui est opposé à s $\Leftrightarrow$ pour tout parabolique P (maximal ou pas) contenant Γ, il existe un parabolique opposé à P qui contient Γ.

2. LA COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ DANS LES IMMEUBLES SPHÉRIQUES

2.1. **Immeubles sphériques**

Un immeuble sphérique est un complexe simplicial X, muni d'une famille de sous-complexes appelés *appartements*. Je renvoie à [Ti 74] pour la liste des axiomes ; voir aussi [Br 89], [Ron 89] et [TW 02, § 40]. Voici quelques-unes des propriétés de ces immeubles :

2.1.1. *Dimension et rang.* Le complexe X est de dimension finie. L'entier $r = \dim(X)+1$ est appelé le *rang* de X. Lorsque $X = \varnothing$, on convient que $\dim(X) = -1$, de sorte que $r = 0$. Tout simplexe maximal est de dimension $\dim(X)$.

2.1.2. *Types des sommets.* Il y a une application naturelle type : $\mathrm{som}(X) \to I$, où I est un ensemble fini à r éléments, dont la restriction à $\mathrm{som}(s)$ est injective quel que soit le simplexe s. On dit qu'un automorphisme f de X *préserve les types* si type $\circ f =$ type.

2.1.3. *Appartements.* Un appartement est isomorphe au complexe de Coxeter d'un groupe de Coxeter fini, qui ne dépend que de X ; c'est une sphère de dimension $r-1$. Deux simplexes quelconques sont contenus dans un appartement.

2.1.4. *Opposition et géodésiques.* Soient x et y deux points de X (c'est-à-dire de sa réalisation géométrique), et soit A un appartement les contenant. On dit que x et y sont *opposés* dans X s'ils le sont dans A (ce qui a un sens puisque A est un complexe de Coxeter) ; cela ne dépend pas du choix de A. Deux simplexes sont dits opposés si chaque sommet de l'un est opposé d'un sommet de l'autre. Si x et y ne sont pas opposés, il y a une unique géodésique xy qui les joint dans A. Elle est indépendante (paramétrisation comprise) du choix de A.

2.1.5. *Convexité.* Une partie Y de X est dite *convexe*, si l'on a $xy \subset Y$ pour tout couple de points x, y de Y, non opposés. On dit que Y est *strictement convexe* si Y est convexe et ne contient aucun couple de points opposés (c'est la notion de «convexité» de [Ti 74] et de [Mu 65]).

2.1.6. *Sphères de Levi.* Une sphère de Levi est un sous-complexe S de X, qui est contenue dans un appartement A, et qui est l'intersection de A (vu comme sphère) avec un sous-espace vectoriel.

2.1.7. *Remarque.* Ces définitions se présentent de façon un peu plus naturelle si l'on introduit l'immeuble vectoriel X^{vect} associé à X, dans lequel les points de X sont remplacés par des demi-droites, ayant en commun un point «0» (cf. [Rou 78]). Les appartements deviennent alors des espaces vectoriels de dimension r, et les sphères de Levi des sous-espaces vectoriels définis par l'annulation de certaines racines. Si x et y sont deux points de X^{vect}, leur somme $x+y$ a un sens, et l'on a

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

pourvu que x, y et z appartiennent à un même appartement. Deux points x et x' sont opposés si $x + x' = 0$. Une partie de X est convexe si le cône correspondant de X^{vect} est stable par $(x, y) \mapsto x + y$, autrement dit si son intersection avec tout appartement est un cône convexe au sens usuel du terme.

2.1.8. *Immeuble réduit.* Soit s un simplexe de X de dimension m. On note X_s, ou $St(s)$, l'immeuble réduit de X en s, cf. [Ti 74]). Rappelons que les simplexes de X_s de dimension d correspondent bijectivement aux simplexes de X contenant s de dimension $d+m+1$ (de sorte que le simplexe vide de X_s correspond à s). Si Y est un sous-complexe de X, les simplexes de Y contenant s définissent un sous-complexe Y_s de X_s ; si Y est convexe, il en est de même de Y_s.

Soit S une sphère de Levi, et soient s et s' deux simplexes de S de dimension maximale. Il y a un isomorphisme canonique proj : $X_s \to X_{s'}$ (défini dans [Ti 74, §,3.19]). Ces isomorphismes satisfont à la condition de transitivité usuelle, ce qui permet d'écrire X_S à la place de X_s. L'immeuble X_S peut être appelé *l'immeuble* de S.

2.2. **Complète réductibilité et contractibilité**

2.2.1. *Définition.* Une partie Y de X est dite *complètement réductible* (en abrégé : X-cr, ou simplement cr) si elle est convexe, et si, pour tout point $y \in Y$, il existe $y' \in Y$ qui est opposé à y.

Dans la suite, nous nous intéresserons surtout au cas où Y est un sous-complexe convexe de X (ou, parfois, de sa subdivision barycentrique) ; dans ce cas, la condition cr équivaut à dire que, pour tout simplexe s de Y, il existe un simplexe s' de Y qui est opposé à s (il suffit même que tout sommet de Y ait un opposé dans Y, cf. th. 2.2 ci-dessous).

2.2.2. Nous allons maintenant donner un critère topologique permettant de reconnaître si un sous-complexe convexe est cr. Précisons que nous munissons X de la topologie limite inductive : une partie de X est ouverte si ses intersections avec les sous-complexes finis de X le sont. (Une autre topologie est souvent utile : celle définie par la distance angulaire ; elle n'interviendra pas ici.)

Rappelons d'autre part qu'un espace est *contractile* s'il a le type d'homotopie d'un point ; un espace discret est contractile si et seulement si son cardinal est égal à 1 (l'ensemble vide n'est pas contractile !).

THÉORÈME 2.1. — *Soit Y un sous-complexe convexe de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) Y *est* X-cr.

(b) Y *contient un couple* (s, s') *de simplexes opposés ayant même dimension que* Y.

(c) Y *contient une sphère de Levi* S *de dimension* $\dim(Y)$.

(d) Y *n'est pas contractile.*

Démonstration.— (a) $\Rightarrow$ (b) est clair.

(b) $\Rightarrow$ (c) : le plus petit sous-complexe convexe $C(s, s')$ contenant s et s' est une sphère de Levi.

(c) $\Rightarrow$ (d) : la sphère S définit un cycle dans Y qui n'est pas homologue à 0 puisqu'il est de même dimension que Y (ceci ne vaut que si $\dim(Y) \geq 1$, mais le cas $\dim(Y) \leq 0$ est immédiat).

(d) $\Rightarrow$ (a) : si Y n'est pas cr, il existe un point $y \in Y$ qui n'a pas d'opposé dans Y, et l'on contracte Y grâce aux géodésiques issues de y.

Théorème 2.2. — *Les conditions* (*a*), ..., (*d*) *du th.* 2.1 *sont équivalentes à* :

(e) *Pour tout sommet x de Y, il existe un sommet x' de Y qui est opposé à x.*

La démonstration sera donnée au n° 2.2.5 ci-dessous.

2.2.3. *Remarques.* 1) Un résultat analogue au th. 2.1 vaut pour les sous-complexes convexes de la subdivision barycentrique de X, à condition d'utiliser d'autres sphères que les sphères de Levi.

2) Supposons que Y soit cr, et non vide. On peut préciser sa structure topologique de la façon suivante :

Choisissons un simplexe s de Y de dimension maximum, et soit $U(s)$ l'ensemble des simplexes de Y qui sont opposés à s. Si $t \in U(s)$, soit $S_t = C(s,t)$ la sphère de Levi définie par s et t. Soit $B = * S_t$ le bouquet des sphères S_t $(t \in U(s))$; le choix d'un point x de s permet d'envoyer B dans Y.

Proposition 2.3. — *L'application $B \to Y$ ainsi définie est une équivalence d'homotopie.*

(Autrement dit, Y a le type d'homotopie d'un bouquet de n-sphères, où $n = \dim(Y)$.)

Cela se voit en enlevant les intérieurs des simplexes $t \in U(s)$, et en remarquant que l'espace ainsi obtenu est contractile. L'argument est le même que celui de Solomon-Tits [So 69], que l'on retrouve d'ailleurs en prenant $Y = X$.

On peut aussi se placer à un point de vue homologique. Il est commode d'utiliser les groupes d'homologie réduits $\widetilde{H}_i(Y, \mathbf{Z})$; rappelons que ces groupes sont égaux aux groupes d'homologie usuels si $i > 0$ et que $\widetilde{H}_0(Y, \mathbf{Z})$ et $\widetilde{H}_{-1}(Y, \mathbf{Z})$ sont respectivement le noyau et le conoyau de l'homomorphisme $H_0(Y, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$. En particulier $\widetilde{H}_{-1}(Y, \mathbf{Z})$ est 0 si $Y \neq \varnothing$ et est $\mathbf{Z}$ si $Y = \varnothing$. Si Y est contractile, tous les $\widetilde{H}_i(Y, \mathbf{Z})$ sont nuls.

Proposition 2.4. — *Si Y est un sous-complexe convexe de dimension n, on a $\widetilde{H}_i(Y, \mathbf{Z}) = 0$ pour $i \neq n$, et $\widetilde{H}_n(Y, \mathbf{Z})$ est un groupe abélien libre de rang égal à* $\mathrm{Card}(U(s))$; *il est* $\neq 0$ *si et seulement si Y est* cr.

Cela résulte de la prop. 2.3.

2.2.4. *Réduction.* L'énoncé suivant permet souvent de passer de X à l'un des immeubles réduits X_s du n° 2.1.8.

Proposition 2.5. — *Soit Y un sous-complexe convexe de X, et soit S une sphère de Levi contenue dans Y. Soit X_S l'immeuble associé à S, et soit Y_S le sous-complexe de X_S défini par Y. Pour que Y soit X-*cr*, il faut et il suffit que Y_S soit X_S-*cr.

(Précisons comment est défini Y_S : on choisit un simplexe s de S de dimension maximum, et l'on prend l'image de Y_s par l'isomorphisme naturel $X_s \to X_S$.)

La démonstration utilise le lemme suivant ([Ti 74, p. 54]) :

LEMME 2.6. — *Soit* $\{s, s'\}$ *un couple de simplexes opposés, et soient* t_1, t_2 *deux simplexes de* X_s (identifiés à des simplexes de X contenant s). *Soit* t'_1 *le simplexe de* $X_{s'}$ *correspondant à* t_1 *par l'isomorphisme* proj : $X_s \to X_{s'}$. *Alors :*

$$t_1 \text{ et } t_2 \text{ sont opposés dans } X_s \Leftrightarrow t'_1 \text{ et } t_2 \text{ sont opposés dans } X.$$

Démonstration de la prop. 2.5. Soit s un simplexe de S de dimension maximum, et soit t_1 un simplexe de Y contenant s et de dimension égale à $\dim(Y)$. Supposons d'abord que Y_s est X_s-cr. Soit s' l'unique simplexe de S opposé à s. Puisque Y_s est cr, il existe un simplexe t_2 de Y contenant s, qui est opposé à t_1 dans Y_s. Le simplexe t'_1 du lemme 2.6 est opposé à t_2, et est contenu dans Y du fait que Y est convexe (utiliser la définition de l'isomorphisme proj : $X_s \to X_{s'}$ donnée dans [Ti 74, § 3.19]). On en déduit que Y contient la sphère de Levi définie par $\{t_2, t'_1\}$, d'où le fait que Y est cr d'après le th. 2.1. Inversement, si Y est cr, il contient un simplexe opposé à t_1, d'où une sphère de Levi S' de même dimension que Y ; le sous-complexe S'_s de X_s est une sphère de Levi contenue dans Y_s et de même dimension ; d'où le fait que Y_s est cr.

2.2.5. *Démonstration du théorème 2.2.* Il s'agit de prouver que (e) $\Leftrightarrow$ (a). L'implication (a) $\Rightarrow$ (e) est claire. On prouve (e) $\Rightarrow$ (a) par récurrence sur $\dim(X)$. Si $Y = \varnothing$, l'énoncé est clair. Sinon, choisissons un sommet y de Y, que nous identifions à un simplexe de dimension 0. Puisque Y satisfait à (e), il contient un sommet y' opposé à y. Le couple $\{y, y'\}$ est une sphère de Levi de dimension 0. Vu la prop. 2.5, pour prouver que Y est X-cr, il suffit de montrer que le sous-complexe Y_y de l'immeuble réduit X_y est X_y-cr. Comme $\dim(X_y) = \dim(X) - 1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au couple (X_y, Y_y) ; il suffit donc de prouver que Y_y a la propriété (e). Cela revient à montrer que, pour toute arête yz de Y d'extrémité y, il existe une autre arête yz_1 qui est opposée à la précédente dans X_y. Choisissons un sommet z' de Y opposé à z, ce qui est possible d'après (e). Il existe une sphère de Levi D de dimension 1 («cercle de Levi») contenant z' et yz. De plus, z' et yz sont contenus dans le demi-cercle formé de la réunion de yz et de la géodésique yz'. Soit z_1 le sommet de la géodésique yz' qui est le plus proche de y, tout en étant distinct de y. L'image D_y de D dans X_y est égale à $\{yz, yz_1\}$, et c'est une sphère de Levi de dimension 0 de X_y ; il en résulte que yz et yz_1 sont opposés dans X_y, comme on le désirait.

2.3. **Groupes agissant sur X**

2.3.1. Soit Γ un groupe agissant sur X, i.e. muni d'un homomorphisme $\Gamma \to \mathrm{Aut}(X)$. Soit X^Γ le sous-espace de X fixé par Γ. Il est clair que X^Γ est convexe : si Γ fixe deux points x et y qui ne sont pas opposés, il fixe la géodésique xy. Par analogie avec le n° 1.3, nous dirons que l'action de Γ sur X est :

– *irréductible*, si $X^\Gamma = \varnothing$;

– *complètement réductible*, si X^Γ est cr ;

– *indécomposable* si X^Γ est strictement convexe (cf. n° 2.1.5).

Comme précédemment, nous utiliserons les abréviations ir, cr et ind.

Remarque : L'espace X^Γ est un sous-complexe de la subdivision barycentrique de X. Si l'action de Γ préserve les types (ce qui sera le cas dans les §§ 3,4,5), c'est même un sous-complexe de X. D'après le th. 2.1 (complété par la Remarque 2.2.3.1), X^Γ *est contractile si et seulement si l'action de* Γ *sur* X *n'est pas* cr.

2.3.2. Voici une propriété de réduction, au sens du n° 2.1.8 :

Proposition 2.7. — *Supposons que* Γ *préserve les types, et qu'il fixe une sphère de Levi* S*, auquel cas il opère sur l'immeuble* X_S *correspondant. On a l'équivalence suivante* :

L'action de Γ *sur* X *est* cr $\Leftrightarrow$ *L'action de* Γ *sur* X_S *est* cr*.*

Cela résulte de la prop. 2.5, appliquée au sous-complexe $Y = X^\Gamma$ de X.

2.4. **La conjecture du point fixe**

Conjecture 2.8. — *Soit* Y *un sous-complexe de* X (ou de sa subdivision barycentrique), *convexe et contractile. Il existe alors un point de* Y *qui est fixé par tout automorphisme de* X *qui stabilise* Y*.*

(Un tel point mérite d'être appelé un *centre* de Y.)

Cette conjecture a été faite par Tits dans les années 50, sous l'hypothèse supplémentaire que Y est strictement convexe ; son but était, semble-t-il, de prouver un résultat sur les groupes unipotents que Borel et lui ont démontré ensuite par une méthode différente, cf. [BT 71]. Sous cette forme plus restrictive, la conjecture est signalée par Mumford [Mu 65, p. 64] à cause de ses relations avec la «Geometric Invariant Theory» (G.I.T.). En fait, le cas particulier utile pour G.I.T. a été démontré en 1978 par Kempf [Ke 78] et Rousseau [Rou 78]. Il y a d'ailleurs beaucoup d'autres cas où 2.8 a été démontrée, cf. [Rou 78], [Ti 97] et [Mü 97].

Proposition 2.9. — *Admettons la conjecture* 2.8*. Soit* Y *un sous-complexe convexe contractile de* X *et soit* Γ *un groupe d'automorphismes de* X *préservant les types, et stabilisant* Y*. Alors* Y^Γ *est contractile.*

Il est clair que Y^Γ est un sous-complexe convexe de X. D'après 2.8, il est non vide. Il s'agit de montrer qu'il n'est pas cr. S'il l'était, il contiendrait une sphère de Levi S de même dimension, cf. th. 2.1. L'image Y_S de Y dans X_S est stable par Γ, et est contractile (prop. 2.5). En lui appliquant la conjecture 2.8, on en déduirait que $(Y^\Gamma)_S = (Y_S)^\Gamma$ est non vide, ce qui est impossible puisque S et Y^Γ ont la même dimension.

Proposition 2.10. — *La prop.* 2.9 *est vraie* (*sans supposer que* 2.8 *le soit*) *dans chacun des deux cas suivants* :

(a) $\dim(Y) \leq 1$.

(b) *L'image de* Γ *dans* $\mathrm{Aut}(Y)$ *est un groupe résoluble fini.*

Le cas (a) est clair si $\dim(Y) = 0$, car Y est réduit à un point ; il est facile si $\dim(Y) = 1$ car Y est un arbre de diamètre borné, et un tel arbre a un centre, à savoir le milieu des chemins sans aller-retour de longueur égale au diamètre.

Pour (b), on se ramène par dévissage au cas où Γ agit sur Y par un groupe cyclique d'ordre premier p. Comme les $\widetilde{H}_i(Y, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ sont tous nuls, il en est de même des $\widetilde{H}_i(Y^\Gamma, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ d'après la théorie de Smith. Or, si Y^Γ n'était pas contractile, il serait cr, et le groupe $\widetilde{H}_i(Y^\Gamma, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ correspondant à $i = \dim(Y^\Gamma)$ serait non nul d'après la prop. 2.4.

Action de sous-groupes normaux

Proposition 2.11. — *Admettons la conjecture* 2.8. *Soit* Γ *un groupe d'automorphismes de* X *respectant les types, et soit* Γ' *un sous-groupe normal de* Γ. *Si l'action de* Γ *est* cr*, il en est de même de celle de* Γ'.

Posons $Y' = X^{\Gamma'}$ et $Y = X^\Gamma = Y'^{\Gamma/\Gamma'}$. Il s'agit de montrer que Y' n'est pas contractile. S'il l'était, la prop. 2.9, appliquée à (X, Y', Γ), montrerait que $Y = X^\Gamma$ est contractile, contrairement à l'hypothèse faite.

Un argument analogue, utilisant la prop. 2.10, démontre :

Proposition 2.12. — *Si* Γ/Γ' *est un groupe résoluble fini, la prop.* 2.11 *est vraie sans supposer que* 2.8 *le soit.*

Nous verrons au § 3.3 un autre cas du même genre.

3. COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ DES SOUS-GROUPES D'UN GROUPE RÉDUCTIF

Dans ce qui suit, G désigne un groupe algébrique réductif sur un corps k (cf. [BT 65]). Rappelons qu'un tel groupe est lisse et connexe.

Par un « sous-groupe algébrique » de G, on entend un k-sous-groupe algébrique (« défini sur k »).

3.1. L'immeuble de G

3.1.1. *Sous-groupes paraboliques.* Un sous-groupe parabolique de G est un sous-groupe algébrique P tel que G/P soit une variété projective (définition équivalente : après extension des scalaires, P contient un sous-groupe de Borel). Un tel groupe est lisse, connexe, et coïncide avec son normalisateur dans G. Les propriétés de ces groupes dont nous aurons besoin se trouvent dans [BT 65] ; voir aussi [DG 70, XXVI].

3.1.2. *L'immeuble de G.* Sa définition est donnée dans [Ti 74, § 5]. On le notera $X(G)$ ou simplement X. Ses simplexes correspondent aux sous-groupes paraboliques de G ; si s est un simplexe, on note P_s le sous-groupe parabolique correspondant. Les sommets de X correspondent aux paraboliques propres maximaux ; le simplexe vide correspond à G. Le rang r de X est égal au k-rang semi-simple de G, c'est-à-dire au k-rang (ou *rang relatif*) de $G^{\mathrm{ad}} = G/C_G$, où C_G est le centre de G. On a $r = 0$ (et $X = \varnothing$) si G^{ad} est anisotrope.

3.1.3. *Appartements.* Ils correspondent aux tores déployés maximaux (de G, ou de G^{ad}, c'est la même chose).

3.1.4. *Types de sommets.* L'ensemble I des types de sommets peut être identifié à l'ensemble des sommets du k-diagramme de Dynkin de G.

3.1.5. *Opposition.* Deux simplexes s et s' de X sont opposés si et seulement si les paraboliques P_s et $P_{s'}$ sont opposés au sens de [BT 65, § 4], i.e. si $P_s \cap P_{s'}$ est un sous-groupe de Levi de chacun d'eux.

3.1.6. *Action de $G(k)$.* Le groupe $G(k)$ opère sur X (par conjugaison des paraboliques). Cette action respecte les types. Si s est un simplexe de X, et P le parabolique correspondant, le sous-groupe de $G(k)$ fixant (ou stabilisant) s est $P(k)$.

3.1.7. *Sphères de Levi.* Soit L un sous-groupe de Levi d'un parabolique. Les sous-groupes paraboliques contenant L correspondent aux simplexes d'une *sphère de Levi* S_L, et l'on obtient ainsi une bijection entre les L et les sphères de Levi (ce qui explique la terminologie utilisée au § 2). Les paraboliques ayant L pour sous-groupe de Levi correspondent aux simplexes de dimension maximale de la sphère S_L. Si s est l'un de ces simplexes, l'immeuble résiduel X_s (cf. 2.1.8) peut être identifié à l'immeuble de L.

3.1.8. *Critère de convexité.* Soit Y un sous-complexe de X, et soit H l'ensemble des paraboliques correspondant aux simplexes de Y.

PROPOSITION 3.1. — *Pour que Y soit convexe, il faut et il suffit que H satisfasse à la propriété suivante* :

(C) *Si trois paraboliques P, P', Q sont tels que $P \in H$, $P' \in H$, et $Q \supset P \cap P'$, alors $Q \in H$.*

(Attention : l'inclusion $Q \supset P \cap P'$ est une inclusion de groupes algébriques. Il ne suffit pas que $Q(k)$ contienne $P(k) \cap P'(k)$.)

L'énoncé revient à déterminer l'enveloppe convexe de la réunion de deux simplexes (ceux correspondant à P et P'), ce qui se fait au moyen d'un appartement les contenant tous deux.

3.2. **Les propriétés** G-ir, G-cr **et** G-ind

3.2.1. À partir de maintenant, et jusqu'à la fin de l'exposé, Γ désigne un sous-groupe de $G(k)$. Son action sur X permet de lui appliquer les définitions du n° 2.3.1 : irréductibilité, complète réductibilité et indécomposabilité. Pour mettre G en évidence, nous écrirons G-ir, G-cr et G-ind. Autrement dit :

Γ est G-ir $\Leftrightarrow$ Γ n'est contenu dans aucun sous-groupe parabolique propre de G.

Γ est G-cr $\Leftrightarrow$ Pour tout parabolique P de G contenant Γ, il existe un sous-groupe de Levi de P contenant Γ (ou, ce qui revient au même, il existe un parabolique P' opposé à P tel que $\Gamma \subset P(k) \cap P'(k)$).

Γ est G-ind $\Leftrightarrow$ Γ n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique propre de G.

3.2.2. *Exemples.* Lorsque G est un groupe simple de type classique (ou de type G_2) la notion de «G-cr» peut se traduire très concrètement :

(a) Lorsque $G = \mathbf{GL}(V)$, elle signifie que le Γ-module V est semi-simple, cf. n° 1.3.

(b) Supposons k de caractéristique $\neq 2$, et prenons pour G un groupe $\mathbf{SO}(V)$ (ou $\mathbf{Sp}(V)$), relatif à une forme bilinéaire symétrique (ou alternée) B sur V, non dégénérée. La définition de «G-cr» donnée ci-dessus dit que Γ est G-cr si et seulement si, pour tout sous-Γ-module totalement isotrope W de V, il existe un autre sous-Γ-module totalement isotrope W', de même dimension, tel que la restriction de B à $W + W'$ soit non dégénérée. Un argument élémentaire permet de montrer que *cela se produit si et seulement si le* Γ*-module* V *est semi-simple* (c'est aussi une conséquence de la théorie de Richardson, du moins quand k est algébriquement clos, cf. [Ri 88, cor. 16.10]).

(c) Il y a un résultat analogue (un peu moins facile à démontrer) lorsque G est un groupe simple de type G_2, et que V est sa représentation irréductible de dimension 7 (ici encore, on suppose que la caractéristique de k est $\neq 2$).

On verra au § 5 des résultats analogues pour d'autres représentations – mais on devra alors éviter d'autres caractéristiques que la caractéristique 2.

3.2.3. Voici maintenant un résultat qui est une conséquence immédiate de ce que l'on a vu au § 2 (prop. 2.5) :

PROPOSITION 3.2. — *Supposons que* Γ *soit contenu dans un sous-groupe de Levi* L *d'un sous-groupe parabolique de* G*. On a alors*

$$\Gamma \textit{ est } G\text{–cr} \Longleftrightarrow \Gamma \textit{ est } L\text{–cr}.$$

(Lorsque $G = \mathbf{GL}(n)$, cela redonne (1.1.5).)

3.2.4. On peut définir un «G-analogue» de la *semi-simplification* d'une représentation :

Choisissons un parabolique P contenant Γ et minimal pour cette propriété (cela revient à choisir un simplexe de dimension maximum de X^Γ). Soit L un sous-groupe de Levi de P et soit $\pi : P \to L$ la projection de P sur L de noyau le radical unipotent $R_u(P)$ de P.

Proposition 3.3. — (a) *Le groupe* $\pi(\Gamma) \subset L(k)$ *est* L-ir *et* G-cr.

(b) *Différents choix de* (P, L) *donnent des homomorphismes* $\Gamma \to L(k) \to G(k)$ *qui sont conjugués par* $G(k)$.

(Lorsque $G = \mathbf{GL}_V$, l'homomorphisme $\Gamma \to L(k) \to G(k)$ est le semi-simplifié de $\Gamma \to G(k)$, et l'assertion d'unicité de (b) est le *théorème de Jordan-Hölder*.)

Dans (a), le fait que $\pi(\Gamma)$ soit L-ir provient de ce que P est minimal ; on en déduit que Γ est G-cr en appliquant la prop. 3.2. On prouve (b) en remarquant que, pour P fixé, le choix de L n'a pas d'importance puisque deux L différents sont conjugués par $R_u(P)(k)$; et, pour un autre choix P' de P, on utilise le fait que P et P' ont un sous-groupe de Levi commun (c'est une propriété générale des simplexes maximaux d'un sous-complexe convexe).

3.2.5. Voici un autre résultat, inspiré par des arguments de [Ri 88] et de [BMR 04] :

Proposition 3.4. — *Soit* C_Γ *le centralisateur de* Γ *dans* G. *Soit* T *un tore déployé maximal de* C_Γ, *et soit* L *le centralisateur de* T *dans* G. *On a* $\Gamma \subset L(k)$. *De plus* :

(a) *L est un sous-groupe de Levi d'un parabolique de G* ; *il est minimal parmi tous les Levi de paraboliques contenant* Γ.

(b) Γ *est* L-ind.

(c) *Pour que* Γ *soit* G-cr, *il faut et il suffit qu'il soit* L-ir.

(d) *Si k est parfait, les différents choix de L sont conjugués par* $C_\Gamma(k)$.

(Lorsque $G = \mathbf{GL}_V$, le choix de L correspond à une décomposition du Γ-module V en somme directe de modules indécomposables, et (d) est le *théorème de Krull-Remak-Schmidt*.)

L'assertion (a) se déduit du fait que les sous-groupes de Levi de paraboliques sont les centralisateurs des tores déployés de G, cf. [BT 65, 4.16]. L'assertion (b) provient de la minimalité de L, et (c) se déduit de (b) et de la prop. 3.1. Quant à (d), il résulte de la conjugaison des tores déployés maximaux de C_Γ, qui est valable quand k est parfait, d'après [BT 65, 11.6].

3.3. La propriété de Richardson

On suppose maintenant que k est *algébriquement clos*, ce qui assure que tous les tores sont déployés. La prop. 3.4 (c) s'énonce alors de la façon suivante :

Théorème 3.5 (Bate, Martin, Röhrle). — *Soit T un tore maximal du centralisateur de Γ, et soit L le centralisateur de T. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) Γ *est* G-cr.

(ii) Γ *n'est contenu dans aucun sous-groupe parabolique propre de* L.

La propriété (ii) a été introduite en 1988 par Richardson [Ri 88, § 16] sous le nom de «strict reductivity». Ce n'est que tout récemment que Bate, Martin et Röhrle (cf. [BMR 04]) ont démontré qu'elle équivaut à la propriété (i).

Voici deux applications du critère (ii), utilisant toutes deux le point de vue «G.I.T» :

Théorème 3.6 ([Ma 03b]). — *Soit Γ' un sous-groupe normal de Γ. Si Γ est G-*cr*, il en est de même de Γ'.*

(Comparer avec la prop. 2.10 du § 2.)

Théorème 3.7 ([Ri 88]). — *Supposons que Γ soit engendré topologiquement par des éléments $x_1, \ldots, x_m$. Soit $f : G \to G \times \ldots \times G$ (m copies) l'application*

$$g \longmapsto gx_1g^{-1}, ..., gx_mg^{-1}.$$

*Pour que Γ soit G-*cr*, il faut et il suffit que $f(G)$ soit une partie fermée de $G \times \ldots \times G$.*

Dans le cas particulier $m = 1$, on retrouve le fait qu'une classe de conjugaison est fermée si et seulement si ses éléments sont semi-simples.

4. CRITÈRES DE COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ

Dans ce qui suit, G est un groupe réductif sur un corps algébriquement clos k, et Γ est un sous-groupe de $G(k)$. À partir du n° 4.2, on suppose que la caractéristique p de k est > 0.

On se propose de donner des critères, aussi explicites que possible, permettant de reconnaître si Γ possède la propriété G-cr. Si $\bar{\Gamma}$ est l'adhérence de Γ pour la topologie de Zariski, il est clair que Γ est G-cr $\Longleftrightarrow$ $\bar{\Gamma}$ est G-cr. Cela nous permettra souvent de supposer que Γ est fermé, i.e. que c'est un sous-groupe algébrique (non nécessairement connexe) de G.

4.1. Une première condition

Notons $R_u(\Gamma)$ le radical unipotent de Γ, i.e. son plus grand sous-groupe unipotent normal. (Lorsque k est de caractéristique $p > 0$, et que Γ est fini, on a $R_u(\Gamma) = O_p(\Gamma)$, avec les notations usuelles de la théorie des groupes finis.)

Proposition 4.1. — *Si Γ est G-*cr*, on a $R_u(\Gamma) = 1$.*

Quitte à remplacer G par un Levi de l'un de ses sous-groupes paraboliques, on peut supposer que Γ est G-ir (cf. prop. 3.3). Soit alors U l'adhérence de $R_u(\Gamma)$. D'après [BT 71, prop. 3.1], il existe un sous-groupe parabolique P de G, avec $U \subset R_u(P)$, qui est stable par tout automorphisme du couple (G, U). Comme Γ normalise U, il normalise P, donc est contenu dans P. Puisque Γ est G-ir, cela entraîne $P = G$, d'où $U = 1$ puisque $R_u(G) = 1$.

Proposition 4.2. — *Supposons k de caractéristique 0, et supposons que Γ soit fermé. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) Γ *est* G-cr.

(ii) $R_u(\Gamma) = 1$.

(iii) *La composante neutre Γ^0 de Γ est un groupe réductif.*

L'équivalence de (ii) et (iii) provient de ce que tout sous-groupe unipotent de Γ est contenu dans Γ^0. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est la prop. 4.1. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) provient du fait bien connu suivant (spécial à la caractéristique 0) : toute extension de Γ par un groupe unipotent est scindée, et deux scindages quelconques sont conjugués (on se ramène, par dévissage à une annulation de groupes de cohomologie, cf. e.g. [DG 70, p. 393]).

Corollaire 4.3. — *Supposons k de caractéristique 0. Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme de G dans un groupe réductif G'. Si Γ est G-*cr*, alors $f(\Gamma)$ est G'-*cr ; *la réciproque est vraie si f est presque fidèle.*

(Un homomorphisme f est dit *presque fidèle* si $\mathrm{Ker}(f)$ est un groupe de type multiplicatif.)

C'est clair, grâce à (iii).

Remarques.— 1) Le cor. 4.3 redonne le théorème de Chevalley cité au n° 1.1 : il suffit de l'appliquer à l'homomorphisme naturel $f : \mathbf{GL}(V) \times \mathbf{GL}(V') \to \mathbf{GL}(V \otimes V')$.

2) La prop. 4.2 montre que la propriété « G-cr » n'a pas grand intérêt en caractéristique 0. C'est pour cela que, à partir de maintenant, *on supposera que le corps k est de caractéristique $p > 0$.* On donnera alors des conditions sur p (du genre « p est assez grand ») permettant d'avoir des résultats analogues à ceux de la caractéristique 0, cf. th. 4.4, th. 4.5 et th. 5.3.

4.2. **Le cas où Γ est connexe**

Définissons un entier $a(G)$ par la recette suivante :

(1) Si G est simple :

$$a(G) = 1 + \mathrm{rang}(G).$$

(2) Si $\{G_1, \ldots, G_r\}$ sont les quotients simples de G, on pose :

$$a(G) = \sup(1, a(G_1), \ldots, a(G_r)).$$

THÉORÈME 4.4 (Jantzen, McNinch, Liebeck-Seitz). — *Supposons que* $p \geq a(G)$, *que* Γ *soit un sous-groupe fermé de* G, *et que* $(\Gamma : \Gamma^0)$ *soit premier à* p. *Il y a alors équivalence entre* :

(i) Γ *est* G-cr.

(ii) Γ^0 *est réductif.*

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) a été démontrée plus haut. Supposons que la condition (ii) soit satisfaite. En utilisant le fait que $(\Gamma : \Gamma^0)$ est premier à p, on démontre facilement que Γ^0 est G-cr $\Rightarrow$ Γ est G-cr. On peut donc supposer que Γ est connexe, autrement dit que c'est un sous-groupe réductif de G ; on peut aussi supposer que G est quasi-simple. Le cas où G est de type exceptionnel est traité dans [LS 96] (sauf pour $p = 3$ et G de type G_2, mais ce cas n'offre pas de difficultés). Lorsque G est de type A_n, le théorème signifie que toute représentation linéaire de degré $\leq p$ d'un groupe réductif est semi-simple, ce qui a été démontré par Jantzen [Ja 97]. De même, si G est de type B_n, C_n ou D_n, on est ramené à montrer que toute représentation self-duale d'un groupe réductif est semi-simple si sa dimension est $< 2p$; cela a été démontré récemment par McNinch (non publié : le cas crucial est celui où le groupe réductif est de type A_1 – les autres cas se déduisent de [Mc 98]).

REMARQUE.— La borne $p \geq a(G)$ du th. 4.4 est essentiellement optimale lorsque le groupe Γ^0 est de rang 1. Elle peut par contre être améliorée lorsque les facteurs simples de Γ^0 sont de rang > 1, cf. [LS 96] et [Mc 98].

4.3. **Le cas non connexe**

On se borne au cas où $G^{\mathrm{ad}} = G/C_G$ est un groupe simple. On remplace l'entier $a(G)$ du numéro précédent par un entier $b(G)$ un peu plus grand :

$b(G) = n + 2$ si G^{ad} est de type A_n ;

$b(G) = 2n + 3$ si G^{ad} est de type B_n, C_n ou D_n ;

$b(G) = 11, 29, 29, 59, 251$ si G^{ad} est de type G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.

THÉORÈME 4.5. — *Supposons que* Γ *soit un sous-groupe fermé de* $G(k)$, *avec* G^{ad} *simple, et* $p \geq b(G)$. *Il y a équivalence entre* :

(i) Γ *est* G-cr.

(ii) $R_u(\Gamma) = 1$.

(Autrement dit, on a le même énoncé que 4.2, pourvu que $p \geq b(G)$.)

Ici encore, on doit montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i). Le cas essentiel est celui où $G = \mathbf{GL}(n)$; il est dû à Guralnick, cf. [Gu 99, th. C]. (La démonstration est loin d'être élémentaire : elle utilise la classification des groupes finis simples !) Les autres cas s'en déduisent en utilisant des représentations presque fidèles de G et en leur appliquant le th. 5.3 ci-après.

Remarque.— Lorsque G est de type A_n ou C_n, la borne $p \geq b(G)$ est presque optimale. Il n'en est probablement pas de même dans le cas des groupes exceptionnels ; on doit pouvoir l'améliorer en suivant une méthode analogue à celle de [LS 96]. Ainsi, dans le cas de G_2, il doit être possible de remplacer «$p \geq 11$» par «$p \geq 7$», et dans le cas de E_8, de remplacer «$p \geq 251$» par «$p \geq 61$» (ou peut-être même beaucoup mieux).

5. SATURATION ET REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES

5.1. Exponentielle et saturation

On note $h(G)$ la borne supérieure des nombres de Coxeter des quotients simples de G. (S'il n'y en a aucun, i.e. si G est un tore, on convient que $h(G) = 1$.) Rappelons que, si G est simple, on a $h(G) = \dim(G)/\mathrm{rang}(G) - 1$; les valeurs de h pour les différents types sont :

$A_n : h = n + 1$; $B_n, C_n : h = 2n$; $D_n : h = 2n - 2$; $G_2 : h = 6$; $F_4, E_6 : h = 12$; $E_7 : h = 18$; $E_8 : h = 30$.

Supposons maintenant que $p \geq h(G)$. Soit u un élément unipotent de G. D'après [Te 95], on a $u^p = 1$. De plus, si t est un élément de k, on peut définir de façon canonique (c'est là un point essentiel) la «t-ième puissance» u^t de u, cf. [Se 98] (voir aussi [Sei 00] qui traite un cas plus général). L'application $t \mapsto u^t$ est un homomorphisme du groupe additif $\mathbf{G}_a$ dans le groupe G. Lorsque $G = \mathbf{GL}(n)$, l'hypothèse $p \geq h(G)$ signifie que $p \geq n$, de sorte que $u = 1 + v$ avec $v^p = 0$, et u^t est donné par le développement binomial : $(1 + v)^t = 1 + t.v + \ldots$.

[L'hypothèse «k algébriquement clos» faite au début du § 4 n'intervient pas dans la définition de l'exponentielle u^t. En fait, le cas crucial est celui d'un schéma en groupes semi-simples, déployé et simplement connexe, sur le localisé $\mathbf{Z}_{(p)}$ de $\mathbf{Z}$ en p. Les autres cas s'en déduisent par descente, en utilisant les méthodes de [DG 70], cf. e.g. [Sei 00, § 5].]

Définition 5.1. — *Un sous-groupe* Γ *de* $G(k)$ *est dit saturé s'il est fermé et si l'on a* $u^t \in \Gamma$ *pour tout élément unipotent* u *de* Γ*, et tout* $t \in k$*.*

[Par exemple, tout sous-groupe parabolique est saturé ; tout centralisateur d'un sous-groupe est saturé.]

On démontre facilement :

Proposition 5.2. — *Si* Γ *est saturé, l'indice de* Γ^0 *dans* Γ *est premier à* p*.*

Pour tout sous-groupe Γ de $G(k)$, il existe un plus petit sous-groupe saturé le contenant ; on l'appelle le *saturé* de Γ et on le note Γ^{sat}. (Lorsque $G = \mathbf{GL}(n)$, on retrouve la notion définie dans [No 87] et [Se 94].)

Théorème 5.3 ([Se 98, th. 8]). — *Il y a équivalence entre :*

(i) Γ *est* G-cr.

(ii)Γ^{sat} *est* G-cr.

(iii) *La composante neutre de* Γ^{sat} *est un groupe réductif.*

(Rappelons que l'on suppose $p \geq h(G)$.)

L'équivalence (i) $\Rightarrow$ (ii) est claire : les sous-groupes paraboliques et leurs sous-groupes de Levi sont saturés. L'équivalence de (ii) et (iii) résulte du th. 4.4 et de la prop. 5.2 ; noter que le th. 4.4 est applicable car $a(G) \leq h(G)$.

5.2. **Représentations linéaires: l'invariant** $n(V)$

Choisissons un tore maximal T de G, ainsi qu'un sous-groupe de Borel B de G contenant T. Soit $X(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_m)$ le groupe des caractères de G, et $Y(T) = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$ son dual. Notons $R \subset X(T)$ le système de racines de (G, T) ; si $a \in R$, notons a^* la racine duale, qui est un élément de $Y(T)$.

Pour tout $\chi \in X(T)$, on posera

$$n(\chi) = \Sigma \, \langle \chi, a* \rangle \, ,$$

où a parcourt les éléments > 0 de R (pour la relation d'ordre associée au choix de B).

Si V est un G-module, on définit un *invariant*(V) de V par la formule :

$$n(V) = \mathrm{Sup}\; n(\chi)\, ,$$

où χ parcourt l'ensemble des poids de T dans V.

C'est un entier ≥ 0. Voici quelques-unes de ses propriétés (on en trouvera d'autres dans [Se 98] et [IMP 03]) :

(5.2.1) Si V a une suite de composition dont les facteurs successifs sont $V_1, \ldots, V_r$, on a $n(V) = \mathrm{Sup}\, n(V_i)$.

(5.2.2) Si V est irréductible de plus grand poids λ, on a $n(V) = n(\lambda)$.

(5.2.3) On a $n(V) = 0$ si et seulement si le groupe dérivé de G opère trivialement sur V, i.e. si l'image de $G \to \mathbf{GL}(V)$ est un tore.

(5.2.4) Si V est presque fidèle (au sens du cor. 4.3), on a $n(V) \geq h(G) - 1$.

(5.2.5) Si $V = V_1 \otimes V_2$, on a $n(V) = n(V_1) + n(V_2)$.

L'intérêt de cet invariant provient du théorème suivant, qui relie la semi-simplicité du Γ-module V à la propriété «G-cr» :

Théorème 5.4. — *Supposons* $p > n(V)$. *Soit* Γ *un sous-groupe de* $G(k)$.

(i) *Si* Γ *est* G-cr, *alors* V *est* Γ*-semi-simple* (*i.e.* semi-simple comme Γ-module).

(ii) *Inversement, si* V *est* Γ*-semi-simple, et si* V *est presque fidèle, alors* Γ *est* G-cr.

On peut supposer que V est presque fidèle. D'après (5.2.4), on a alors $p \geq h(G)$, ce qui permet d'utiliser le th. 5.2. Les détails de la démonstration se trouvent dans [Se 98] (voir aussi [IMP 03]).

COROLLAIRE 5.5. — *Supposons $p > 2h(G) - 2$. Pour que Γ soit G-*cr*, il faut et il suffit que l'algèbre de Lie* $\mathrm{Lie}\, G$ *de G soit un Γ-module semi-simple* (pour la représentation adjointe).

Cela résulte de ce que l'invariant $n(\mathrm{Lie}\, G)$ est égal à $2h(G) - 2$.

REMARQUE 5.6. — Noter que l'invariant $n(V)$ «se calcule sur $\mathbf{SL}(2)$», au sens suivant :

Choisissons un homomorphisme $f : \mathbf{SL}(2) \to G$ tel que le composé

$$\mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{SL}(2) \longrightarrow G$$

soit à valeurs dans T, et soit égal dans $Y(T)$ à la somme $\sum a^*$, où a parcourt les racines positives. Un tel homomorphisme existe : cela se démontre par réduction à partir de la caractéristique 0. On obtient ainsi (si G n'est pas un tore) un sous-groupe de G qui est isomorphe à $\mathbf{SL}(2)$ ou à $\mathbf{PGL}(2)$; un tel sous-groupe est dit «de type principal». Tout G-module peut donc être vu comme un $\mathbf{SL}(2)$-module, et l'invariant $n(V)$ de V comme G-module est le même que celui de V comme $\mathbf{SL}(2)$-module.

[Ceci peut aussi s'énoncer en disant que, à un facteur 2 près, $n(V)$ est le degré en la variable «q» de la *dimension quantique* de V.]

5.3. **Applications**

Le th. 5.3 peut être utilisé pour prouver des énoncés où la notion de «$G-$cr» n'intervient pas explicitement. Par exemple :

PROPOSITION 5.7. — *Soit $\Gamma \subset G(k)$, où G est de type E_8. Soient $V_1, \ldots, V_8$ les huit représentations irréductibles fondamentales de G. Supposons que l'un des Γ-modules V_i soit semi-simple. Alors tous les autres le sont pourvu que $p > 270$.*

(J'ignore si la minoration $p > 270$ est optimale.)

L'invariant $n(V_i)$ est égal au coefficient de α_i dans la somme des racines positives. On en déduit que :

$n(V_i) = 92,\ 136,\ 182,\ 270,\ 220,\ 168,\ 114,\ 58$ pour $i = 1, \ldots, 8$.

D'où le résultat, d'après le th. 5.4.

Voici deux autres applications. La première est l'analogue en caractéristique p du théorème de Chevalley cité au n° 1.1 :

PROPOSITION 5.8 ([Se 94]). — *Soient V_i des représentations linéaires semi-simples d'un groupe Γ. Si $p > \Sigma(\dim(V_i) - 1)$, la représentation $\otimes\, V_i$ est Γ-semi-simple.*

On applique le th. 5.4 avec $G = \prod \mathbf{GL}(V_i)$. L'hypothèse que les V_i sont semi-simples signifie que l'image de Γ dans G est G-cr. D'autre part, il résulte de (5.2.5) que l'invariant $n(V)$ de la G-représentation $\otimes V_i$ est égal à $\sum(\dim(V_i) - 1)$. D'où le résultat.

Autre énoncé du même goût:

Proposition 5.9 ([Se 98] et [Mc 00]). — *Si V est une représentation linéaire semi-simple d'un groupe Γ, il en est de même de $\wedge^i V$, pourvu que $p > i(\dim(V) - i)$.*

On applique le th. 5.4 avec $G = \mathbf{GL}(V)$. On peut supposer que $0 \leq i \leq \dim(V)$. On a alors $n(\wedge^i V) = i(\dim(V) - i)$. D'où le résultat.

Remarque : Dans les deux cas ci-dessus, on peut se proposer de prouver des réciproques. Par exemple, si $\wedge^i V$ est semi-simple, est-il vrai (si $0 < i < \dim(V)$ et si p est assez grand) que V est semi-simple ? Le th. 5.4 dit que «oui» si $p > i(n - i)$ où $n = \dim(V)$. En fait, un argument tannakien élémentaire ([Se 97a]) donne un résultat nettement meilleur : il suffit que p ne divise aucun des entiers $n-2, n-3, \ldots, n-i$. Peut-être y a-t-il une version améliorée du th. 5.4 qui entraîne les autres résultats de [Se 97a] ?

BIBLIOGRAPHIE

[BMR 04] M. BATE, B.M.S. MARTIN et G. RÖHRLE – *Complete reducibility and strong reductivity*, preprint, Univ. Birmingham, 2004.

[BT 65] A. BOREL et J. TITS – *Groupes réductifs*, Publ. Math. IHES **27** (1965), 55-150.

[BT 71] A. BOREL et J. TITS – *Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs* I, Invent. math. **12** (1971), 95-104.

[Br 89] K. BROWN – *Buildings*, Springer-Verlag, 1989.

[Ch 54] C. CHEVALLEY – *Théorie des Groupes de Lie*, vol. III, Hermann, Paris, 1954.

[DG 70] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK – *Structure des schémas en groupes réductifs* (SGA 3 III), Lect. Notes **153**, Springer-Verlag, 1970.

[Gu 99] R.M. GURALNICK – *Small representations are completely reducible*, J. Algebra **220** (1999), 531-541.

[IMP 03] S. ILANGOVAN, V.B. MEHTA et A.J. PARAMESWARAN – *Semistability and semisimplicity in representations of low height in positive characteristic*, in *A Tribute to C.S. Seshadri*, edited by V. Lakshmibai et al, Hindustani Book Ag., New Delhi, 2003.

[Ja 97] J.C. JANTZEN – *Low dimensional representations of reductive groups are semisimple*, in *Algebraic Groups and Lie Groups*, Cambridge U. Press, Cambridge, 1997, 255-266.

[Ke 78] G.R. KEMPF – *Instability in invariant theory*, Ann. Math. **108** (1978), 299-316.

[LS 96] M.W. LIEBECK et G.M. SEITZ – *Reductive Subgroups of Exceptional Algebraic Groups*, Memoirs A.M.S. **580**, 1996.

[Ma 03a] B.M.S. MARTIN – *Reductive subgroups of reductive groups in nonzero characteristic*, J. Algebra **262** (2003), 265-286.

[Ma 03b] B.M.S. MARTIN – *A normal subgroup of a strongly reductive subgroup is strongly reductive*, J. Algebra **265** (2003), 669-674.

[Mc 98] G.J. MCNINCH – *Dimensional criteria for semisimplicity of representations*, Proc. London Math. Soc. **76** (1998), 95-149.

[Mc 00] G.J. MCNINCH – *Semisimplicity of exterior powers of semisimple representations of groups*, J. Algebra **225** (2000), 646-666.

[Mu 65] D.MUMFORD – *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag, 1965 ; third enlarged edit. (D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan), 1994.

[Mü 97] B. MÜHLHERR – *Complete reducibility in projective spaces and polar spaces*, preprint, Dortmund, 1997.

[No 87] M.V. NORI – *On subgroups of* $\mathbf{GL}(n, \mathbf{F}_q)$, Invent. math. **88** (1987), 257-275.

[Ri 88] R.W. RICHARDSON – *Conjugacy classes of n-tuples in Lie algebras and algebraic groups*, Duke Math. J. **57** (1988), 1-35.

[Ron 89] M. RONAN – *Lectures on Buildings*, Acad. Press, San Diego, 1989.

[Rou 78] G. ROUSSEAU – *Immeubles sphériques et théorie des invariants*, C.R.A.S. **286** (1978), 247-250.

[S 00] G.M. SEITZ – *Unipotent elements, tilting modules, and saturation*, Invent. math. **141** (2000), 467-502.

[Se 94] J-P. SERRE – *Sur la semi-simplicité des produits tensoriels de représentations de groupes*, Invent. math. **116** (1994), volume dédié à Armand Borel, 513-530.

[Se 97a] J-P. SERRE – *Semisimplicity and tensor products of group representations: converse theorems* (with an Appendix by Walter Feit), J. Algebra **194** (1997), 496-520.

[Se 97b] J-P. SERRE – *La notion de complète réductibilité dans les immeubles sphériques et les groupes réductifs*, Séminaire au Collège de France, résumé dans [Ti 97, pp. 93-98].

[Se 98] J-P. SERRE – *The notion of complete reducibility in group theory*, Moursund Lectures Part II, Eugene 1998 (Notes by W.E. Duckworth), `http://darkwing.uoregon.edu/~math/serre/index.html`

[So 69] L. SOLOMON – *The Steinberg character of a finite group with BN-pair*, Theory of Finite Groups, Benjamin, 1969, 213-221.

[Te 95] D.M. TESTERMAN – A_1*-type overgroups of elements of order p in semisimple algebraic groups and the associated finite groups*, J. Algebra **177** (1995), 34-76.

[Ti 74] J. TITS – *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, LN **386**, Springer-Verlag, 1974.

[Ti 97] J. TITS – *Résumé des cours de 1996-1997*, Annuaire du Collège de France **97** (1997), 89-102.

[TW 02] J. TITS et R.M. WEISS – *Moufang Polygons*, Springer-Verlag, 2002.

Jean–Pierre SERRE

Collège de France
11 place M. Berthelot
F-75231 PARIS Cedex 05
E-mail : `serre@dma.ens.fr`