Transformation Groups **19** (2014), 643-698

Bases normales autoduales et groupes unitaires en caractéristique 2

Jean-Pierre Serre

À E.B. Dynkin pour son 90-ième anniversaire

Introduction

L'origine du présent travail est un théorème de Bayer-Lenstra dont voici l'énoncé :

Théorème A ([BL 90, th.6.1]) - *Soit k un corps de caractéristique* 2, *et soit L/k une extension galoisienne finie de groupe de Galois G. Supposons que G soit commutatif. Pour que L/k possède une base normale autoduale* (cf. ci-dessous), *il faut et il suffit que G n'ait pas d'élément d'ordre* 4.

[Lorsque la caractéristique de k est $\neq 2$, le même énoncé est valable, à condition d'y remplacer "d'ordre 4" par "d'ordre 2" - ce qui revient à dire que l'ordre de G doit être impair.]

Rappelons (cf. [BL 90]) qu'une base normale autoduale (en abrégé : "BNA") de L/k est une k-base B de L qui est stable par l'action de G et qui est telle que

$$\mathrm{Tr}_{L/k}(xy) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x, y \in B,\ x \neq y \\ 1 & \text{si } \ x, y \in B,\ x = y. \end{cases}$$

Il est naturel d'essayer d'étendre le théorème A au cas où G n'est pas commutatif. C'est ce que nous allons faire. Le résultat est le suivant (il est annoncé dans [Se 05]) :

Théorème B - *Soit k un corps de caractéristique* 2, *et soit L/k une extension galoisienne finie de groupe de Galois G. Pour que L possède une BNA, il faut et il suffit que G soit engendré par des éléments d'ordre impair et par des éléments d'ordre* 2.

[Noter le cas particulier où G est d'ordre impair, déjà traité dans [Ba 89].]

Ce qui est surprenant dans cet énoncé, c'est que l'existence d'une BNA ne dépende que de la structure du groupe de Galois G, et pas des propriétés du corps de base k, ni de celles de l'extension L ; ce n'est pas ce qui se passe quand $\mathrm{car}(k) \neq 2$, comme le montrent de nombreux exemples, cf. [Ba 89], [BFS 94], etc.

Nous démontrerons le théorème B au §6 (corollaire 6.1.10), comme conséquence d'un critère d'isomorphisme pour les G-formes trace de deux G-algèbres galoisiennes (théorème 6.1.5). La démonstration se fait en traduisant la question en termes de cohomologie galoisienne, comme dans [BFS 94]. Le groupe algébrique qui intervient est le groupe unitaire de l'algèbre à involution $k[G]$; cela nous amènera à étudier la structure des groupes unitaires des algèbres à involution en caractéristique 2, ce qui ne semble pas avoir été fait jusqu'à présent en dehors de cas très particuliers. De façon plus précise, soit k un corps parfait de

caractéristique 2, soit A une k-algèbre à involution de dimension finie, soit U_A le groupe unitaire correspondant (vu comme groupe algébrique sur k), et soit U_A^0 la composante neutre de U_A. Le théorème de cohomologie galoisienne dont nous aurons besoin est :

Théorème C - *On a $H^1(k, U_A^0) = 0$, autrement dit tout U_A^0-torseur a un point rationnel.*

Pour prouver ce résultat, on peut supposer que U_A^0 engendre l'algèbre A. Faisons cette hypothèse. Le cas où A est semi-simple est facile. On décompose A en produits d'algèbres simples, et l'on constate que U_A est connexe et que, après extension des scalaires, c'est un produit de groupes linéaires et de groupes symplectiques. La trivialité de $H^1(k, U_A^0) = H^1(k, U_A)$ en résulte, grâce à l'hypothèse que k est parfait de caractéristique 2, cf. §4.7.

Pour passer de là au cas général, il est naturel d'introduire le radical $\mathfrak{r}$ de A et de comparer les groupes U_A^0 et $U_{A/\mathfrak{r}}$ grâce à la projection $\pi : U_A^0 \to U_{A/\mathfrak{r}}$. Le noyau de π est un groupe unipotent connexe qui est négligeable du point de vue de la cohomologie galoisienne. La vraie difficulté est que π n'est pas surjectif en général, contrairement à ce qui se passerait si la caractéristique de k était $\neq 2$. Toutefois on peut démontrer que π est "presque surjectif" : son image est un sous-groupe réductif de rang maximum de $U_{A/\mathfrak{r}}$ qui se décompose en produit comme $U_{A/\mathfrak{r}}$; la seule différence est que certains facteurs symplectiques $\mathbf{Sp}_{2n}$ de $U_{A/\mathfrak{r}}$ sont remplacés par des groupes orthogonaux $\mathbf{SO}_{2n}$. La démonstration de ce fait occupe le §2 et le §3 ; elle repose sur une propriété très particulière des poids des tores maximaux des groupes unitaires : la "propriété PL", décrite au §1, qui vaut, plus généralement, pour les groupes définis comme fixateurs de tenseurs de degré $\leqslant 2$, cf. §1.4.

Une fois ce résultat obtenu, la nullité de $H^1(k, U_A^0)$ se démontre par des arguments cohomologiques standard, cf. §4. On peut alors passer au cas dont nous avons besoin : $A = k[G]$, cf. §5. Ici il n'est plus nécessaire de supposer que k est parfait ; l'un des principaux résultats est une caractérisation de $G \cap U_A^0$ comme le sous-groupe de G engendré par les éléments d'ordre 2 et par les carrés (théorème 5.3.1). On déduit de là le critère d'isomorphisme de G-formes trace mentionné plus haut ; c'est l'objet du §6, qui en donne diverses applications, par exemple au principe de Hasse, lorsque k est un corps global (théorème 6.1.18). Le §7 contient des compléments variés, et mentionne plusieurs questions ouvertes, notamment la suivante : si G est un 2-groupe, est-il vrai que $G \to U_G/U_G^0$ est surjectif ?

Notations.

Si A est un anneau, on note $A^\times$ son groupe multiplicatif.

On note $X \sqcup Y$ la réunion de deux ensembles disjoints X et Y.

Si X est un schéma sur un corps k, et si K est une extension de k, on note $X_{/K}$ le schéma que l'on déduit de X par extension des scalaires à K, et l'on note $X(K)$ l'ensemble des K-points de X.

Si X est un schéma, on note X^{red} le schéma réduit associé.

Le terme de "groupe algébrique" (sur un corps k) est utilisé au sens de "schéma en groupes affine de type fini", autrement dit "sous-schéma en groupes fermé de $\mathbf{GL}_n$ pour n assez grand", cf. par exemple [KMRT 98, chap.VI] et [Wa 79] ; le faisceau des anneaux locaux peut avoir des éléments nilpotents $\neq 0$. En fait, le cas le plus important est celui où le groupe est lisse, mais les éléments nilpotents interviennent parfois (par exemple pour le groupe $\boldsymbol{\mu}_2$ des racines carrées de l'unité, ou aussi pour la définition du noyau d'un homomorphisme).

Si G est un groupe algébrique, sa composante neutre est notée G^0, et son algèbre de Lie est notée $\mathrm{Lie}(G)$.

Les autres notations sont standard.

§1 - Les tores de type PL

1.1. **La propriété PL**.

Soit L un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini. Soit Ω une partie finie de L. Nous dirons que Ω est "presque libre" (en abrégé " PL ") s'il existe une partie ω de Ω telle que :

(1.1.1) *ω est libre au sens usuel de ce terme : les éléments de ω sont $\mathbf{Z}$-linéairement indépendants.*

(1.1.2) *On a* $\Omega \subset \{0\} \cup \omega \cup -\omega$.

[Dans cette formule, $-\omega$ désigne l'ensemble des $-\alpha$ pour $\alpha \in \omega$. Nous utiliserons souvent ce genre de notation dans la suite.]

[Autre caractérisation :

(1.1.3) *Toute partie ϖ de Ω telle que $\varpi \cap -\varpi = \varnothing$ est libre.*

Exemple. Si $\{x_1, x_2, x_3\}$ est une partie libre de L, l'ensemble $\{0, x_1, x_2, x_3, -x_1\}$ est presque libre.

Cette notion a les propriétés de stabilité suivantes, qui sont immédiates :

(1.1.4) *Si L' est un sous-groupe de L et si $\Omega \subset L'$, alors Ω est presque libre dans L' si et seulement si il l'est dans L.*

(1.1.5) *Si $\Omega' \subset \Omega$ et si Ω est presque libre, alors Ω' est presque libre.*

1.2. **Tores de type PL**.

Soit k un corps algébriquement clos (de caractéristique quelconque) et soit V un espace vectoriel de dimension finie sur k. On note $\mathbf{GL}_V$ le groupe des automorphismes de V, vu comme k-groupe algébrique.

Soit T un k-tore opérant sur V, autrement dit muni d'un homomorphisme $\varphi : T \to \mathbf{GL}_V$. Soit $X(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_m)$ le groupe des caractères de T ; comme d'habitude, on écrit X additivement, ce qui amène à noter t^χ l'image d'un point t de T par le caractère χ. L'espace V se décompose en $V = \oplus_{\chi \in X} V_\chi$, où V_χ est le sous-espace propre relatif à χ, i.e. l'ensemble des $v \in V$ tels que $\varphi(t)v = t^\chi v$ pour tout t. On dit que χ est un *poids de V* si $V_\chi \neq 0$.

Définition. On dit que l'action de T sur V est de type PL si l'ensemble Ω de ses poids est de type PL au sens du §1.1.

Remarque. Si l'action de T sur V est de type PL, et si W est un sous-espace vectoriel de V stable par T, alors l'action de T sur W est de type PL, et il en est de même de son action sur V/W. Cela résulte de (1.1.5). Dans la suite, T sera le plus souvent un sous-tore de $\mathbf{GL}_V$, et φ sera l'injection canonique $T \to \mathbf{GL}_V$. Dans ce cas, on dira simplement que T est un sous-tore de $\mathbf{GL}_V$ de type PL. En fait, le cas général se ramène à ce cas particulier : en effet, si l'on a $\varphi : T \to \mathbf{GL}_V$ et si T' désigne l'image de T dans $\mathbf{GL}_V$, alors (T, φ) est de type PL si et seulement si T' est de type PL : cela résulte de (1.1.4), puisque $X(T')$ est un sous-groupe de $X(T)$.

1.3. **Premiers exemples de tores de type PL.**

1.3.1. Un tore maximal de $\mathbf{GL}_n$: l'ensemble de ses poids est libre à n éléments.

1.3.2. Un tore maximal de $\mathbf{Sp}_{2n}$, ou de $\mathbf{SO}_{2n}$: l'ensemble de ses poids est de la forme $\omega \cup -\omega$, où ω est libre à n éléments.

1.3.3. Un tore maximal de $\mathbf{SO}_{2n+1}$: l'ensemble de ses poids est de la forme $\{0\} \cup \omega \cup -\omega$, où ω est libre à n éléments.

Rappelons que, lorsque la caractéristique est égale à 2, le groupe orthogonal $\mathbf{O}_{2n}$ est lisse ; le groupe $\mathbf{SO}_{2n}$ est sa composante neutre ; c'est le noyau de l'invariant de Dickson $\mathbf{O}_{2n} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, cf. [KMRT 98, §12.12]. Par contre, le groupe orthogonal $\mathbf{O}_{2n+1}$ n'est pas lisse, comme le montre déjà le cas $n = 0$, où c'est $\boldsymbol{\mu}_2$; le groupe $\mathbf{SO}_{2n+1}$ est défini comme le noyau de det : $\mathbf{O}_{2n+1} \to \mathbf{G}_m$; c'est un groupe lisse, et l'on a $\mathbf{O}_{2n+1} = \boldsymbol{\mu}_2 \times \mathbf{SO}_{2n+1}$.

1.3.4. Si A est une algèbre à involution, et U le groupe unitaire correspondant (vu comme sous-groupe de $\mathbf{GL}_A$ par l'action par les translations à gauche), alors tout tore maximal de U est de type PL, cf. proposition 3.2.5.

1.4. **Exemple : tores maximaux des fixateurs de tenseurs de degré $\leqslant 2$.**

Les différents exemples du §1.3 sont des cas particuliers du suivant :

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur k (supposé algébriquement clos, pour simplifier). Soit $(\theta_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de l'un des huit types suivants :

(1.4.1) un élément de V ;
(1.4.2) un élément du dual V' de V ;
(1.4.3) un élément de $\otimes^2 V$;
(1.4.4) un élément de $\otimes^2 V'$;
(1.4.5) un élément de $V \otimes V' = \mathrm{End}(V)$;
(1.4.6) une forme quadratique sur V ;
(1.4.7) une forme quadratique sur V' ;
(1.4.8) un sous-espace vectoriel W de V.

Soit $G \subset \mathbf{GL}_V$ le fixateur des θ_i.

[Précisons ce que cela signifie : si k' est une k-algèbre commutative, un point $g \in G(k')$ est un automorphisme de $k' \otimes V$ qui fixe les tenseurs déduits des θ_i par extension des

scalaires de k à k' ("fixer" a un sens clair pour les sept premiers cas, et pour (1.4.8), cela signifie que g laisse stable $k' \otimes_k W$).]

Proposition 1.4.9 - *Les tores maximaux de G sont de type PL.*

Démonstration. Nous allons prouver un résultat plus précis :

Proposition 1.4.10 - *Soit M un sous-groupe de G de type multiplicatif* (cf. [SGA 3, II, exposés VIII et IX]), *dont le groupe des caractères ne contient aucun élément d'ordre 2.*[1] *Il existe un sous-tore $\widetilde{M}$ de G qui contient M et qui est de type PL.*

[Cet énoncé entraîne la proposition précédente, car, si on l'applique à un tore maximal T de G, on obtient un tore $\widetilde{T}$ de G qui est de type PL et qui contient T, donc qui est égal à T.]

Démonstration. Soit $X = \mathrm{Hom}(M, \mathbf{G}_m)$ le groupe des caractères de M, que nous écrirons additivement. L'action de M sur V décompose V en somme directe $V = \sum_{\chi \in X} V_\chi$ de sous-espaces propres. Soit $\widetilde{M}$ le groupe des automorphismes de V qui, sur chaque V_χ, sont égaux à une homothétie t_χ, satisfaisant aux deux conditions :

(1.4.11) $t_\chi = 1$ si $\chi = 0$;

(1.4.12) $t_\chi t_{-\chi} = 1$ pour tout χ.

Ce groupe contient M. Nous allons voir qu'il convient. Autrement dit :

Lemme 1.4.13 - *Le groupe $\widetilde{M}$ est un sous-tore de G de type PL.*

Démonstration du fait que $\widetilde{M}$ est un tore de type PL. Soit Ω l'ensemble des $\chi \neq 0$ tels que $V_\chi \neq 0$; c'est un ensemble fini ; choisissons une partie ω de Ω qui ne rencontre pas $-\omega$, et qui est maximale pour cette propriété. Un point de $\widetilde{M}$ est déterminé par ses coordonnées t_χ avec $\chi \in \omega$, et celles-ci peuvent être choisies arbitrairement. Cela montre que $\widetilde{M}$ est un tore dont le groupe des caractères a pour base les éléments de ω (vus comme caractères de $\widetilde{M}$, et non plus de M) ; de plus, l'ensemble des poids de ce tore est contenu dans $\{0\} \cup \omega \cup -\omega$, donc est presque libre.

Démonstration du fait que $\widetilde{M}$ est contenu dans G. On doit montrer que les θ_i sont invariants par tout point (t_χ) de $\widetilde{M}$. Il y a huit cas à considérer, suivant que θ_i est de type (1.4.1), (1.4.2), ..., (1.4.8) :

Type (1.4.1). On a $\theta_i \in V$; comme θ_i est invariant par M, il appartient à V_0, et il est invariant par $\widetilde{M}$ puisque les éléments de $\widetilde{M}$ fixent V_0 d'après (1.4.11).

Type (1.4.2). On a $\theta_i \in V'$: même démonstration, avec V remplacé par V'.

Type (1.4.3). On a $\theta_i \in V \otimes V = \oplus_{\chi_1, \chi_2} V_{\chi_1} \otimes V_{\chi_2}$. Puisque θ_i est invariant par M, il est contenu dans la somme directe des $V_\chi \otimes V_{-\chi}$; or ceux-ci sont fixés par $\widetilde{M}$, d'après (1.4.12).

Type (1.4.4). Même démonstration que celle du type (1.4.3), avec V remplacé par V'.

1. Lorsque k est de caractéristique 2 - ce qui est le cas intéressant pour la suite - cette hypothèse équivaut à dire que M est *lisse*.

Type (1.4.5). On a $\theta_i \in \mathrm{End}(V)$. Dire que θ_i est invariant par M signifie qu'il commute à l'action des éléments de M, ou encore que les V_χ sont stables par θ_i ; cela entraîne que θ_i commute à l'action de $\widetilde{M}$.

Type (1.4.6). Dans ce cas, θ_i est une forme quadratique. Soit b la forme bilinéaire associée. Soit $t = (t_\chi)$ un k-point de $\widetilde{M}$. D'après le cas (1.4.4), t fixe b (en effet b est fixée par G). Il en résulte que la forme bilinéaire associée à la forme quadratique $t(\theta_i) - \theta_i$ est 0 ; autrement dit, c'est le carré d'une forme linéaire ℓ sur V. On doit montrer que $\ell = 0$, et il suffit de le faire sur chaque V_χ ; c'est clair pour $\chi = 0$ puisque t fixe V_0 ; c'est non moins clair pour $V_\chi,\ \chi \neq 0$, car la restriction de θ_i à V_χ est 0 (puisque M agit sur V_χ par des homothéties de rapport arbitraire).

Type (1.4.7). Même démonstration que celle de (1.4.6), avec V remplacé par V'.

Type (1.4.8). Dans ce cas θ_i est un sous-espace vectoriel W de V. Dire qu'il est stable par M équivaut à dire qu'il est somme directe des $W \cap V_\chi$, et il est donc stable par $\widetilde{M}$ puisque ce groupe opère par des homothéties sur chaque V_χ.

Remarque. Supposons que $\mathrm{car}(k) = 2$. La proposition 1.4.10 entraîne que, si p est un nombre premier $\neq 2$, tout p-sous-groupe fini commutatif de G est contenu dans un tore maximal (et en particulier est contenu dans G^0). Cela donne des renseignements non triviaux sur la structure de G ; par exemple, d'après [St 75, th.2.27 et th.2.28], cela montre qu'aucun quotient de $G^{0\ \mathrm{red}}$ n'est un groupe simple de type $\mathsf{F}_4, \mathsf{E}_6, \mathsf{E}_7$ ou E_8 (ce qui résulte aussi des résultats du §2.6, qui éliminent également le type G_2).

Compléments. Mentionnons brièvement quelques autres propriétés de G :

(1.4.14) *Si la caractéristique de k est $\neq 2$, le groupe G est lisse.* [On vérifie que, si $X \in \mathrm{Lie}(G)$, alors $(1+tX)(1-tX)^{-1}$ appartient à $G(k)$ pour tout t tel que $1+tX$ et $1-tX$ soient inversibles ; on en déduit un morphisme d'un ouvert de la droite affine dans G ; comme la droite affine est un schéma réduit, l'image de ce morphisme est contenue dans G^{red} ; d'où, en dérivant en $t = 0$, le fait que $2X$ appartient à $\mathrm{Lie}(G^{\mathrm{red}})$; on a donc $\mathrm{Lie}(G^{\mathrm{red}}) = \mathrm{Lie}(G)$, ce qui entraîne la lissité de G.]

(1.4.15) *Si $x \in G(k)$, alors $x^2 \in G^0(k)$.* [Utiliser le fait que $(t+x)(t+x^{-1})^{-1}$ appartient à $G(k)$ pour tout t d'un ouvert de la droite affine contenant 0, et en déduire qu'il appartient à $G^0(k)$.]

(1.4.16) *Si k est de caractéristique 2, et si aucun des tenseurs θ_i n'est de type* (1.4.6) *ou* (1.4.7)*, alors tout $x \in G(k)$ d'ordre 2 appartient à $G^0(k)$.* [Utiliser le fait que $t \mapsto 1 + t(x+1)$ est un homomorphisme du groupe additif $\mathbf{G}_a$ dans G, donc dans G^0.]

Nous reviendrons au §3.3 sur ces deux dernières propriétés dans le cas particulier où G est un groupe unitaire.

§2 - Structure des groupes linéaires à tore maximal de type PL

2.1. **Enoncé du théorème, dans le cas irréductible.**

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 2, soit V un k-espace vectoriel de dimension finie, et soit G un sous-groupe algébrique *connexe lisse* de $\mathbf{GL}_V$ ayant la propriété suivante :

Les tores maximaux de G sont de type PL *au sens du* §1.2.

Nous dirons alors que (G, V) *est de type* PL.

On se propose de décrire tous les (G, V) de type PL, sous l'hypothèse que V est un G-module semi-simple, ce qui entraîne que G est un groupe réductif. Commençons par le cas où V est irréductible (le cas général sera traité au §2.6) :

Théorème 2.1.1 - *Soient V et G comme ci-dessus et supposons que V soit un G-module irréductible. Il n'y a alors que quatre possibilités* :

(a) $G = 1$ *et* $\dim V = 1$.

(b) $G = \mathbf{GL}_V$.

(c) *Il existe une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur V telle que G soit le groupe symplectique correspondant ; on a $G \simeq \mathbf{Sp}_N$ avec N pair > 0.*

(d) *Il existe une forme quadratique non dégénérée de rang pair $N > 2$ sur V telle que G soit le groupe spécial orthogonal correspondant ; on a $G \simeq \mathbf{SO}_N$.*

La démonstration sera donnée au §2.3 dans le cas non autodual et au §2.5 dans le cas autodual.

Remarques.

1) Dans (d), il est nécessaire d'exclure le cas $N = 2$ car l'action du groupe $\mathbf{SO}_2$ n'est pas irréductible : il y a deux droites stables. De même, on doit exclure les groupes $\mathbf{SO}_N$ avec N impair > 1, car leur action n'est pas semi-simple.

2) Si la caractéristique de k était $\neq 2$, on devrait modifier (d) en supprimant l'hypothèse que N est pair (mais en gardant celle que $N \neq 2$) ; on pourrait supprimer (a), car c'est le cas particulier de (d) où $N = 1$.

2.2. **Rappels sur les représentations irréductibles des groupes réductifs.**

On se place dans une situation plus générale qu'au §2.1 : on considère un groupe réductif[2] G sur un corps algébriquement clos k, et une représentation irréductible V de G (non nécessairement fidèle). On ne fait pas d'hypothèse sur la caractéristique de k.

Soit T un tore maximal de G, soit X le groupe des caractères de T, et soit Ω l'ensemble des poids de T dans V. Soit N le normalisateur de T dans G et soit $W = N/T$ le groupe de Weyl ; le groupe W agit sur T et sur X ; on a $W.\Omega = \Omega$.

Un élément α de Ω est dit *extrémal* si c'est un élément extrémal de l'enveloppe convexe de Ω dans $X_{\mathbf{R}} = X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, cf. [EVT II, p.10 et p.47]. Comme Ω est fini, cela équivaut à :

α n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $\Omega - \{\alpha\}$,

2. Dans toute la suite, on convient que " réductif " entraîne " connexe ".

ou encore :

Il existe un homomorphisme $f : X \to \mathbf{R}$ tel que $f(\alpha) > f(\beta)$ pour tout $\beta \in \Omega$ distinct de α.

Notons Ω_e l'ensemble des éléments extrémaux de Ω. C'est un ensemble non vide. De plus :

(2.2.1) *Le groupe W opère transitivement sur Ω_e.*

(2.2.2) *Si $\chi \in \Omega_e$, la multiplicité de χ est égale à* 1 (i.e. $\dim V_\chi = 1$).

(2.2.3) *La représentation V est déterminée à isomorphisme près par Ω_e.*

(2.2.4) *Remplacer V par sa duale remplace Ω par $-\Omega$ et Ω_e par $-\Omega_e$.*

(2.2.5) *Pour toute orbite Y de W dans X, il existe une représentation irréductible de G dont l'ensemble des poids extrémaux est Y.*

[D'après (2.2.3), cette représentation est unique, à isomorphisme près. On obtient ainsi une bijection entre les classes de représentations irréductibles de G et les orbites de W dans X.]

Note. Les énoncés ci-dessus sont traditionnellement énoncés d'une manière différente, cf. par exemple [Ch 58, exposé 16], [Ja 03, II.2], [MT 12, §15] et [St 67, §§12 - 14]) : on se ramène au cas où G est semi-simple et l'on choisit une chambre de Weyl C dans $X_{\mathbf{R}}$. Comme toute orbite de W dans X rencontre C en un point et un seul, on remplace Ω_e par son intersection avec C, que l'on appelle *le plus grand poids* de Ω (ou de la représentation) ; cela conduit à classer les représentations irréductibles de G par les éléments de $C \cap X_{\mathbf{R}}$. Dans les démonstrations qui suivent, il ne serait pas commode d'avoir à choisir C.

Exemples.

(2.2.6) On prend $G = \mathbf{GL}_n$, $T =$ tore diagonal, $X = \mathbf{Z}^n$ et $V =$ représentation standard de dimension n. L'ensemble Ω est alors la base canonique $\{e_1, ..., e_n\}$ de X ; son enveloppe convexe est le simplexe de sommets $e_1, ..., e_n$; ses points extrémaux sont les e_i, de sorte que $\Omega_e = \Omega$.

(2.2.7) On prend $G = \mathbf{Sp}_{2n}$ ou $G = \mathbf{SO}_{2n}$, et $V =$ représentation standard de dimension $2n$. L'ensemble Ω est de la forme $\{e_1, ..., e_n, -e_1, ..., -e_n\}$, où $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de X ; son enveloppe convexe est formé des $\sum x_i e_i$ avec $\sum |x_i| \leqslant 1$; c'est un "hyperoctaèdre" de dimension n (le polaire d'un n-cube). Ici encore, les points extrémaux sont les sommets et l'on a $\Omega_e = \Omega$.

Rappels.

Lorsque la caractéristique de k est 2, le groupe $\mathbf{SO}_{2n}$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathbf{Sp}_{2n}$. De façon plus précise, soit $C(x, y)$ une forme alternée non dégénérée sur V fixée par $\mathbf{Sp}_{2n}$, et soit T un tore maximal de $\mathbf{Sp}_{2n}$; on vérifie facilement qu'il existe une unique forme quadratique q sur V ayant les deux propriétés suivantes :

(2.2.7.1) La forme bilinéaire associée à q est C.

(2.2.7.2) On a $q(v) = 0$ pour tout vecteur propre v de T.

Cette forme quadratique est invariante par T. Le groupe orthogonal $\mathbf{O}_{2n}$ qu'elle définit est contenu dans $\mathbf{Sp}_{2n}$ et contient T ; c'est l'unique groupe orthogonal ayant ces deux propriétés ; son algèbre de Lie est indépendante du choix de q :

c'est l'ensemble des matrices de la forme $z + z^*$, où z^* désigne l'adjoint de z par rapport à la forme alternée C.

2.3. **Démonstration du théorème** 2.1.1 : **premiers cas.**

Nous revenons aux hypothèses et aux notations du §2.1. En particulier, k est algébriquement clos de caractéristique 2, G est un sous-groupe réductif de $\mathbf{GL}_V$, et V est un G-module semi-simple de type PL.

Soit T un tore maximal de G et soit Ω l'ensemble des poids de T dans V. Comme la représentation de T dans V est fidèle, Ω engendre le groupe X des caractères de T. Par hypothèse, T est de type PL ; il existe donc une partie libre ω de Ω telle que Ω soit contenu dans $\{0\} \cup \omega \cup -\omega$, cf. §1.1.b) ; il en résulte que ω est une $\mathbf{Z}$-base de X. Il y a différentes possibilités, que nous allons considérer séparément :

(2.3.1) *On a* $\omega = \varnothing$.

Dans ce cas, $\Omega = \{0\}$, et $T = 1$, d'où $G = 1$; c'est le cas (a) du théorème 2.1.1.

A partir de maintenant, on suppose $\omega \neq \varnothing$. Considérons d'abord le cas où $\Omega \cap -\omega = \varnothing$. Ce cas se divise en deux :

(2.3.2) *Le cas* $\Omega = \{0\} \cup \omega$.

L'enveloppe convexe de Ω est alors le simplexe dont l'ensemble des sommets est Ω. Tous les sommets sont extrémaux. Or, W fixe 0 ; comme $\omega \neq \varnothing$, W n'agit pas transitivement sur les points extrémaux. D'après (2.2.1), ce cas est impossible.

(2.3.3) *Le cas* $\Omega = \omega$.

Tous les éléments de ω sont extrémaux ; leur multiplicité est 1, d'après (2.2.2). Si l'on pose $n = |\omega|$, on a $\dim V = n = \dim T$, d'où le fait que T est un tore maximal de $\mathbf{GL}_V$. De plus, le commutant de G dans $\mathbf{GL}_V$ est réduit aux homothéties. Nous allons voir que cela entraîne $G = \mathbf{GL}_V$, autrement dit le cas (b) du théorème 1. Pour cela, remarquons que, d'après (2.2.1), W permute transitivement les éléments $\{e_1, ..., e_n\}$ de ω, lesquels forment une base de X. On peut donc identifier W à un sous-groupe transitif du groupe symétrique S_n. De plus, W est engendré par des réflexions ; or les seuls éléments de S_n qui soient des réflexions sont les transpositions, et le seul sous-groupe transitif de S_n qui soit engendré par des transpositions est S_n, cf. e.g. [Hu 67, p.171]. On a donc $W = S_n$. Cela entraîne que le groupe dérivé G' de G est de type A_{n-1}, donc de dimension $n^2 - 1$. Comme G contient le groupe des homothéties, on a

$$\dim G = 1 + \dim G' = n^2 = \dim \mathbf{GL}_n,$$

d'où $G = \mathbf{GL}_n$; c'est le cas (b) du théorème 2.1.1.

2.4. **Le cas autodual** : **structure du groupe de Weyl.**

Nous venons de démontrer le théorème 2.1.1 dans le cas particulier où Ω ne rencontre pas $-\omega$. Supposons maintenant que $\Omega \cap -\omega \neq \varnothing$. Dans ce cas, 0 n'est pas extrémal, et les autres éléments de Ω le sont. On a donc

$$\Omega_e = \Omega \text{ si } 0 \notin \Omega \quad \text{et} \quad \Omega_e = \Omega - \{0\} \text{ si } 0 \in \Omega.$$

Le groupe W opère transitivement sur Ω_e ; or $\Omega_e \cap -\Omega_e$ est stable par W, et non vide ; il est donc égal à Ω_e, ce qui signifie que Ω contient $-\omega$. On a, soit $\Omega = \{0\} \cup \omega \cup -\omega$, soit $\Omega = \omega \cup -\omega$, autrement dit il existe une base $\{e_1, ..., e_n\}$ de X telle que $\Omega_e = \{e_1, ..., e_n, -e_1, ..., -e_n\}$. D'après (2.2.4), le fait que $\Omega_e = -\Omega_e$ signifie que la représentation V est *autoduale* (isomorphe à sa duale), ce qui n'était pas le cas au §2.3.

Le groupe W permute les e_i, aux signes près. Il est donc contenu dans le groupe noté usuellement $\{\pm 1\}^n.S_n$, autrement dit le groupe de Weyl d'un système de racines de type C_n : produit semi-direct de S_n par le groupe $I = \{\pm 1\}^n$. Les éléments de I sont les $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $\lambda_i = \pm 1$ pour tout i ; on les identifie aux automorphismes de X de la forme $\{e_i \mapsto \lambda_i e_i\}$. Les (λ_i) avec $\prod \lambda_i = 1$ forment un sous-groupe J de I d'indice 2. D'où un sous-groupe $J.S_n$ de $I.S_n$ d'indice 2.

Proposition 2.4.1 - *Le groupe W est égal, soit à $I.S_n = \{\pm 1\}^n.S_n$, soit à $J.S_n$.*
[Autrement dit, W est isomorphe, soit au groupe de Weyl d'un système de racines de type C_n, soit à celui d'un système de type D_n.]

Le cas $n = 1$ est clair. On va donc supposer $n > 1$ dans ce qui suit.

La démonstration repose sur les deux propriétés suivantes de W :

(2.4.2) *Il est engendré par des réflexions* (lorsqu'on le considère comme un groupe d'automorphismes de $X_{\mathbf{R}} \simeq \mathbf{R}^n$).

(2.4.3) *Il opère transitivement sur* $\Omega_e = \{e_1, ..., e_n, -e_1, ..., -e_n\}$.

[La première propriété est commune à tous les groupes de Weyl. La seconde résulte de (2.2.1).]

Noter, à propos de (2.4.2), que les réflexions appartenant à $I.S_n$ sont de trois types (correspondant aux racines courtes et aux racines longues de C_n) :

(2.4.4) t_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$: $e_i \leftrightarrow -e_i$ et $e_\ell \leftrightarrow e_\ell$ si $\ell \neq i$.
(2.4.5) s_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$: $e_i \leftrightarrow e_j$ et $e_\ell \leftrightarrow e_\ell$ si $\ell \neq i, j$.
(2.4.6) s'_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$: $e_i \leftrightarrow -e_j$ et $e_\ell \leftrightarrow e_\ell$ si $\ell \neq i, j$.

L'image de t_i dans S_n est l'identité ; celle de s_{ij} (resp. de s'_{ij}) est la transposition (ij).

Démonstration de la proposition 2.4.1.

Lemme 2.4.7 - (a) *La projection $W \to S_n$ est surjective.*
(b) *Pour tout couple (i, j) avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$, W contient s_{ij} ou s'_{ij}.*

Démonstration. La démonstration de (a) est la même que celle utilisée pour (2.3.3) : l'image de W dans S_n est un groupe transitif qui est engendré par des transpositions, donc c'est S_n. Pour (b), on remarque qu'il existe au moins un couple (i, j) tels que W contienne s_{ij} ou s'_{ij} : sinon, l'image de W dans S_n serait triviale, ce qui est impossible puisque $n > 1$. Par conjugaison, on en déduit que tous les couples (i, j) ont cette propriété : en effet, S_n opère transitivement sur les couples (i, j) avec $i \neq j$.

Lemme 2.4.8 - *Il existe des* $\lambda_i \in \{\pm 1\}$ *tels que* W *contienne le groupe des permutations de* $\{\lambda_1 e_1, ..., \lambda_n e_n\}$.

Démonstration. Soit i tel que $1 < i \leqslant n$. D'après le lemme 2.4.7 (b), appliqué au couple $(i-1, i)$, il existe dans W une réflexion σ_i qui permute e_{i-1} et $\mu_i e_i$, avec $\mu_i = \pm 1$, tout en laissant fixes les e_ℓ avec $\ell < i-1$ ou $\ell > i$. Posons :

$\varepsilon_1 = e_1$,
$\varepsilon_2 = \sigma_1(\varepsilon_1) = \mu_1 e_2$,
$\varepsilon_3 = \sigma_2(\varepsilon_2) = \mu_2\sigma_2(e_2) = \mu_1\mu_2 e_3$,
....

La réflexion σ_i permute ε_{i-1} et ε_i, et fixe les autres ε_l. Or les transpositions $(12), (23), (34), ...$ engendrent le groupe symétrique S_n. D'où le lemme, en prenant :

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \mu_1,\ \lambda_3 = \mu_1\mu_2,\quad ...$

Fin de la démonstration de la proposition 2.4.1. D'après le lemme 2.4.8, on peut supposer que les e_i ont été choisis tels que leur groupe de permutations soit contenu dans W. On a donc $S_n \subset W$. Cette inclusion est stricte, à cause de (2.4.3). On en déduit, d'après (2.4.2), que W contient au moins une réflexion n'appartenant pas à S_n, i.e. du type t_i ou du type s'_{ij}, cf. (2.4.4) et (2.4.6).

Supposons d'abord que W contienne l'une des t_i. Vu la transitivité de S_n opérant sur $[1, n]$, W contient tous les t_i. Or ceux-ci engendrent le groupe $I = \{\pm 1\}^n$. On a donc $W = I.S_n$.

Supposons maintenant que W contienne l'une des s'_{ij}. Vu la transitivité de S_n sur les couples (i, j) avec $i \neq j$, le groupe W contient tous les s'_{ij}, et il contient aussi les produits $s_{ij}s'_{ij} = t_i t_j$. Or les $t_i t_j$ engendrent le sous-groupe J de I. Donc W contient $J.S_n$, et, comme ce groupe est d'indice 2 dans $I.S_n$, on a, soit $W = J.S_n$, soit $W = I.S_n$.

2.5. **Le cas autodual : fin de la démonstration du théorème 2.1.1.**

On conserve les notations et hypothèses du §2.4.

Puisque la représentation V est autoduale, le groupe G ne contient pas les homothéties. C'est donc un groupe semi-simple.

Considérons d'abord le cas $n = 1$. Le groupe G est de rang 1, et la représentation irréductible V a pour poids, soit $\{e_1, -e_1\}$, soit $\{e_1, 0, -e_1\}$; de plus e_1 est une base du groupe X des caractères de T. Le premier cas conduit à $G = \mathbf{SL}_2 = \mathbf{Sp}_2$, la représentation V de G étant la représentation naturelle de dimension 2. Le second cas est impossible, car toute représentation irréductible non triviale de $\mathbf{SL}_2$ en caractéristique 2 est un produit tensoriel de transformées de Frobenius de la représentation standard, et 0 n'en est pas un poids.

A partir de maintenant, nous supposons $n > 1$. D'après la proposition 2.4.1, il y a deux possibilités :

(2.5.1) *On a* $W = I.S_n$; *le système de racines de* G *est de type* B_n *ou* C_n.
(2.5.2) *On a* $W = J.S_n$; *le système de racines de* G *est de type* D_n.

[Pour $n = 2$, le type D_2 doit être interprété comme $\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1$; cela traduit le fait que $\mathbf{SO}_4$ est isogène à $\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2$. C'est le seul cas où le système de racines n'est pas irréductible.]

Il reste à préciser la structure du groupe G (pas seulement à isogénie près), et celle de sa représentation V. Nous allons pour cela déterminer le système de racines R de G. Soit α une racine ; c'est un poids de T dans $\mathrm{Lie}(G) \subset \mathrm{End}(V)$, et c'est donc la différence de deux éléments de Ω ; on en déduit que α est de l'un des types suivants :

(2.5.3) $\alpha = \pm e_i \pm e_j$ avec $i \neq j$;
(2.5.4) $\alpha = \pm 2e_i$;
(2.5.5) $\alpha = \pm e_i$.

[Le troisième cas ne peut se présenter que si 0 est un poids de V.]

Lemme 2.5.6 - *Supposons $n \geqslant 3$. Il y a au plus trois possibilités pour le système de racines R :*

(i) *c'est l'ensemble de tous les éléments de X de type* (2.5.3).

(ii) *c'est l'ensemble de tous les éléments de X de type* (2.5.3)*, et de tous ceux de type* (2.5.4).

(iii) *c'est l'ensemble de tous les éléments de X de type* (2.5.3)*, et de tous ceux de type* (2.5.5).

Démonstration. La proposition 2.4.1 montre que W opère transitivement sur chacun des trois types. De plus, les types (2.5.4) et (2.5.5) ne peuvent pas coexister, car aucune racine n'est le double d'une autre. Le type (2.5.3) doit être présent, car sinon le système de racines serait de type $\mathsf{A}_1 \times ... \times \mathsf{A}_1$, ce qui n'est pas le cas, on l'a vu [c'est ici que l'hypothèse $n \geqslant 3$ est utilisée : lorsque $n = 2$, le type D_2 est isomorphe à $\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1$]. D'où le lemme.

Lemme 2.5.7 - *Conservons les hypothèses et notations du lemme* 2.5.6*. Alors :*

Dans le cas (i)*, on a $G \simeq \mathbf{Sp}_{2n}$ et V est la représentation naturelle de G de dimension $2n$.*

Dans le cas (ii)*, on a $G \simeq \mathbf{SO}_{2n}$ et V est la représentation naturelle de G de dimension $2n$.*

Le cas (iii) *est impossible.*

Démonstration. Dans le cas (i), le lemme 2.5.6 montre que le système de racines R est celui du type C_n, les poids étant ceux de la représentation naturelle. D'où le résultat. Même argument pour le cas (ii), avec C_n remplacé par D_n. Quant au cas (iii), il donne un système de racines de type B_n, avec pour poids ceux de la représentation naturelle de dimension $2n + 1$; en caractéristique 2, cette représentation n'est pas irréductible : la représentation irréductible correspondant aux poids extrémaux $\pm e_i$ est le quotient de la précédente par l'unique sous-espace stable de dimension 1 ; l'élément 0 de X n'en est pas un poids, et par conséquent les $\pm e_i$ ne peuvent pas en être des poids [d'ailleurs l'image de $\mathbf{SO}_{2n+1}$ dans cette représentation n'est pas de type B_n : c'est le groupe $\mathbf{Sp}_{2n}$, qui est de type C_n].

Le lemme 2.5.7 entraîne le théorème 2.1.1, lorsque $n \geqslant 3$. Le cas $n = 2$ se traite de façon analogue. La seule différence est que, dans l'énoncé du lemme 2.5.6, il faut ajouter les deux cas suivants :

(iv) *le système R est formé des éléments de X de la forme $\pm 2e_i$;*

(v) *le système R est formé des éléments de X de la forme $\pm e_i$.*

Les deux cas conduisent à un groupe G de type $\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1$; le premier donne pour V le produit tensoriel des deux représentations naturelles de dimension 2 ; cela donne le groupe $\mathbf{SO}_4$. Le second cas ne serait possible que si 0 était un poids de V, ce qui ne peut pas se produire. On a donc bien obtenu tous les cas énumérés dans le théorème 2.1.1.

Remarque. Une curieuse conséquence du théorème 2.1.1 est que, si V est irréductible non triviale, alors 0 *n'est pas un poids de T*. Ou, de façon équivalente :

(2.5.8) *Si V est une représentation semi-simple de type PL d'un groupe linéaire connexe lisse G, tout élément de V qui est fixé par un tore maximal de G est fixé par G.*

C'est là une propriété spéciale à la caractéristique 2. Il serait intéressant d'en avoir une démonstration *a priori*.

2.6. **Le cas semi-simple.**

Passons maintenant au cas où V est une représentation semi-simple, mais non nécessairement irréductible, du groupe G. Comme au §2.1, nous supposons que la représentation considérée est *fidèle*, i.e. qu'elle donne un plongement de G dans $\mathbf{GL}_V$; d'après [SGA 3, VI_B, cor.1.4.2], cela revient à dire que son noyau, au sens de la théorie des schémas, est trivial.

De façon plus précise, considérons le cas où la représentation V se décompose en :

(2.6.1) $V = \oplus_{i \in I} V_i$,

où chaque V_i est irréductible, et :

(2.6.2) *Si $i \neq j$, V_i n'est isomorphe, ni à V_j, ni à sa duale.*

Notons G_i l'image de G dans $\mathbf{GL}_{V_i}$. Le groupe G est un sous-groupe du produit direct $\prod_{i \in I} G_i$.

Théorème 2.6.3 - *Si la représentation V est de type PL, on a $G = \prod_{i \in I} G_i$; en particulier, G est isomorphe à un produit de groupes de type $\mathbf{GL}, \mathbf{Sp}$ et $\mathbf{SO}$.*

Démonstration. Soit T un tore maximal de G, et soit T_i l'image de T dans G_i. On a $T \subset \prod_{i \in I} T_i$.

Lemme 2.6.4 - *On a $T = \prod_{i \in I} T_i$.*

Démonstration du lemme 2.6.4. Soit X_i le groupe des caractères de T_i, et soit X celui de T. La projection $T \to T_i$ donne une injection $X_i \to X$, ce qui nous permet d'identifier les X_i à des sous-groupes de X ; le fait que $T \to \prod T_i$ soit injectif montre que X est engendré par les X_i. Le lemme 2.6.4 revient à dire que $\oplus\, X_i \to X$ est injectif, i.e. que X est somme directe des X_i ; c'est ce que nous allons démontrer.

Puisque les V_i sont de type PL, le théorème 2.1.1 montre qu'il existe une base ω_i de X_i qui est formée de poids de V_i, donc de poids de V. On a :

(2.6.5) *Si $i \neq j$, on a $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$ et $\omega_i \cap -\omega_j = \varnothing$.*

En effet, supposons que ω_i et ω_j (resp. $-\omega_j$) ait un élément commun. Comme cet élément est un élément extrémal de V_i et de V_j (resp. de la duale V_j' de V_j), cela entraîne, d'après (2.2.3) et (2.2.4) que V_i est isomorphe à V_j (resp. à sa duale), ce qui contredit l'hypothèse (2.6.2).

En particulier, les ω_i sont disjoints. Soit $\omega = \cup\, \omega_i$. D'après (2.6.5), on a $\omega \cap -\omega = \varnothing$. D'après (1.1.3), cela entraîne que ω est une partie libre de X, d'où le fait que X est somme directe des X_i.

Fin de la démonstration du théorème 2.6.3. Le lemme 2.6.4 montre que le rang (dimension d'un tore maximal) de G est égal à celui de $\prod G_i$. L'égalité $G = \prod G_i$ en résulte, en vertu du résultat suivant :

Proposition 2.6.6 - *Soit H_i une famille finie de groupes réductifs, et soit H un sous-groupe réductif de $\prod H_i$ ayant les deux propriétés suivantes* :

(2.6.7) *Les projections $H \to H_i$ sont surjectives.*

(2.6.8) *Le rang de H est égal à la somme de ceux des H_i.*

On a alors $H = \prod H_i$.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où il y a deux groupes H_1 et H_2. Si l'on pose $N = \mathrm{Ker}(H \to H_1) = H \cap \{1\} \times H_2$, le rang de N est égal à la différence de ceux de H et de H_1, autrement dit à celui de H_2. Mais N est un sous-groupe normal de H_2. Le rang de H_2/N est donc 0, ce qui n'est possible que si $N = H_2$, auquel cas $H = H_1 \times H_2$.

Corollaire 2.6.9 - *Tout sous-groupe réductif V de $\prod H_i$ de rang maximum est produit direct des $V \cap H_i$.*

[Rappelons qu'un sous-groupe d'un groupe réductif G est dit *de rang maximum* si son rang est égal à celui de G.]

Démonstration. Soit V_i la projection de V sur le i-ième facteur. En appliquant la proposition précédente au produit des V_i, on voit que $V = \prod V_i$ et $V_i = V \cap H_i$.

§3 - Groupes unitaires sur un corps algébriquement clos de caractéristique 2

A partir de maintenant, le corps de base k est supposé de caractéristique 2.

3.1. Algèbres à involution et groupes unitaires - préliminaires.

Soit A une *algèbre à involution* sur k. Rappelons que cela signifie que A est une k-algèbre associative, à élément unité, munie d'une application k-linéaire $a \mapsto a^*$ telle que $a^{**} = a$ et $(ab)^* = b^* a^*$ quels que soient $a, b \in A$. On suppose en outre que $\dim_k A < \infty$.

Nous associerons à A deux groupes algébriques :

(3.1.1) Son *groupe multiplicatif* $\mathbf{GL}_{1,A}$. Il représente le foncteur

$k' \mapsto (A \otimes_k k')^\times$, où k' parcourt la catégorie des k-algèbres commutatives ;

en particulier le groupe de ses k-points est $A^\times$.

C'est un sous-groupe algébrique du groupe $\mathbf{GL}_V$, où V est le k-espace vectoriel sous-jacent à A. C'est un groupe connexe et lisse, qui est réductif si A est une algèbre absolument semi-simple ; il est muni d'une anti-involution $g \mapsto g^*$, déduite de celle de A.

(3.1.2) Son *groupe unitaire schématique* U_A^{sch} ; c'est le sous-groupe du précédent formé des points u tels que $uu^* = 1$. Ce n'est pas en général un groupe lisse : lorsque $A = k$, on a $\mathbf{GL}_{1,A} = \mathbf{G}_m$ et $U_A^{\mathrm{sch}} = \boldsymbol{\mu}_2$.

Soit U_A le schéma réduit associé à U_A^{sch}. Lorsque c'est un sous-schéma en groupes de U_A^{sch}, nous l'appellerons le *groupe unitaire* de A ; cela se produit lorsque k est parfait (cf. [SGA 3, exposé $\mathrm{VI_A}$, §0.2]), ou, plus généralement, lorsque A est déduit, par extension des scalaires, d'une algèbre à involution sur un corps parfait (exemple : $A = k[G]$, où G est un groupe fini, cf. §5).

3.1.3. *Algèbres de Lie.* L'algèbre de Lie de U_A^{sch} est l'espace vectoriel H_A des *éléments hermitiens* de A, autrement dit des éléments $a \in A$ tels que $a^* = a$, le crochet étant défini par la formule $[a, a'] = aa' + a'a$: cela résulte de la définition de U_A^{sch}, appliquée à l'algèbre $k' = k[x]/(x^2)$ des nombres duaux. L'algèbre de Lie de U_A est une sous-algèbre de H_A. Nous en donnerons quelques propriétés plus loin (cf. proposition 3.3.1), mais je n'en connais pas de description générale, mis à part le cas, dû à Merkurjev, où A est l'algèbre d'un groupe fini ; dans ce cas, on verra au §5.1 que $\mathrm{Lie}(U_A)$ est un hyperplan de $\mathrm{Lie}(U_A^{\mathrm{sch}})$.

3.2. **Sous-algèbres étales et tores maximaux.**

Jusqu'à la fin du §3, on suppose que k est *algébriquement clos* (et, bien sûr, de caractéristique 2).

Soit A une k-algèbre à involution de dimension finie, et soit C une k-sous-algèbre commutative de A satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(3.2.1) *Elle est stable par l'involution de A.*

(3.2.2) *C'est une algèbre étale*, autrement dit (puisque k est algébriquement clos), c'est une algèbre diagonalisable, i.e. un produit de copies de k, cf. [A V, §6, n° 3].

D'après (3.2.2), on peut écrire C sous la forme $C = k^I$, où I est un ensemble fini que l'on peut interpréter, soit comme le spectre de C, soit comme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(C, k)$, soit comme l'ensemble des idempotents indécomposables de C. L'involution de C opère sur I ; on peut donc décomposer I en deux parties :

I_0 = éléments de I fixés par $i \mapsto i^*$;

$I_1 = I - I_0$ = éléments i de I tels que $i^* \neq i$.

Le groupe unitaire U_C de C est formé des familles $(u_i)_{i \in I}$ telles que $u_i = 1$ si $i \in I_0$, et $u_i u_{i^*} = 1$ si $i \in I_1$. Si l'on décompose I_1 sous la forme $I_1 = J \cup J^*$, avec $J \cap J^* = \varnothing$, on voit que les valeurs de u_i pour $i \in J$ déterminent toutes les autres, et peuvent être choisies arbitrairement. En particulier, *U_C est un sous-tore de U_A*, isomorphe à $(\mathbf{G}_m)^J$. De façon plus précise, pour tout $i \in I$, l'application $e_i : u \mapsto u_i$ est un caractère de U_C ; on a $e_i + e_{i^*} = 0$ et $e_i = 0$ si $i \in I_0$; les $(e_i)_{i \in J}$ forment une base ω_J du groupe des caractères $X(U_C)$ de U_C.

Soit maintenant V un C-module de dimension finie sur k. Le groupe U_C opère sur V.

Lemme 3.2.3 - *L'action du tore U_C sur V est de type PL, au sens du §1.2.*

Démonstration. La décomposition de C en produit donne une décomposition correspondante de V en produit de V_i. Les poids de U_C dans V sont les e_i, avec multiplicité $\dim V_i$; ils sont contenus dans l'ensemble $\{0\} \cup \omega_J \cup -\omega_J$, où ω_J est la base de $X(U_C)$ définie ci-dessus. La condition (1.1.2) est donc satisfaite.

Lemme 3.2.4 - *Si T est un tore maximal de U_A, il existe une sous-algèbre C de A, satisfaisant aux conditions* (3.2.1) *et* (3.2.2)*, telle que $T = U_C$.*

Démonstration. Soit C la sous-algèbre de A engendrée par le groupe $T(k)$ des k-points de T. Comme T est un tore, cette algèbre est étale : c'est là une propriété générale des sous-tores de $\mathbf{GL}_n$. Comme T est stable par l'involution de A, il en est de même de C. Les conditions (3.2.1) et (3.2.2) sont donc satisfaites, et il est clair que T est contenu dans U_C ; comme T est un tore maximal, on a donc $T = U_C$.

Les lemmes 3.2.3 et 3.2.4 entraînent :

Proposition 3.2.5 - *Soit V un A-module à gauche de dimension finie sur k. Si T est un tore maximal de U_A, l'action de T sur V est de type PL.*
[Précisons que l'on fait opérer $A^\times$ et U_A sur V par multiplication à gauche.]

Noter que cela s'applique en particulier au cas où $V = A$, avec sa structure naturelle de A-module à gauche : on a $U_A \subset \mathbf{GL}_{1,A} \subset \mathbf{GL}_V$, et l'on voit que *les tores maximaux de U_A sont de type* PL, comme annoncé au §1.3.4.

Remarque 3.2.6. Ce dernier résultat peut aussi se déduire de la proposition 1.4.9, appliquée au groupe U_A^{sch}. En effet, ce groupe est le fixateur d'une famille de tenseurs quadratiques de $V = A$. De façon plus précise, soit (e_i) une base de V et soit (ℓ_j) une base du dual V' de V ; notons $\theta_i \in \mathrm{End}(V)$ la multiplication à droite par e_i et notons $\theta_j \in \otimes^2 V'$ la forme bilinéaire $(a, b) \mapsto \ell_j(a^* b)$. On vérifie facilement que :
le fixateur des θ_i est $\mathbf{GL}_{1,A}$;
le fixateur des θ_i et des θ_j est U_A^{sch}.

3.3. **La composante neutre du groupe unitaire.**

Soit U_A^0 la composante neutre du groupe U_A. C'est la structure de ce groupe qui va nous intéresser. On a tout d'abord :

Proposition 3.3.1 - (a) *Si $u \in U_A$ est tel que $u^2 = 1$, on a $u \in U_A^0$ et $1 + u \in \mathrm{Lie}(U_A)$.*

(b) *Si $x \in A$ commute à x^*, on a $x + x^* \in \mathrm{Lie}(U_A)$; si de plus x est inversible, on a $x^{-1}x^* \in U_A^0$.*

[Dans cet énoncé, ainsi que dans les suivants, on identifie les groupes lisses U_A et U_A^0 à l'ensemble de leurs k-points, de sorte que "$u \in U_A$" signifie $u \in U_A(k)$, autrement dit "$u \in A$ et $uu^* = 1$".]

Démonstration de (a). Ecrivons u sous la forme $u = 1 + \varepsilon$; comme $u^2 = 1$, on a $\varepsilon^2 = 0$. Puisque u est unitaire, on a $u^* = u^{-1} = u$, d'où $\varepsilon^* = \varepsilon$. Si t est un

élément de k, posons $u_t = 1 + t\varepsilon$; on a $u_t u_t^* = u_t^2 = 1$. L'application $f : t \mapsto u_t$ se prolonge en un homomorphisme du groupe additif $\mathbf{G}_a$ dans le groupe U_A^{sch} ; comme $\mathbf{G}_a$ est connexe et lisse, l'image de f est contenue dans U_A^0 ; on a donc $u_t \in U_A^0$ pour tout t, d'où $u = u_1 \in U_A^0$; comme la dérivée de f en 0 est ε, on a $\varepsilon \in \mathrm{Lie}(U_A)$.

Démonstration de (b). Soit C la sous-algèbre de A engendrée par x et x^*. C'est une algèbre commutative, qui est stable par l'involution de A. Pour tout $y \in C^\times$, l'élément $y^{-1}y^*$ est unitaire. L'application $y \mapsto y^{-1}y^*$ définit un homomorphisme $\varphi_C : \mathbf{GL}_{1,C} \to U_A$ dont l'application tangente en l'élément neutre est $y \mapsto y + y^*$. Cela montre que $\mathrm{Lie}(U_A)$ contient tous les $y + y^*$, et en particulier contient $x + x^*$. De plus $\mathbf{GL}_{1,C}$ est connexe, puisque c'est un ouvert dense d'un espace affine ; l'image de φ_C est donc contenue dans U_A^0.

Corollaire 3.3.2 - *Pour tout $u \in U_A$, on a $u^2 \in U_A^0$ et $u + u^{-1} \in \mathrm{Lie}(U_A)$.*

On applique (b) à $x = u^{-1}$, d'où $x^* = u$, ce qui donne $x^{-1}x^* = u^2$.

Corollaire 3.3.3 - *Le groupe U_A/U_A^0 est un 2-groupe abélien élémentaire.*

En effet, c'est un groupe fini dont tous les éléments sont de carré 1 d'après le corollaire précédent ; on sait qu'un tel groupe est abélien (utiliser l'identité $xyx^{-1}y^{-1} = x^2(x^{-1}y)^2(y^{-1})^2$.)

La condition d'engendrement.

Soit A' la sous-algèbre de A engendrée par les k-points de U_A^0. Cette algèbre est stable par l'involution de A, et l'on a $U_{A'}^0 = U_A^0$; autrement dit, on ne change pas le groupe U_A^0 lorsqu'on remplace A par A'. Nous pourrons donc par la suite nous borner aux algèbres A satisfaisant à la condition :

(3.3.4) *On a $A = A'$, autrement dit A est engendrée comme k-algèbre par les k-points du groupe U_A^0.*

3.4. **Exemple** : **le cas où A est une algèbre semi-simple.**

Ce cas ne présente pas de difficulté : on décompose A en produit d'algèbres de matrices ; les différents facteurs sont, soit stables par l'involution, soit permutés deux-à-deux ; on est ainsi ramené à déterminer les involutions sur une algèbre de matrices $\mathbf{M}_n(k)$, $n \geqslant 1$. Lorsque $n = 1$ on a $\mathbf{M}_1(k) = k$, avec l'involution triviale. Pour $n > 1$, le fait que la caractéristique soit 2 entraîne que l'involution est associée à une forme bilinéaire B qui est symétrique et non dégénérée. Si B est alternée, n est pair, on a $U_A^0 \simeq \mathbf{Sp}_n$, et la condition (3.3.4) est satisfaite. Si B n'est pas alternée, l'ensemble des $x \in k^n$ tel que $B(x, x) = 0$ est un hyperplan qui est stable par U_A ; la condition (3.3.4) n'est donc pas satisfaite. D'où :

Proposition 3.4.1 - *Si l'algèbre à involution A est semi-simple, et satisfait à la condition d'engendrement* (3.3.4)*, elle est produit direct d'algèbres à involution A_i de l'un des trois types suivants* :

(3.4.2) *Le corps k. On a alors $U_{A_i}^{\mathrm{sch}} = \boldsymbol{\mu}_2$ et $U_{A_i} = 1$.*

(3.4.3) *Le produit $\mathbf{M}_{n_i} \times \mathbf{M}_{n_i}^{\mathrm{opp}}$ d'une algèbre de matrices par l'algèbre opposée, l'involution étant $(a, b) \mapsto (b, a)$. On a alors $U_{A_i}^{\mathrm{sch}} = U_{A_i} = \mathbf{GL}_{n_i}$.*

(3.4.4) *Une algèbre de matrices* $\mathbf{M}_{2n_i}$ *munie d'une involution symplectique. On a alors* $U_{A_i}^{\mathrm{sch}} = U_{A_i} \simeq \mathbf{Sp}_{2n_i}$.

Noter que cela entraîne que U_A est un groupe réductif ; en particulier, c'est un groupe connexe.

3.5. **Structure de certains sous-groupes de U_A, pour A semi-simple.**

On conserve les notations du § précédent ; en particulier, A est semi-simple, et on la décompose en produit d'algèbres à involution indécomposables :

$A = \prod A_i$,

où les A_i sont de l'un des trois types décrits dans la proposition 3.4.1. On a $U_A = \prod U_{A_i}$.

Théorème 3.5.1 - *Soit H un sous-groupe algébrique lisse et connexe de U_A satisfaisant à la condition* :

(3.5.2) *Les éléments de $H(k)$ engendrent l'algèbre A.*

Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(3.5.3) *L'action de H sur A par multiplication à gauche est de type* PL.

(3.5.4) *Le groupe H est réductif de rang égal à celui de U_A.*

(3.5.5) *Le groupe H est produit direct de ses projections H_i sur les U_{A_i}, et l'on a* :

$H_i = U_{A_i}$ *dans les cas (3.4.2) et (3.4.3),*

$H_i = U_{A_i}$ *ou* $H_i \simeq \mathbf{SO}_{2n_i}$ *dans le cas (3.4.4) où* $U_{A_i} \simeq \mathbf{Sp}_{2n_i}$.

Démonstration. S'il y a des facteurs de A de type (3.4.2), on peut les supprimer sans changer ni U_A ni H. Supposons donc qu'il n'y ait aucun tel facteur.

On a évidemment (3.5.5) $\Rightarrow$ (3.5.4). D'autre part, si (3.5.4) est satisfaite, les tores maximaux de H sont des tores maximaux de U_A, et l'on a vu que ceux-ci sont de type PL, cf. proposition 3.2.5 ; cela montre que (3.5.4) entraîne (3.5.3). Reste à prouver que (3.5.3) implique (3.5.5). Supposons donc que (3.5.3) soit satisfaite, et, pour chaque indice i, soit V_i l'espace vectoriel défini de la manière suivante :

Si A_i est de type (3.4.3), on prend $V_i = k^{n_i}$.

Si A_i est de type (3.4.4), on prend $V_i = k^{2n_i}$.

Dans chaque cas, il y a une action naturelle de U_{A_i} sur V_i. On en déduit une action de U_A^0 sur $V = \oplus_{i \in I} V_i$. De plus, les V_i sont des H-modules irréductibles d'après (3.5.2). On peut donc appliquer au H_i-module V_i le théorème 2.1.1 du §2.1 ; cela donne les assertions sur la structure de H_i. D'autre part, un argument analogue à celui fait ci-dessus montre que, si $i \neq j$, la représentation V_i de G n'est isomorphe, ni à V_j, ni à sa duale. D'après le théorème 2.6.3, cela entraîne que H est le produit des H_i, ce qui achève la démonstration.

3.6. **Structure de U_A^0 dans le cas général.**

Soit A une k-algèbre à involution de dimension finie.

Théorème 3.6.1 - *Il existe une suite exacte*

(3.6.2) $\quad 1 \to N \to U_A^0 \to H \to 1,$

où N est unipotent connexe, et où H est un produit de groupes H_i isomorphes, soit à $\mathbf{GL}_{n_i}$, soit à $\mathbf{Sp}_{2n_i}$, soit à $\mathbf{SO}_{2n_i}$.

[Rappelons que k est supposé algébriquement clos ; le cas plus général où k est parfait sera examiné au §4.]

Démonstration. On peut supposer que A satisfait à la condition d'engendrement (3.3.4). Faisons cette hypothèse, et soit $\mathfrak{r}$ le radical de A. L'algèbre $A/\mathfrak{r}$ est une algèbre à involution semi-simple ; son groupe unitaire $U_{A/\mathfrak{r}}$ est un groupe réductif, cf. §3.4. Soit $\pi : U_A^0 \to U_{A/\mathfrak{r}}$ l'homomorphisme défini par $A \to A/\mathfrak{r}$, soit N le noyau de π (au sens schématique) et soit H son image ("image schématique", i.e. plus petit sous-groupe de $U_{A/\mathfrak{r}}$ contenant l'image par π des k-points de U_A^0). On a alors la suite exacte (3.6.2) ; en effet, la proposition 2.5.2 de [SGA 3, exposé VI A, édition révisée, p.319] montre que l'homomorphisme $U_A^0/N \to U_{A/\mathfrak{r}}$ est une immersion fermée, et son image est égale à H car U_A^0 est réduit (parce que quotient d'un schéma réduit), et donc lisse (car c'est un schéma en groupes sur un corps parfait) [3]. Il reste à prouver :

Lemme 3.6.3 - *Le groupe N est unipotent connexe. Le groupe H satisfait aux propriétés du théorème 3.5.1 relativement à $A/\mathfrak{r}$; en particulier, c'est un produit de groupes H_i isomorphes, soit à $\mathbf{GL}_{n_i}$, soit à $\mathbf{Sp}_{2n_i}$, soit à $\mathbf{SO}_{2n_i}$.*

Démonstration du lemme 3.6.3. Le groupe N est un sous-groupe du groupe dont les k-points sont de la forme $1+x$ avec $x \in \mathfrak{r}$; or ce groupe est unipotent, comme on le voit par dévissage à l'aide des puissances de $\mathfrak{r}$. D'autre part, l'action de U_A^0 sur A est de type PL, cf. proposition 3.2.5 ; il en est donc de même de celle de U_A^0 sur $A/\mathfrak{r}$, cf. §1.2 ; même chose pour celle de H sur $A/\mathfrak{r}$. On peut appliquer le théorème 3.5.1 à H et à $A/\mathfrak{r}$: en effet, les conditions (3.5.2) et (3.5.3) sont satisfaites ; d'après (3.5.5), le groupe H a les propriétés voulues. Reste à montrer que N est connexe. Cela résulte du lemme suivant :

Lemme 3.6.4 - *Soit $1 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 1$ une suite exacte de groupes algébriques sur k. Supposons que G_1 soit unipotent, que G_2 soit lisse et connexe, et que G_3 soit réductif. Alors G_1 est connexe.*

Démonstration du lemme 3.6.4. Après passage au quotient par G_1^0 on est ramené au cas où G_1 est fini étale et d'ordre une puissance de 2. Comme G_2 est connexe, son action sur G_1 est triviale, autrement dit G_1 est contenu dans le centre de G_2 D'autre part, il est clair que tout sous-groupe unipotent lisse normal connexe de G_2 est trivial ; comme G_2 est lisse, cela signifie que G_2 est réductif. Or le centre d'un groupe réductif est de type multiplicatif ; ainsi, G_1 est à la fois unipotent et de type multiplicatif ; il est donc trivial.

Remarque. Le groupe N construit dans la démonstration du théorème 3.6.1 n'est pas nécessairement lisse (on en verra un exemple dans 5.5.19). Le groupe réduit correspondant N^{red} est le *radical unipotent* $R_u(U_A^0)$ *de* U_A^0 . Le groupe $\widetilde{H} = U_A^0/N^{\mathrm{red}}$ est le *plus grand quotient réductif de* U_A^0 : ce groupe est lié à H par une isogénie $\widetilde{H} \to H$ dont le noyau est infinitésimal et unipotent ; en fait,

3. Je dois ces explications à Michel Raynaud. Par la suite, on se servira seulement de l'exactitude de la suite $1 \to N(k) \to U_A^0(k) \to H(k) \to 1$, qui est évidente.

d'après [Va 05], $\widetilde{H}$ se déduit de H en remplaçant certains des facteurs $\mathbf{Sp}_{2n_i}$ par des facteurs $\mathbf{SO}_{2n_i+1}$. Ce genre de phénomène est spécial à la caractéristique 2.

3.7. **Exemple de remplacement de $\mathbf{Sp}_{2n}$ par $\mathbf{SO}_{2n}$ (et même par $\mathbf{O}_{2n}$)**

Soit V un k-espace vectoriel de dimension $2n$, avec $n > 0$, muni d'une forme alternée non dégénérée, notée $C(v, v')$. On munit l'algèbre $E = \mathrm{End}(V)$ de l'involution correspondante : si $e \in E$, on a

(3.7.1) $\quad C(ev, v') = C(v, e^*v')$ pour tous $v, v' \in V$.

Le groupe unitaire U_E correspondant est le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(V)$. On note H l'ensemble des éléments hermitiens de E, et l'on note H_o le sous-espace de H formé des éléments de la forme $e + e^*$ avec $e \in E$.

Considérons une algèbre à involution R de radical $\mathfrak{r}$ telle que $\mathfrak{r}^2 = 0$ et $R/\mathfrak{r} = E$. Il y a une structure naturelle de E-module à gauche sur $\mathfrak{r}$. Faisons l'hypothèse :

(3.7.2) *Il existe une base ω du E-module $\mathfrak{r}$, avec ω central dans R, et hermitien.*

Exemple 3.7.3. On prend pour R l'algèbre à involution déduite de E par extension des scalaires à $k[t]/(t^2)$, et l'on prend $\omega = 1 \otimes t$.

Nous allons classer les couples (R, ω) :

Proposition 3.7.4 - (a) *Les classes d'isomorphisme des couples (R, ω) ci-dessus correspondent bijectivement* (par une bijection définie plus loin) *aux formes quadratiques sur V dont la forme bilinéaire associée est un multiple de C.*

(b) *Si (R, ω) correspond à la forme quadratique q, l'image de $U_R \to \mathbf{Sp}(V)$ est le groupe orthogonal $\mathbf{O}(q)$.*

Corollaire 3.7.5 - *Il y a trois possibilités pour l'image de $U_R \to \mathbf{Sp}(V)$:*

(i) *C'est $\mathbf{Sp}(V)$; ce cas ne se produit que pour l'exemple 3.7.3.*

(ii) *C'est le sous-groupe de $\mathbf{Sp}(V)$ fixant une droite de V.*

(iii) *C'est le groupe orthogonal $\mathbf{O}(q)$ d'une forme quadratique q dont la forme bilinéaire associée est égale à C.*

[Noter que, dans le cas (iii), l'image de $U_R \to \mathbf{Sp}(V)$ est strictement plus grande que $\mathbf{SO}(q)$.]

Ces trois cas correspondent aux trois possibilités suivantes pour q :

(i) $q = 0$;

(ii) $q \neq 0$ et la forme bilinéaire associée est 0 ; il existe alors $v_0 \in V, v_0 \neq 0$, tel que $q(v) = C(v, v_0)^2$ pour tout $v \in V$.

(iii) la forme bilinéaire associée à q est un multiple non nul de C.

Démonstration de la proposition 3.7.4 (a). Soit $f : E \to R$ un *relèvement* de E dans R, autrement dit un homomorphisme tel que le composé $E \to R \to E$ soit l'identité. On sait ([A VIII, §13, n° 6]) qu'un tel f existe, et que, si f' est un autre relèvement, il existe $z \in E$ such that $f'(x) = (1 + z\omega)f(x)(1 + z\omega)^{-1}$ pour tout $x \in E$, i.e. $f'(x) = f(x) + (zx + xz)\omega$. Si l'on applique ceci à $f'(x) = f(x^*)^*$, on obtient l'existence de $z \in E$ tel que :

(3.7.6) $f(x^*)^* = f(x) + (zx + xz)\omega$.

En remplaçant x par x^* cela donne :

(3.7.7) $f(x)^* = f(x^*) + (zx^* + x^*z)\omega$

En conjuguant (3.7.7) et en ajoutant (3.7.6) on obtient :

$zx + xz + xz^* + z^*x = 0$, i.e. $(z + z^*)x = x(z + z^*)$ pour tout $x \in E$.

Cela montre que $z + z^*$ appartient au centre de E, i.e. :

(3.7.8) $z + z^* = \lambda$ avec $\lambda \in k$.

Soit q_z la forme quadratique $v \mapsto C(zv, v)$. La forme bilinéaire associée est λC : cela résulte de (3.7.8). De plus, si l'on change les choix de f et de z, on constate que z est remplacé par $z + h$ avec $h \in H_o$, et cela ne change pas q_z. Ainsi, la forme q_z est *canoniquement associée à* (R, ω). Cette forme *détermine* (R, ω) *et peut être choisie arbitrairement.* En effet, elle détermine le choix de z, à l'addition près d'un élément de H_o ; et, lorsqu'on connaît z, le couple (R, ω) est isomorphe à l'algèbre $E \otimes k[t]/(t^2)$, munie de l'élément $\omega = 1 \otimes t$ et de l'involution $x + yt \mapsto x^* + (y^* + zx^* + x^*z)t$.

Démonstration de la proposition 3.7.4 (b).

Soit $u \in U_E$. Pour que u appartienne à l'image de $U_R \to U_E$, il faut et il suffit qu'il existe $b \in E$ tel que $(f(u)+b\omega)(f(u)^*+b^*\omega) = 1$. En utilisant (3.7.7), cela s'écrit :

(3.7.9) $uzu^* = z + bu^* + ub^*$.

On a $bu^* + ub^* \in H_o$, et inversement tout élément de H_o peut s'écrire sous la forme $bu^* + ub^*$. La formule (3.7.9) est donc équivalente à :

(3.7.10) $uzu^* \equiv z \pmod{H_o}$, i.e. $q_{uzu^*} = q_z$,

ce qui équivaut à dire que u fixe la forme quadratique q_z.

Remarque. On pourrait supprimer l'hypothèse (3.7.2), et supposer seulement que $\mathfrak{r}^2 = 0$ et $R/\mathfrak{r} = E$. On trouve alors que *l'image de* $U_R \to \mathbf{Sp}(V)$ *est une intersection de groupes orthogonaux* $\mathbf{O}(q_i)$ relatifs à des formes q_i dont les formes bilinéaires associées sont des multiples de C. En prenant R convenable, on peut s'arranger pour que cette intersection soit triviale, autrement dit que *tous les éléments unitaires de* R *sont* $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{r}}$.

§4 - Nullité de $H^1(k, U_A^0)$

Le but de ce § est de démontrer le théorème C de l'introduction. Rappelons son énoncé :

Théorème C - *Soit* k *un corps parfait de caractéristique* 2*, et soit* A *une* k*-algèbre à involution de dimension finie. Si* U_A^0 *est la composante neutre du groupe unitaire* U_A *de* A*, on a* $H^1(k, U_A^0) = 0$.

La démonstration sera donnée au §4.9. Elle procède par une série de réductions, basées sur le §3, ainsi que sur des résultats de cohomologie galoisienne qui sont rappelés aux §§ 4.2 à 4.6.

4.1. **Notations.**

Dans la suite de ce §, k est un corps parfait de caractéristique 2 ; on note $\overline{k}$ une clôture algébrique de k ; le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ est noté Γ_k. Si G est un groupe algébrique sur k, on note $H^1(k, G)$ l'ensemble de cohomologie $H^1(\Gamma_k, G(\overline{k}))$, cf. e.g. [Se 64, I, §5 et III, §1] ; la classe dans $H^1(k, G)$ du cocycle unité est notée 0.

4.2. **Une première réduction.**

Lemme 4.2.1 - *Si $G' \to G$ est un homomorphisme de groupes algébriques tel que $G'(\overline{k}) \to G(\overline{k})$ soit bijectif, l'application correspondante $H^1(k, G') \to H^1(k, G)$ est bijective.*

C'est clair.

En particulier :

Lemme 4.2.2 - *L'application $H^1(k, G^{\mathrm{red}}) \to H^1(k, G)$ est bijective.*

4.3. **Quotient par un sous-groupe unipotent.**

Lemme 4.3.1 - *Si N est un groupe unipotent connexe, on a $H^1(k, N) = 0$.*

Démonstration. Lorsque N est lisse, c'est un résultat bien connu (que l'on démontre en prouvant que N a une suite de composition dont les facteurs sont isomorphes au groupe additif $\mathbf{G}_a$, cf. e.g. [Se 64, III, prop.6]). Le cas général s'en déduit grâce au lemme 4.2.2.

Proposition 4.3.2 - *Soit N un sous-groupe unipotent normal connexe d'un groupe algébrique G. L'application naturelle $\pi : H^1(k, G) \to H^1(k, G/N)$ est injective.*

Démonstration. Soit $x \in H^1(k, G/N)$. On doit montrer que $\pi^{-1}(x)$ a au plus un élément. Lorsque $x = 0$, cela résulte de la suite exacte de cohomologie non abélienne ([Se 64, I, prop.38]) et du lemme 4.3.1. Le cas général se ramène à celui-là par "torsion", cf. [Se 64, I, cor.2 à la prop.39].

L'application π est en fait *bijective*. La surjectivité est vraie même si N n'est pas connexe. On la démontre en se ramenant au cas où N est commutatif, et en utilisant la proposition 41 de [Se 64, I] combinée avec le fait que $H^2(k, N) = 0$. Comme nous n'utiliserons pas ce résultat, nous laissons les détails de la démonstration au lecteur. Voir aussi [GM 13, lemme 7.3], qui ne fait pas d'hypothèse sur k, mais suppose que N est *scindé* ("split", cf. [Sp 98, chap.14]).

4.4. **Extensions quadratiques.**

Proposition 4.4.1 ([Se 64, III, §2.3, exerc.2]) - *Soit k' une extension quadratique de k, et soit G un groupe algébrique linéaire connexe. L'application naturelle $\iota : H^1(k, G) \to H^1(k', G)$ est injective.*

Démonstration. Si k est fini, on sait, d'après Lang ([La 56]), que $H^1(k, G) = 0$. On peut donc supposer que k est infini. Vu le lemme 4.2.2, on peut supposer que G est lisse ; d'après la proposition 4.3.2, appliquée au radical unipotent de G, on peut aussi supposer que G est réductif. D'autre part, l'argument de "torsion"

utilisé plus haut montre qu'il suffit de prouver que $x \in H^1(k,G)$ et $\iota(x) = 0$ entraîne $x = 0$.

L'hypothèse $\iota(x) = 0$ entraîne que x provient d'un cocycle du groupe $\mathrm{Gal}(k'/k)$, agissant sur $G(k')$. Si $z \mapsto {}^s z$ désigne la k'/k-conjugaison dans $G(k')$, un tel cocycle équivaut à la donnée d'un élément a de $G(k')$ tel que $a.{}^s a = 1$, et il nous faut prouver qu'il existe $b \in G(k')$ tel que $a = b.{}^s b^{-1}$. Comme k est infini, la proposition 3.2.1 de [Se 62] montre qu'il existe $z \in G(K')$ tel que l'élément $a' = z^{-1} a\ {}^s z$ soit un élément semi-simple *régulier* de $G(k')$, autrement dit appartienne à un tore maximal de G et à un seul, cf. [Bo 91, §12.2]). Quitte à remplacer a par a', on peut donc supposer que a est semi-simple régulier. Or, on a le lemme suivant :

Lemme 4.4.2 - *Soit F un corps parfait de caractéristique $p > 0$, et soit H un F-groupe réductif. Si $x \in H(F)$ est semi-simple régulier, il existe un unique élément semi-simple y de $H(F)$ tel que $x = y^p$; de plus y est régulier.*

Démonstration du lemme 4.4.2. Soit T le tore maximal de H contenant x. Le groupe $T(F)$ est un groupe abélien dans lequel l'application $t \mapsto t^p$ est bijective (cela résulte par descente galoisienne du cas où F est algébriquement clos). Il existe donc un unique $y \in T(F)$ tel que $y^p = x$. Soit y' un élément semi-simple de $H(F)$ tel que $y'^p = x$; tout tore maximal contenant y' contient x, donc est égal à T, d'où $y' = y$, ce qui montre à la fois que y est unique et qu'il est régulier.

Fin de la démonstration de la proposition 4.4.1. D'après le lemme ci-dessus, appliqué à $F = k', p = 2, H = G_{/k'}, x = a$, il existe un unique élément semi-simple b de $G(k')$ tel que $b^2 = a$; on a $({}^s b)^2 = {}^s a = a^{-1} = (b^{-1})^2$, d'où ${}^s b = b^{-1}$ et $a = b.b = b.{}^s b^{-1}$, comme on le désirait.

4.5. **Le cas des groupes linéaires, symplectiques et orthogonaux.**

Proposition 4.5.1 - *On a $H^1(k,G) = 0$ lorsque G est l'un des groupes suivants :*

(a) *le groupe multiplicatif $\mathbf{GL}_{1,S}$ d'une k-algèbre S de dimension finie.*

(b) *le groupe symplectique $\mathbf{Sp}_{2n}$ défini par une forme bilinéaire alternée non dégénérée de rang $2n$, $n \geqslant 1$;*

(c) *le groupe spécial orthogonal $\mathbf{SO}(q)$ associé à une forme quadratique non dégénérée q de rang pair.*

Démonstration. L'assertion (a) équivaut à dire que, si un S-module devient isomorphe à S après extension du corps de base à $\overline{k}$, alors il est isomorphe à S, ce qui est un résultat standard sur les modules (non nécessairement libres), cf. [A VIII, §2, th.3]. Pour (b) voir par exemple [KMRT 98, (29.25)].

D'après [KMRT 98, (29.29)] l'assertion (c) signifie que deux formes quadratiques non dégénérées de même rang pair et de même invariant d'Arf (appelé "discriminant" dans [KMRT 98, xix-xxi]) sont isomorphes, ce qui résulte facilement de l'hypothèse que k est parfait, cf. [Arf 41].

[Variante : utiliser la proposition 4.4.1 pour se ramener au cas où le corps k n'a aucune extension quadratique, et prouver qu'alors toutes les formes quadratiques non dégénérées sont hyperboliques.]

4.6. **Restriction des scalaires.**

Soit K une extension finie de k. Si X est une K-variété quasi-projective, on lui associe (cf. e.g. [BoS 64, §2.8 à §2.10], ou [KMRT 98, §20.5 à §20.9]) une k-variété quasi-projective Y, munie d'un K-morphisme $p : Y_{/K} \to X$. Le couple (Y, p) est caractérisé par les propriétés équivalentes suivantes :

(a) (à la Weil, cf. [We 61, §1.3]) Soit Σ l'ensemble des k-plongements de K dans $\overline{k}$; si $\sigma \in \Sigma$, soit X_σ la $\overline{k}$ variété déduite de X par l'extension des scalaires $\sigma : K \to \overline{k}$. Les conjugués $p^\sigma : Y_{/\overline{k}} \to X_\sigma$ de p définissent un *isomorphisme*

(4.6.1) $Y_{/\overline{k}} \to \prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$.

(b) (à la Grothendieck, cf. [CGP 10, A5]) Le couple (Y, p) représente le foncteur qui, à une k-variété Z, associe l'ensemble $\mathrm{Mor}_K(Z_{/K}, X)$ des K-morphismes de $Z_{/K}$ dans X. On a donc une bijection naturelle :

(4.6.2) $\mathrm{Mor}_k(Z, Y) = \mathrm{Mor}_K(Z_{/K}, X)$.

Pour $Z = \mathrm{Spec}(k)$, cela donne :

(4.6.3) $Y(k) = X(K)$.

On dit que Y se déduit de X par *restriction des scalaires de K à k*, et l'on écrit $Y = R_{K/k}(X)$.

Soit X un K-groupe algébrique ; alors $R_{K/k}(X)$ a une structure naturelle de k-groupe algébrique (car le foncteur $R_{K/k}$ commute aux produits), et l'on a (cf. [BoS 64, cor.2.10] et [KMRT 98, (29.6)]) :

(4.6.4) $H^1(k, R_{K/k}(X)) = H^1(K, X)$.

De plus :

Proposition 4.6.5 - *Soit Y' un k-sous-groupe algébrique de $Y = R_{K/k}(X)$. Pour que Y' soit de la forme $R_{K/k}(X')$, où X' est un K-sous-groupe algébrique de X, il faut et il suffit que $Y'_{/k}$ soit compatible avec la décomposition en produit (4.6.1), i.e. soit un produit de sous-groupes algébriques des X_σ.*

[Il y a un énoncé analogue pour les variétés qui ne sont pas munies d'une structure de groupe.]

Démonstration. Voir [BT 65, 6.18] , qui fait des hypothèses de connexion (et - implicitement - de lissité) qui sont inutiles. [Vu (4.6.1), le point essentiel est la remarque que, si $Z = \prod_{i\in I} Z_i$, et si Z' est un sous-schéma fermé non vide de Z qui est décomposable en $Z' = \prod_{i\in I} Z'_i$, avec $Z'_i \subset Z_i$, alors une telle décomposition est *unique*, i.e. les Z'_i sont déterminés de manière unique par Z. Noter que ce ne serait pas vrai si Z était vide, car l'ensemble vide se décompose en produit de plusieurs façons.]

Corollaire 4.6.6 - *Soit X un K-groupe réductif, et soit V un k-sous-groupe réductif de $Y = R_{K/k}(X)$. Si le rang de V est égal au rang de Y, il existe un K-sous-groupe W de X tel que $V = R_{K/k}(W)$.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition ci-dessus, combinée avec le corollaire 2.6.9.

Exemple de restriction des scalaires. Soit A une K-algèbre à involution sur K, et soit $U_{A,K}$ (resp. $U^{\mathrm{sch}}_{A,K}$) son groupe unitaire (resp. son groupe unitaire schématique) sur K. Notons U_A (resp. U^{sch}_A) les groupes analogues sur k. On a

(4.6.7) $U_A = R_{K/k}(U_{A,K})$ et $U_A^{\mathrm{sch}} = (U_{A,K}^{\mathrm{sch}})$.

Cela résulte facilement de la définition (b) ci-dessus (en comparant les points à valeurs dans une k-algèbre commutative).

D'après (4.6.4), on en déduit :

(4.6.8) $H^1(k, U_A) = H^1(K, U_{A,K})$.

4.7. **Le groupe unitaire d'une algèbre à involution semi-simple.**

Nous allons démontrer un cas particulier du théorème C :

Proposition 4.7.1 - *Soit A une k-algèbre à involution de dimension finie satisfaisant aux deux conditions suivantes* :

(a) *Elle est semi-simple.*

(b) *Elle est engendrée par U_A^0.*

On a alors $H^1(k, U_A) = 0$.

[La condition (b) signifie que (3.3.4) est satisfaite après extension des scalaires à $\overline{k}$. Noter aussi que U_A est réductif, donc connexe, cf. §3.4.]

Démonstration. On peut supposer que A est indécomposable comme algèbre à involution, autrement dit, est, soit le produit de deux algèbres simples S et S' échangées par l'involution, soit une algèbre simple. Dans le premier cas, on a $U_A \simeq \mathbf{GL}_{1,S}$, d'où $H^1(U_A) = 0$ d'après la proposition 4.5.1 (a). Dans le second cas, notons L le centre de A ; c'est un corps, sur lequel agit l'involution $x \mapsto x^*$. Il y a deux possibilités :

(i) *L'involution agit trivialement sur L* (involution "de première espèce"). Si $[A]$ désigne la classe de A dans le groupe de Brauer de L, on a $2[A] = 0$ car A est isomorphe à son opposée ; puisque L est parfait de caractéristique 2, la 2-dimension cohomologique de Γ_L est $\leqslant 1$, cf. [Se 64, II, prop.3] et la 2-composante de son groupe de Brauer est 0. On a donc $[A] = 0$, autrement dit A est isomorphe à une algèbre de matrices $\mathbf{M}_n(L)$, avec $n \geqslant 1$. Distinguons deux cas :

(i') On a $n = 1$, i.e. $A = L$. Comme l'involution est triviale sur L, on a $U_A = 1$ d'où $H^1(k, U_A) = 0$.

(i") On a $n > 1$ et dans ce cas n est pair, et l'involution est définie par une forme alternée non dégénérée (cf. §3.4). Sur le corps de base L, le groupe unitaire correspondant $U_{A,L}$ est $\mathbf{Sp}_n$; on en déduit que $H^1(k, U_A) = H^1(L, \mathbf{Sp}_n) = 0$ d'après (4.6.8) et la proposition 4.5.1 (b).

(ii) *L'involution agit non trivialement sur L* (involution "de seconde espèce"). Soit K le sous-corps de L fixé par l'involution. L'extension L/K est une extension quadratique. L'algèbre $B = L \otimes_K A$ est produit de deux algèbres simples permutées par l'nvolution. On a vu plus haut que cela entraîne $H^1(L, U_{A,K}) = 0$; d'après la proposition 4.4.1 on a donc $H^1(K, U_{A,K}) = 0$, d'où $H^1(k, U_A) = 0$ d'après (4.6.8).

4.8. **Nullité de la cohomologie de certains sous-groupes de U_A.**

Le résultat suivant généralise la proposition 4.7.1 :

Proposition 4.8.1 - *Soit A une k-algèbre à involution semi-simple de dimension finie, et soit H un sous-groupe réductif de U_A satisfaisant aux deux conditions suivantes* :

(c) *Le rang de H est égal à celui de U_A.*

(d) *L'algèbre A est engendrée par H.*

Alors $H^1(k, H) = 0$.

[Noter que (d) entraîne la condition (b) de la proposition 4.7.1, puisque H est contenu dans U_A^0.]

Démonstration. Décomposons A en produit d'algèbres à involution indécomposables, comme au § précédent. D'après le théorème 3.5.1, H est compatible avec cette décomposition sur $\overline{k}$, donc aussi sur k, et l'on est ramené au cas où A est indécomposable. Faisons cette hypothèse, notons L le centre de A, et notons K la sous-algèbre de L fixée par l'involution. On a vu au §4.7 que K est un corps, et que L est étale sur K de degré 1 ou 2. Commençons par le cas particulier où $K = k$:

Lemme 4.8.2 - *Supposons que $K = k$. On a alors, ou bien $H = U_A$, ou bien $U_A \simeq \mathbf{Sp}_n$ et $H \simeq \mathbf{SO}(q)$, où q est une forme quadratique non dégénérée de rang n pair $\geqslant 4$.*

[Noter que cela entraîne $H^1(k, H) = 0$ d'après la proposition 4.7.1 et la proposition 4.5.1 (c).]

Démonstration. Pour prouver l'égalité $H = U_A$, il suffit de la démontrer après extension des scalaires à $\overline{k}$; or cela a été fait dans le théorème 3.5.1, à la seule exception du cas où $U_{A/\overline{k}}$ et $H_{/\overline{k}}$ sont respectivement isomorphes à $\mathbf{Sp}_n$ et $\mathbf{SO}_n$ avec n pair $\geqslant 4$. Dans ce cas, on a vu au § précédent que U_A est k-isomorphe à $\mathbf{Sp}_n$. Si B est une forme alternée non dégénérée invariante par U_A, il existe une unique $\overline{k}$-forme quadratique q invariante par H telle que $q(x+y) = q(x) + q(y) + B(x, y)$; comme cette forme est unique, elle est définie sur k, et les groupes H et $\mathbf{SO}(q)$ deviennent égaux sur $\overline{k}$, donc sont égaux sur k.

Revenons au cas général où K est une extension finie quelconque de k. D'après (4.6.7), on a $U_A = R_{K/k}(U_{A,K})$. Si l'on étend les scalaires à $\overline{k}$, A se décompose en produit d'algèbres correspondant aux plongements de K dans $\overline{k}$, et le théorème 3.5.1 montre que H est compatible avec cette décomposition. D'après le lemme 4.6.5, cela entraîne que H est de la forme $R_{K/k}(H')$, où H' est un K-sous-groupe réductif de $U_{A,K}$, satisfaisant aux propriétés (c) et (d) sur le corps K. En appliquant à H' le lemme ci-dessus, on voit que, ou bien $H = U_A$, ou bien $H \simeq R_{K/k}(\mathbf{SO}(q))$ et dans les deux cas, on a $H^1(k, H) = H^1(K, H') = 0$.

4.9. **Démonstration du théorème C.**

Soit B la sous-algèbre de $\overline{k} \otimes_k A$ engendrée par les $\overline{k}$-points de U_A^0. Comme cette algèbre est stable par le groupe de Galois Γ_k, elle provient par extension des scalaires d'une sous-algèbre à involution A' de A. On a $U_{A'}^0 = U_A^0$. Cela nous permet de remplacer A par A'. Autrement dit, *nous pouvons supposer que la condition d'engendrement* (3.3.4) *est satisfaite sur $\overline{k}$.*

Soit $\mathfrak{r}$ le radical de A, et soit $\pi : U_A^0 \to U_{A/\mathfrak{r}}$ l'homomorphisme défini par la projection $A \to A/\mathfrak{r}$. Soit N le noyau de π : comme au §3.6, on a une suite

exacte :

(4.9.1) $1 \to N \to U_A^0 \to H \to 1.$

D'après le lemme 3.6.3, N est unipotent connexe. D'autre part H satisfait aux conditions (c) et (d) de la proposition 4.8.1, relativement à l'algèbre à involution $A/\mathfrak{r}$: en effet, cela a été démontré au §3.6 sur $\overline{k}$. D'après la proposition (4.8.1) on a donc $H^1(k,H)=0$, d'où $H^1(k,U_A^0)=0$ d'après la proposition 4.3.2.

Cela achève la démonstration du théorème C.

Corollaire 4.9.2 - *L'application $H^1(k,U_A) \to H^1(k,U_A/U_A^0)$ est injective.*

Démonstration. Le théorème C entraîne que l'image réciproque de 0 est $\{0\}$. L'injectivité en résulte par "torsion", cf. [Se 64, I, prop.39, cor.2].

Corollaire 4.9.3 - *Si k_1 est une extension finie de degré impair de k, l'application $H^1(k,U_A) \to H^1(k_1,U_A)$ est injective.*

Démonstration. D'après le corollaire précédent, il suffit de démontrer l'injectivité de $H^1(k,U_A/U_A^0) \to H^1(k_1,U_A/U_A^0)$; or celle-ci résulte de ce que le groupe des $\overline{k}$-points de U_A/U_A^0 est un 2-groupe abélien, cf. corollaire 3.3.3.

§5 - Le groupe unitaire de l'algèbre d'un groupe fini

Dans ce §, ainsi que dans les deux suivants, G est un groupe fini, et k est un corps de caractéristique 2. On note A l'algèbre $k[G]$ du groupe G ; on munit A de son involution canonique, caractérisée par le fait que $g^* = g^{-1}$ pour tout $g \in G$.

5.1. Le groupe unitaire U_G.

Soit U_G^{sch} le groupe unitaire schématique de A ; c'est un schéma en groupes dont le groupe des k-points contient G.

Si E est un groupe réduit à un élément, on a $U_E^{\mathrm{sch}} = \boldsymbol{\mu}_2$. Les homomorphismes évidents $E \to G \to E$ donnent des homomorphismes $\boldsymbol{\mu}_2 \to U_G^{\mathrm{sch}} \to \boldsymbol{\mu}_2$ dont le composé est l'identité. Nous noterons U_G le noyau de $U_G^{\mathrm{sch}} \to \boldsymbol{\mu}_2$; on a une décomposition de U_G^{sch} en produit :

(5.1.1) $U_G^{\mathrm{sch}} = U_G \times \boldsymbol{\mu}_2.$

Théorème 5.1.2 (Merkurjev) - *Le schéma en groupes U_G est lisse.*

Démonstration (d'après une lettre de Merkurjev du 19/5/2002). Soit k' une k-algèbre commutative. Un élément $\sum x_g g$ de $k' \otimes_k A = k'[G]$ est un point de U_G si et seulement si il satisfait aux équations suivantes :

(A_1) $\sum_{g\in G} x_g = 1$,

(A_s) $\sum_{g\in G} x_g x_{sg} = 0$ pour tout $s \in G$ tel que $s \neq 1$.

Lorsque s est d'ordre 2, la relation (A_s) se réduit à $0=0$, car les termes $x_g x_{sg}$ et $x_{sg}x_g$ ont pour somme 0. Un argument analogue montre que, pour tout s, l'équation (A_s) est équivalente à l'équation ($A_{s^{-1}}$).

Soit G_2 l'ensemble des éléments s de G tels que $s^2=1$ et choisissons une partie Σ de $G - G_2$ telle que $G - G_2 = \Sigma \sqcup \Sigma^{-1}$; pour tout élément s de

$G - G_2$, on a, soit $s \in \Sigma$, soit $s^{-1} \in \Sigma$, mais pas les deux à la fois. Le schéma en groupes U_G est défini par l'équation linéaire $L = 1$ et par les équations quadratiques $P_s = 0$ pour $s \in \Sigma$, où $L = \sum_{g \in G} x_g$ et $P_s = \sum_{g \in G} x_g x_{sg}$. Les différentielles des polynômes L et P_s en l'élément neutre $1 = (1, 0, 0, ...)$ sont :

$dL = dx_1$ et $dP_s = dx_s + dx_{s^{-1}}$.

Elles sont linéairement indépendantes. D'après le critère jacobien, cela montre que U_G est lisse au point 1, donc lisse partout puisque c'est un schéma en groupes.

Autre démonstration. Plaçons-nous sur le corps de base $\mathbf{F}_2$; comme $\mathbf{F}_2$ est parfait, on peut définir le groupe algébrique noté U_A au §4 ; c'est un groupe lisse. On a $U_A \subset U_G$. D'après la proposition 3.3.1, l'algèbre $\mathrm{Lie}(U_A)$ contient les éléments $1 + g$ (g d'ordre 2) et $s + s^{-1}$ ($s \in S$) ; elle coïncide donc avec $\mathrm{Lie}(U_G)$, ce qui entraîne [4] que $U_G = U_A$, donc que U_G est lisse.

Remarque. Soit $r = \frac{1}{2}(|G| - |G_2|)$. La démonstration de Merkurjev donnée plus haut montre que U_G est une intersection transversale de r quadriques dans un espace affine. On en déduit, grâce au théorème de Bézout (cf. e.g. [Fu 84, Example 8.4.6]), que *le nombre de composantes connexes de U_G est au plus égal à 2^r*, l'égalité n'étant possible que si U_G^0 est une variété linéaire ; cette borne est certainement grossière ; il serait intéressant de l'améliorer.

Compléments.

La décomposition (5.1.1) montre que $\mathrm{Lie}(U_G)$ est formée des éléments $\sum a_g g$ de A qui sont hermitiens et tels que $\sum a_g = 0$. On obtient une base de cette algèbre en prenant les éléments $1+g$ (g d'ordre 2) et $s+s^{-1}$ ($s \in \Sigma$). Le nombre de ces éléments est $|G_2| - 1 + |\Sigma|$. Comme $|G| - |G_2| = 2|\Sigma|$, on en tire :

Proposition 5.1.3 - *On a* :

$$\dim U_G \;=\; \dim \mathrm{Lie}(U_G) \;=\; |G_2| - 1 + |\Sigma| \;=\; \tfrac{1}{2}(|G| + |G_2|) - 1.$$

Notons U_G^0 la composante neutre de U_G. Si H est un sous-groupe de G, on a $U_H^0 \subset U_G^0$.

Proposition 5.1.4 - *Soit (H_i) une famille de sous-groupes de G de réunion égale à G. Alors U_G^0 est engendré* (comme groupe algébrique) *par les $U_{H_i}^0$.*

Démonstration. Cela résulte du fait que $\mathrm{Lie}(U_G)$ est engendré comme espace vectoriel par les sous-espaces $\mathrm{Lie}(U_{H_i})$.

Cet énoncé s'applique en particulier à la famille des sous-groupes cycliques maximaux de G.

(5.1.5) Rappelons, cf. [CR 62, §55] et [Fe 82, §I.7], que les facteurs indécomposables de A sont appelés les *blocs* [5] de A. Parmi ceux-ci figure le *bloc principal* B,

4. Plus généralement, on a le critère de lissité suivant : soit X un schéma de type fini sur un corps infini k, soit $x \in X(k)$, et soit $T_x(X)$ l'espace tangent à X au point x. Supposons que, pour tout $t \in T_x(X)$, il existe un k-schéma lisse V, un point $v \in V(k)$ et un morphisme $f : V \to X$ tel que $f(v) = x$ et que t appartienne à l'image de $T_v(V) \to T_x(X)$. Alors X est lisse en x ; cela se voit en prouvant que le cône tangent à X en x est égal à $T_x(X)$.

5. Les blocs peuvent être vus, soit comme des idéaux bilatères de A, soit comme des algèbres quotients de A ; dans ce qui suit, nous choisirons le point de vue "quotients".

caractérisé par le fait que la représentation unité $\boldsymbol{t} : A \to k$ se factorise en $A \to B \to k$. Ce bloc est auto-dual, i.e. stable par l'involution de $k[G]$. Si B' est le produit des autres blocs, B' est également auto-dual, et $A = B \times B'$. D'où une décomposition du groupe unitaire :

(5.1.6) $U_G^{\mathrm{sch}} = U_B^{\mathrm{sch}} \times U_{B'}^{\mathrm{sch}}$ et $U_G = U_B \times U_{B'}$.

Comme $\boldsymbol{t}$ se factorise par B, l'homomorphisme $U_G^{\mathrm{sch}} \to \boldsymbol{\mu}_2$ se factorise par U_B^{sch} ; il en résulte que $U_{B'}^{\mathrm{sch}} = U_{B'}$, autrement dit *que $U_{B'}$ est lisse* (c'est une intersection transversale de quadriques).

5.2. **Les caractères essentiels.**

Soit $C = \{1, c\}$ un groupe d'ordre 2. L'homomorphisme $t \mapsto 1+t(1+c)$ est un isomorphisme du groupe additif $\mathbf{G}_a$ sur le groupe U_C. Dans cet isomorphisme, le sous-groupe $\{0, 1\}$ de $\mathbf{G}_a$ correspond au sous-groupe C de U_C.

Soit $\varepsilon : G \to C$ un homomorphisme de G dans C, et soit $\varphi_\varepsilon : U_G \to U_C$ l'homomorphisme correspondant de U_G dans U_C. Lorsqu'il existe $g \in G$ avec $g^2 = 1$ et $\varepsilon(g) = c$, l'extension $1 \to \mathrm{Ker}(\varepsilon) \to G \to C \to 1$ est scindée, et cela entraîne que φ_ε est surjectif. Dans le cas contraire, on a :

Théorème 5.2.1 - *Supposons que $\varepsilon(g) = 1$ pour tout $g \in G$ tel que $g^2 = 1$. L'image de $\varphi_\varepsilon : U_G \to U_C$ est alors égale à $\varepsilon(G)$, i.e. à $\{1\}$ si $\varepsilon = 1$ et à C si $\varepsilon \neq 1$. On a $\varphi_\varepsilon(U_G^0) = \{1\}$.*

Démonstration. Le cas où $\varepsilon = 1$ est clair. Supposons que $\varepsilon \neq 1$ et notons G_1 (resp. G_c) l'ensemble des $g \in G$ tels que $\varepsilon(g) = 1$ (resp. $\varepsilon(g) = c$). L'hypothèse faite sur ε équivaut à dire que, pour tout $g \in G_c$, on a $g \neq g^{-1}$. On peut donc décomposer G_c comme réunion disjointe $G_c = S \sqcup S^{-1}$. Soit $x = \sum x_g g$ un point de U_G, à valeurs dans un corps k de caractéristique 2. On a :

(5.2.2) $\varphi_\varepsilon(x) = \lambda(x).1 + \mu(x).c$, avec $\lambda(x) = \sum_{a \in G_1} x_a$ et $\mu(x) = \sum_{b \in G_c} x_b$.

On a :

(5.2.3) $\lambda(x) + \mu(x) = 1$ d'après la propriété (A_1) du §5.1.

D'autre part :

(5.2.4) $\lambda(x)\mu(x) = \sum_{a \in G_1, b \in G_c} x_a x_b$.

Définissons une application $\theta : S \times G \to G_1 \times G_c$ par :

$(s, g) \mapsto (g, sg)$ si $g \in G_1$ et $(s, g) \mapsto (sg, g)$ si $g \in G_c$.

On vérifie que θ est bijective, l'application réciproque $G_1 \times G_c \to S \times G$ étant :

$(a, b) \mapsto (ba^{-1}, a)$ si $ba^{-1} \in S$ et $(a, b) \mapsto (ab^{-1}, b)$ si $ab^{-1} \in S$.

Si les couples (s, g) et (a, b) se correspondent par θ et θ^{-1}, on a $x_a x_b = x_g x_{sg}$. Cela permet de récrire (5.2.4) sous la forme :

(5.2.5) $\lambda(x)\mu(x) = \sum_{s \in S} \sum_{g \in G} x_g x_{sg}$.

D'après la formule (A_s) du §5.1, on a $\sum_{g \in G} x_g x_{sg} = 0$ pour tout $s \in S$; d'après (5.2.5) on a donc $\lambda(x)\mu(x) = 0$, et comme $\lambda(x) + \mu(x) = 1$ d'après (5.2.3), on en déduit que $(\lambda(x), \mu(x)) = (1, 0)$ ou $(0, 1)$. L'image de x dans U_C est donc égale à 1 ou à c. Comme l'image de φ_ε est finie, on a $\mathrm{Ker}(\varphi_\varepsilon) \supset U_G^0$.

Un homomorphisme $\varepsilon : G \to C$ tel que $\varepsilon(g) = 1$ pour tout $g \in G_2$ sera appelé un *caractère essentiel* de G. D'après le théorème ci-dessus l'homomorphisme $\varphi_\varepsilon : U_G \to U_C$ est à valeurs dans C, autrement dit définit un homomorphisme de groupes algébriques $\tilde{\varepsilon} : U_G \to C$; ici, C est vu comme un groupe algébrique étale, de dimension 0. Il est commode d'interpréter $\tilde{\varepsilon}$ comme l'homomorphisme $U_G \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ défini par :

(5.2.6) $\tilde{\varepsilon}(x) = \mu(x)$ pour tout $x \in U_G(k)$,

ce qui a un sens puisque $\mu(x) = 0$ ou 1, comme on vient de le voir.

Soit U_G^0 la composante neutre de U_G. L'homomorphisme $\tilde{\varepsilon} : U_G \to C \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est trivial sur U_G^0, et peut donc être vu comme un caractère du groupe quotient U_G/U_G^0.

Remarque. L'homomorphisme $k[G] \to k[C]$ défini par ε se factorise par le bloc principal B, cf. (5.1.15). Il en résulte que $\tilde{\varepsilon} : U_G \to C$ se factorise par U_B. Autrement dit, les caractères essentiels n'apportent aucun renseignement sur les groupes unitaires des blocs distincts du bloc principal.

Théorème 5.2.7 - *Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : G \to C$ deux caractères essentiels de G et soit $\varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2$ leur produit. Alors ε_3 est essentiel et l'on a :*

(5.2.8) $\tilde{\varepsilon}_3 = \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_2$;

(5.2.9) *l'homomorphisme $\varphi : U_G \to U_{C\times C}$ défini par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : G \to C \times C$ est trivial sur U_G^0, et son image est contenue dans $C \times C$.*

Le fait que ε_3 soit essentiel est clair. Le reste de la proposition est évident si l'un des ε_i est égal à 1. On peut donc supposer qu'ils sont $\neq 1$, autrement dit que $G \to C \times C$ est surjectif.

Démonstration de (5.2.8). Notons $\mu_i : G \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ la fonction μ associée à ε_i comme dans (5.2.2) :

(5.2.10) $\mu_i(x) = \sum_{\varepsilon_i(g)=c} x_g$ si $x = \sum x_g g$ est un point de U_G.

D'après (5.2.6), la formule (5.2.8) équivaut à $\mu_1(x)+\mu_2(x)+\mu_3(x) = 0$ pour tout point x de U_G. Notons H_1 l'ensemble des $g \in G$ tels que $\varepsilon_1(g) = 1$ et $\varepsilon_2(g) = \varepsilon_3(g) = c$; définissons de même H_2 et H_3. Posons :

(5.2.11) $Y = \sum_{g\in H_1} x_g$, $Z = \sum_{g\in H_2} x_g$, $T = \sum_{g\in H_3} x_g$.

L'ensemble des g tels que $\varepsilon_1(g) = c$ est $H_2 \sqcup H_3$. Avec les notations de (5.2.10), on a donc :

(5.2.12) $\mu_1(x) = Z + T$.

De même :

(5.2.13) $\mu_2(x) = T + Y$.

(5.2.14) $\mu_3(x) = Y + Z$.

En ajoutant ces trois relations, on obtient l'égalité cherchée :

$\mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x) = 0$.

Démonstration de (5.2.9). Conservons les notations ci-dessus et notons H_0 l'ensemble des $g \in G$ tels que $\varepsilon_1(g) = \varepsilon_2(g) = 1$; on a $G = H_0 \sqcup H_1 \sqcup H_2 \sqcup H_3$. Posons :

(5.2.15) $X = \sum_{g \in H_0} x_g$.

L'image de x par $\varphi : U_G \to U_{C \times C}$ a pour coordonnées (X, Y, Z, T) ; de façon plus précise, on a :

$\varphi(x) = X.(1,1) \ + \ Y.(c,1) \ + \ Z.(1,c) \ + \ T.(c,c)$,

où $(1,1), (c,1), (1,c), (c,c)$ sont les quatre éléments de $C \times C$. Le fait que $\varphi(x)$ appartienne à $C \times C$ équivaut à dire que X, Y, Z et T sont tous 0, à l'exception de l'un d'eux qui est égal à 1. Pour le démontrer, nous allons d'abord calculer $XY + ZT$. D'après (5.2.11) et (5.2.15), on a :

(5.2.16) $XY + ZT = \sum x_u x_v$,

la somme étant étendue aux $(u, v) \in \ H_0 \times H_1 \ \sqcup \ H_2 \times H_3$.

Choisissons une partie σ de H_1 telle que $H_1 = \sigma \sqcup \sigma^{-1}$. C'est possible car H_1 est stable par $g \mapsto g^{-1}$, et ne contient aucun élément de carré 1. Si $(u, v) \in \ H_0 \times H_1 \ \sqcup \ H_2 \times H_3$, on a $vu^{-1} \in H_1$. Posons $(a, b) = (u, v)$ si $vu^{-1} \in \sigma$ et $(a, b) = (v, u)$ si $vu^{-1} \in \sigma^{-1}$. L'application $(u, v) \mapsto (a, b)$ est une bijection de $H_0 \times H_1 \ \sqcup \ H_2 \times H_3$ sur l'ensemble des couples $(a, b) \in G \times G$ tels que $ba^{-1} \in \sigma$. Cela permet de récrire la formule (5.2.16) sous la forme :

(5.2.17) $XY + ZT = \sum_{(a,b) \in \sigma'} x_a x_b = \sum_{a \in G, s \in \sigma} x_a x_{sa} = \sum_{s \in \sigma} \sum_{a \in G} x_a x_{sa}$.

D'après la formule (A_s) du §5.1, on a $\sum_{a \in G} x_a x_{sa} = 0$ pour tout $s \in \sigma$. On en tire :

(5.2.18) $XY + ZT = 0$, autrement dit $XY = ZT$.

Un argument analogue montre que $XZ = YT$ et $XT = YZ$. D'autre part la formule (A_1) du §5.1 montre que $X+Y+Z+T = 1$. On conclut la démonstration de (5.2.9) en appliquant le lemme suivant :

Lemme 5.2.19 - *Soient X, Y, Z, T des éléments d'un corps de caractéristique 2 tels que $X + Y + Z + T = 1, XY = ZT, XZ = YT$ et $XT = YZ$. Alors trois de ces éléments sont égaux à 0, et le quatrième est égal à 1.*

Démonstration. Si aucun des X, Y, Z, T n'est nul, les équations $XY = ZT, XZ = YT$ et $XT = YZ$ entraînent $X^2 = Y^2 = Z^2 = T^2$, i.e. $X = Y = Z = T$, ce qui est incompatible avec $X + Y + Z + T = 1$. Si par exemple X est 0, l'équation $XY = ZT$ montre que, soit $Z = 0$ ou $T = 0$; si $X = Z = 0$, l'équation $XZ = YT$ montre que Y ou T est 0 ; de même, si $X = T = 0$, alors Y ou Z est 0. La seule possibilité est donc que trois des éléments soient 0, le quatrième étant égal à 1.

5.3. **Le sous-groupe G_0.**

Soit X_G le groupe des caractères essentiels de G, et soit $G_0 = \bigcap_{\varepsilon \in X_G} \mathrm{Ker}(\varepsilon)$. Le groupe G/G_0 est un 2-groupe abélien élémentaire, dont le dual est X_G.

Théorème 5.3.1 - (i) *Le groupe G_0 est le sous-groupe de G engendré par les éléments d'ordre 2 et par les carrés.*

(ii) *On a $G_0 = G \cap U_G^0$.*

[Dans (ii), G_0 est vu comme sous-groupe algébrique constant de U_G ; la formule $G_0 = G \cap U_G^0$ signifie que $G_0 = G \cap U_G^0(k)$ pour tout corps k de caractéristique 2, ce qui équivaut d'ailleurs à $G_0 = G \cap U_G^0(\mathbf{F}_2)$.]

Démonstration de (i). Soit H le sous-groupe de G engendré par les carrés et par les éléments d'ordre 2 de G. Tout caractère essentiel de G est trivial sur H. On a donc $H \subset G_0$. D'autre part, H est normal dans G et tout élément de G/H est de carré 1. Il en résulte que G/H est un 2-groupe abélien élémentaire, et H est donc l'intersection des noyaux des caractères $\varepsilon : G \to C$ qui sont triviaux sur H. Comme H contient G_2, ces caractères sont essentiels. On a donc $G_0 \subset H$, d'où $G_0 = H$.

Démonstration de (ii). D'après la proposition 3.3.1 et le corollaire 3.3.2, les éléments d'ordre 2 de G, ainsi que les carrés, sont dans U_G^0. Vu (i), cela entraîne $G_0 \subset U_G^0$. D'autre part, si $g \in G$ n'appartient pas à G_0, il existe un caractère essentiel ε de G tel que $g \notin \mathrm{Ker}(\varepsilon)$; comme $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ contient U_G^0, cela montre que g n'appartient pas à U_G^0. On a donc bien $G_0 = G \cap U_G^0$.

Proposition 5.3.2 - *Pour que $G_0 = G$, il faut et il suffit que G soit engendré par des éléments d'ordre 2 et par des éléments d'ordre impair.*

Démonstration. Soit K le sous-groupe de G engendré par les éléments d'ordre 2 et par ceux d'ordre impair. Comme tout élément d'ordre impair est un carré, on a $K \subset G_0$; si $K = G$ on a donc $G_0 = G$. D'autre part, si $K \neq G$, le quotient G/K est un 2-groupe non trivial ; il existe donc un homomorphisme surjectif $G \to C$ dont le noyau contient K ; un tel homomorphisme est essentiel, ce qui montre que $G_0 \neq G$.

Exemples de groupes G tels que $G = G_0$: un groupe simple (abélien ou non), un groupe de Coxeter, un groupe commutatif sans élément d'ordre 4.

Exemples de groupes G tels que $G \neq G_0$: un groupe quaternionien d'ordre 2^n ($n \geqslant 3$), un groupe ayant un quotient cyclique d'ordre 4, un groupe $\widehat{S}_n$, avec $n = 3, 4, 5$. [6]

5.4. **Décomposition de U_G/U_G^0 en produit.**

Le groupe U_G/U_G^0 est un groupe étale. Plaçons-nous d'abord sur le corps algébriquement clos $k = \overline{\mathbf{F}}_2$, de sorte que nous pouvons identifier U_G/U_G^0 au groupe de ses k-points. D'après le corollaire 3.3.3, c'est un 2-groupe abélien élémentaire ; il contient le groupe G/G_0, cf. théorème 5.3.1.

Soit $\widetilde{X}_G = \mathrm{Hom}(U_G/U_G^0, C)$ le dual de U_G/U_G^0. Comme le dual de G/G_0 est le groupe X_G des caractères essentiels, l'injection $G/G_0 \to U_G/U_G^0$ donne par dualité une surjection $r : \widetilde{X}_G \to X_G$. D'autre part, on a vu que tout $\varepsilon \in X_G$ définit un élément $\tilde{\varepsilon}$ de $\widetilde{X}_G$, et que l'application $i : X_G \to \widetilde{X}_G$ définie par $\varepsilon \mapsto \tilde{\varepsilon}$ est un homomorphisme (théorème 5.2.7) ; le composé $r \circ i$ est l'identité car la restriction de $\tilde{\varepsilon}$ à G/G_0 est ε. On déduit de ceci que le groupe $\widetilde{X}_G$ se décompose en produit :

(5.4.1) $\widetilde{X}_G = X_G \times \mathrm{Im}(i)$.

Par dualité, cela donne une décomposition analogue pour U_G/U_G^0 :

(5.4.2) $U_G/U_G^0 = G/G_0 \times E_G$,

6. Rappelons que $\widehat{S}_n$ désigne une extension centrale de S_n par un groupe d'ordre 2, dans laquelle les transpositions, et les produits de deux transpositions disjointes, se relèvent en des éléments d'ordre 4.

où E_G est le dual de $\mathrm{Im}(i)$, c'est-à-dire l'intersection des noyaux des $\tilde{\varepsilon}$ (les $\tilde{\varepsilon}$ étant identifiés à des caractères de U_G/U_G^0).

Cette décomposition, étant canonique, descend au corps de base $\mathbf{F}_2$. On obtient ainsi :

Proposition 5.4.3 - *Soit E_G l'intersection des noyaux des homomorphismes $\tilde{\varepsilon} : U_G/U_G^0 \to C$ associés aux caractères essentiels ε de G. Le groupe U_G/U_G^0 est produit direct de ses sous-groupes G/G_0 et E_G.*

Remarques.

(5.4.4) On aurait également pu définir E_G comme le quotient $U_G/G.U_G^0$; toutefois, le point essentiel de la construction ci-dessus est que E_G est canoniquement un facteur direct du groupe U_G/U_G^0 ; ce sera utile au §6.3.

(5.4.5) Il serait intéressant de trouver un procédé de calcul explicite de E_G. On en verra quelques exemples ci-dessous ; dans chacun d'eux, on trouve que $E_G = \{1\}$, sauf dans les cas 5.5.6 et 5.5.17 : $G = \widehat{S}_3$ et $G = \widehat{A}_5$.

5.5. Exemples de détermination des groupes U_G/U_G^0 et E_G.

Pour simplifier, on suppose que le corps de base k est algébriquement clos ; en fait, cette hypothèse est inutile dans les cas 5.5.2 et 5.5.5, et dans les cas 5.5.6, 5.5.16 et 5.5.17 elle peut être remplacée par celle que k contient une racine primitive cubique de l'unité.

5.5.1. *G d'ordre impair.* L'algèbre $k[G]$ est semi-simple. Les 2-blocs de G sont les facteurs simples de $k[G]$. Le bloc principal est le corps k. Aucun autre bloc n'est auto-dual ; cela résulte du théorème analogue en caractéristique 0, dû à Burnside [Bu 11, §222, th.II] sous la forme équivalente suivante : le seul caractère irréductible de G à valeurs réelles est le caractère unité. On en déduit, cf. §3.4, que U_G est isomorphe à un produit $\prod \mathbf{GL}_{n_i}$, avec $|G| = 1 + 2\sum n_i^2$; en particulier, U_G est connexe et l'on a donc $E_G = \{1\}$.

5.5.2. *G cyclique d'ordre une puissance de 2.* Soit n l'ordre de G. On a vu plus haut que $U_G = \{1\}$ lorsque $n = 1$ et $U_G \simeq \mathbf{G}_a$ lorsque $n = 2$. Supposons $n \geqslant 4$, et notons ε l'unique caractère essentiel non trivial de G. On peut identifier $k[G]$ à l'algèbre $A = k[t]/(t^n)$, de telle sorte que $s = 1 + t$ soit un générateur de G. L'involution de A est telle que $s^* = s^{-1}$, autrement dit $t^* = t/(1+t) = t + t^2 + ... + t^{n-1}$. Tout élément unitaire x de U_A s'écrit comme un polynôme :

$$x = 1 + a_1 t + ... + a_{n-1} t^{n-1}.$$

Dans le produit $x^* x$, le coefficient de t^2 est $a_1^2 + a_1$; puisque x est unitaire, on a donc $a_1^2 + a_1 = 0$, i.e. $a_1 = 0$ ou 1. Le caractère $U_G \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ défini par $x \mapsto a_1$ est le caractère $\tilde{\varepsilon}$ associé à ε. Son noyau U_1 est formé des x tels que $a_1 = 0$, i.e. $x \equiv 1 \pmod{t^2}$; nous allons voir que U_1 est connexe.

Lemme 5.5.3 - *Tout élément x de U_1 s'écrit sous la forme $x = y^{-1}y^*.z$, où y est un élément inversible de A et $z \equiv 1 \pmod{t^{n-2}}$.*
[Noter que tout élément de A de la forme $y^{-1}y^*$ est unitaire ; il en est de même des $z \in A$ tels que $z \equiv 1 \pmod{t^{n-2}}$, car on a $z = z^*$ et $z^2 = 1$.]

Démonstration. Soit $x \in U_1$, et soit $b = t^* + x^* t$. On a :

(5.5.4) $bx = t^*x + xx^*t = t^*x + t = b^*$.

Comme $x \equiv 1 \pmod{t^2}$, on a $b \equiv t^* + t \equiv t^2 \equiv tt^* \pmod{t^3}$. Il existe donc $y \in A$ tel que $b = tt^*y$ et $y \equiv 1 \pmod{t}$. L'équation (5.5.4) entraîne $tt^*xy = tt^*y^*$, autrement dit $tt^*(xy + y^*) = 0$, ce qui équivaut à $xy + y^* \equiv 0 \pmod{t^{n-2}}$. Si l'on pose $z = xy(y^*)^{-1}$, on a donc $z \equiv 1 \pmod{t^{n-2}}$ et $x = y^{-1}y^*.z$; d'où le lemme.

Comme l'ensemble des $y^{-1}y^*$ est connexe, ainsi que celui des z avec $z \equiv 1 \pmod{t^{n-2}}$, le lemme montre que U_1 est connexe, et comme il est d'indice 2 dans U_G, on a $U_1 = U_G^0$. Cela montre que l'on a $E_G = \{1\}$ (d'ailleurs il est clair que U_G est engendré par G et U_1).

5.5.5. *G quaternionien d'ordre 8.* Les éléments de G sont traditionnellement notés $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$; pour éviter tout risque de confusion, dû au corps de base k ainsi qu'au fait que $-1 = 1$ dans k, nous les noterons $\{1, \omega, u, \omega u, v, \omega v, w, \omega w\}$; on a $\omega^2 = 1, uv = w, vw = u, wu = v, u^2 = v^2 = w^2 = \omega$. Il y a trois caractères essentiels $\neq 1$, dont les noyaux sont les trois sous-groupes cycliques d'ordre 4 de G ; on se trouve donc dans la situation du théorème 5.2.7, que l'on va utiliser.

Soit U_1 l'ensemble des éléments de $k[G]$ de la forme $x = 1 + (1 + \omega)a$, avec $a \in k[G]$. C'est un sous-groupe de U_G : cela résulte du fait que $1 + \omega$ est central, de carré nul, et que $\omega a = \omega a^*$ pour tout a. Un élément de U_1 s'écrit de façon unique :

$x = 1 + (1 + \omega)(\alpha + \beta u + \gamma v + \delta w)$, avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$.

Cela montre que U_1 est isomorphe à $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$. D'autre part, U_1 est le noyau de l'homomorphisme $U_G \to U_{G/\{1,\omega\}}$; d'après le théorème 5.2.7, l'image de cet homomorphisme est d'ordre 4. On conclut de ceci que $U_1 = U_G^0$, $(U_G : U_G^0) = 4$ et $U_G = G.U_G^0$, autrement dit $E_G = \{1\}$.

5.5.6. *$G = \widehat{S}_3$, d'ordre 12.* Le groupe G est produit semi-direct d'un groupe cyclique $C_4 = \{1, s, s^2, s^3\}$ d'ordre 4, par un groupe cyclique $C_3 = \{1, r, r^2\}$ d'ordre 3, l'action du premier sur le second étant donnée par $srs^{-1} = r^2$. Le quotient de G par son centre $\{1, s^2\}$ est isomorphe au groupe symétrique S_3.

L'algèbre $A = k[G]$ se décompose en produit de deux blocs B et B'. On a $B = A/\pi A$ et $B' = A/\pi' A$, où π et π' sont les idempotents centraux $\pi = r + r^2$; $\pi' = 1 + r + r^2$. On a $\dim B = 4$ et $\dim B' = 8$.

Le bloc B est le bloc principal ; il est donné par la projection $A \to k[C_4]$. Le groupe U_G se décompose en $U_B \times U_{B'}$; on a donc $U_G/U_G^0 \simeq U_B/U_B^0 \times U_{B'}/U_{B'}^0$. Nous allons voir que *chacun des quotients U_B/U_B^0 et $U_{B'}/U_{B'}^0$ est d'ordre* 2. Comme G n'a qu'un seul caractère essentiel $\neq 1$, cela montrera que *le groupe E_G est d'ordre* 2 ; de façon plus précise, c'est le facteur $U_{B'}/U_{B'}^0$ de U_G/U_G^0.

Le cas du bloc $B \simeq k[C_4]$ a déjà été traité, cf. 5.5.2, avec $n = 4$.

Passons à B'. Soient r' et s' les images de r et de s dans B', et notons K la sous-algèbre de B' engendrée par r'. C'est une algèbre quadratique, isomorphe à $k[r']/(r'^2 + r' + 1) \simeq k \otimes_{\mathbf{F}_2} \mathbf{F}_4$; comme on a supposé k algébriquement clos, on a $K \simeq k \times k$; de plus, si $z = (z_1, z_2)$ est un élément de K, on a $z^* = (z_2, z_1) = s'zs'^{-1}$. Tout $x \in B'$ s'écrit de façon unique sous la forme

$x = a + bs' + cs'^2 + ds'^3$, avec $a = (a_1, a_2) \in K, ..., d = (d_1, d_2) \in K$.

Lorsqu'on écrit que x est unitaire, on trouve les relations suivantes :

(5.5.7) $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 = 1$,

(5.5.8) $(a_1 + c_1)(b_1 + d_1) = 0$,

(5.5.9) $(a_2 + c_2)(b_2 + d_2) = 0$,

(5.5.10) $a_1c_2 + c_1a_2 = b_1d_2 + b_2d_1$.

Les relations (5.5.8) et (5.5.9) donnent *a priori* quatre possibilités :

(5.5.11) $b_1 = d_1$ et $b_2 = d_2$ (autrement dit $b = d$),

(5.5.12) $a_1 = c_1$ et $a_2 = c_2$ (autrement dit $a = c$),

(5.5.13) $b_1 = d_1$ et $a_2 = c_2$,

(5.5.14) $a_1 = c_1$ et $b_2 = d_2$.

En fait, (5.5.13) est impossible, car, en ajoutant (5.5.7) et (5.5.10), on trouverait $0 = 1$. Même chose pour (5.5.14). Il ne reste donc que les seules possibilités (5.5.11) et (5.5.12). Dans le cas de (5.5.11), les équations (5.5.7) et (5.5.10) entraînent :

(5.5.15) $a_1a_2 + c_1c_2 = 1$ et $a_1c_2 = a_2c_1$.

On obtient ainsi un sous-groupe ouvert d'indice 2 de $U_{B'}$, qui est produit semi-direct de $\mathbf{G}_m$ (le groupe des $(a, 0, 0, 0)$ avec $a_1a_2 = 1$) par un groupe isomorphe à $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$. Ce groupe est connexe ; c'est donc la composante neutre de $U^0_{B'}$.

Le cas (5.5.12) donne l'autre composante connexe de $U_{B'}$: celle contenant s'.

Remarques.

1) Lorsque k ne contient pas de racine primitive cubique de l'unité, $K = k \otimes \mathbf{F}_4$ est une extension quadratique de k, et le groupe $\mathbf{G}_m$ ci-dessus doit être remplacé par son "K/k-tordu", autrement dit par $\mathrm{Ker}(R_{K/k}(\mathbf{G}_m) \to \mathbf{G}_m)$.

2) Le bloc B' est du type décrit au §3.7 : son radical $\mathfrak{r}'$ est engendré par l'élément hermitien $\omega = 1 + s'^2$, qui est de carré nul, et le quotient $B'/\mathfrak{r}'$ est isomorphe à l'algèbre de matrices $\mathbf{M}_2$. L'image de $U_{B'} \to U_{B'/\mathfrak{r}'} \simeq \mathbf{SL}_2$ est le groupe orthogonal $\mathbf{O}_2$ associé à la forme quadratique $x^2 + xy + y^2$: c'est la situation de 3.7.5 (iii).

5.5.16. $G = A_5 = \mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_5) = \mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_4)$, *d'ordre* 60. Ici encore, il y a deux blocs, B et B'.

Le bloc principal B est de dimension 44 ; le quotient de B par son radical $\mathfrak{r}_B$ est isomorphe à $k \times \mathbf{M}_2(k) \times \mathbf{M}_2(k)$, ces trois facteurs correspondant aux représentations irréductibles de G de degré 1, 2 et 2. On a $U_{B/\mathfrak{r}_B} \simeq \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2$. L'homomorphisme $U_B \to U_{B/\mathfrak{r}_B}$ est lisse (et donc surjectif) : cela se voit en remarquant que $\mathrm{Lie}\, U_G \to \mathrm{Lie}(\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2)$ est surjectif. Un calcul sur ordinateur fait par M. Barakat (cf. [Ba 13]) montre que *le noyau de* $U_B \to U_{B/\mathfrak{r}_B}$ *est connexe* ; cela entraîne que U_B est connexe, et que son plus grand quotient réductif est isomorphe à $\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2$.

Le bloc B' est isomorphe à $\mathbf{M}_4(k)$: c'est un bloc de défaut 0, cf. [CR 62, §86] et [Se 68, §16.4] ; il correspond à la représentation irréductible de degré 4 de G, qui est un $k[G]$-module projectif. On a $U_{B'} \simeq \mathbf{Sp}_4$. Comme $U_G = U_B \times U_{B'}$, on en déduit que U_G est connexe, d'où $E_G = \{1\}$.

Remarque. Lorsque k ne contient pas de racine primitive cubique de l'unité, on doit remplacer $\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2$ par $R_{K/k}(\mathbf{SL}_2)$, où $K = k \otimes \mathbf{F}_4$ désigne comme ci-dessus l'extension quadratique de k engendrée par les racines cubiques de l'unité.

5.5.17. $G = \widehat{A}_5 = \mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_5)$, *d'ordre 120.* Il y a deux blocs B et B' qui correspondent à ceux de A_5, cf. [Fe 82, Chap.V, §4]. De façon plus précise, si $\omega = 1+c$, où c est l'unique élément d'ordre 2 de G, les quotients $B/\omega B$ et $B'/\omega B'$ sont les blocs de A_5 . D'où des homomorphismes :

$$\varphi : U_B \ \to \ \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2 \quad \text{et} \quad \varphi' : U_{B'} \to \mathbf{Sp}_4.$$

Ces homomorphismes ont les propriétés suivantes :

(5.5.19) *L' homomorphisme* $\varphi : U_B \ \to \ \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2$ *est surjectif, mais n'est pas lisse.*

(5.5.20) *L'homomorphisme* $\varphi' : U_{B'} \ \to \ \mathbf{Sp}_4$ *est lisse, mais n'est pas surjectif*; *son image est un groupe orthogonal* $\mathbf{O}_4$.

Démonstration de (5.5.19). Si φ n'était pas surjectif, son image aurait un facteur $\mathbf{O}_2$ et un tel groupe n'a pas de sous-groupe isomorphe à A_5. D'autre part, un calcul facile montre que l'image de $\mathrm{Lie}(U_B) \to \mathrm{Lie}(\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2)$ est égale au centre de $\mathrm{Lie}(\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2)$; d'où le fait que φ n'est pas lisse. D'après [Va 05], cela entraîne :

(5.5.21) *L'homomorphisme* $U_B \to \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_2$ *se factorise par* $\mathbf{SO}_3 \times \mathbf{SO}_3$.

Démonstration de (5.5.20). Le bloc B' est du type décrit au §3.7 ; de plus, il n'est pas isomorphe à $\mathbf{M}_4 \otimes_k k[t]/(t^2)$; cela se voit, par exemple, en remarquant que certains hermitiens de $B'/\omega B'$ ne sont pas images d'hermitiens de B'. On conclut en utilisant le corollaire 3.7.5. (La lissité de φ' se vérifie par un calcul explicite.)

Noter deux conséquences de (5.5.19) et (5.5.20) :

(5.5.22) *Le groupe* $U_G^0/R_u(U_G^0)$ *est isomorphe à* $\mathbf{SO}_3 \times \mathbf{SO}_3 \times \mathbf{SO}_4$.

(5.5.23) *On a* $E_G \neq \{1\}$.

On aurait $|E_G| = 2$ si U_B était connexe ; j'ignore si c'est le cas.

5.6. **Nombres de points sur les corps finis.**

Soit $q = 2^n, n \geqslant 1$, une puissance de 2, et soit $n_G(q)$ le nombre d'éléments du groupe $U_G(\mathbf{F}_q)$. On trouve dans la littérature un certain nombre de cas où ce nombre a été calculé, cf. par exemple [BR 00] (cette référence m'a été signalée par M. Barakat). Ce calcul peut être utilisé pour déterminer l'ordre du groupe U_G/U_G^0. Voici comment (pour simplifier on se borne au cas où G est un 2-groupe, de sorte que U_G est unipotent) :

On remarque d'abord que, si N est un groupe unipotent connexe sur $\mathbf{F}_q$, tout N-torseur a un point rationnel, et le nombre de ses points rationnels est $q^{d(N)}$, où $d(N)$ est la dimension de N ; cela se voit par dévissage, à partir du cas $N = \mathbf{G}_a$.

On applique ceci au groupe $N = U_G^0$; on en déduit que, si d désigne la dimension de U_G, on a $U_G(\mathbf{F}_q) = 2^{c(q)}q^d$, où $2^{c(q)}$ est le nombre de $\mathbf{F}_q$-points

du groupe étale $I = U_G/U_G^0$. Le groupe des $\overline{\mathbf{F}}_2$-points de I est un groupe de type (2,...,2), autrement dit un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel ; soit c sa dimension et soit σ l'automorphisme de Frobenius de ce groupe, relativement au corps $\mathbf{F}_2$. Si $q = 2^n$, l'entier $c(q)$ défini ci-dessus est la dimension de l'espace des points fixes du n-ième itéré σ^n de σ ; on a donc $0 \leqslant c(q) \leqslant c$, et l'égalité $c(q) = c$ a lieu lorsque n est un multiple de l'ordre de σ. D'où :

Proposition 5.6.1 - *On a $|U_G(\mathbf{F}_q)| = 2^{c(q)}q^d$, où d est la dimension de U_G et $c(q)$ est un entier compris entre 0 et c, avec $|U_G/U_G^0| = 2^c$; de plus, $c(q) = c$ pour une infinité de valeurs de q.*

Corollaire 5.6.2 - *On a $U_G = U_G^0$ si et seulement si $|U_G(\mathbf{F}_q)| = q^d$ pour tout q.*

Corollaire 5.6.3 - *On a $|U_G/U_G^0| = \sup_q |U_G(\mathbf{F}_q)|/q^d$.*

Exemple. Le corollaire 5.6.2, combiné avec les résultats de [BR 00], montre que U_G est connexe lorsque G est un 2-groupe diédral ou extra-spécial, et que $|U_G/U_G^0| = 4$ lorsque G est un 2-groupe quaternionien ; dans les deux cas, cela entraîne $E_G = \{1\}$.

§6 - Structure des G-formes trace

Comme au §5, G est un groupe fini, et k est un corps de caractéristique 2 (non nécessairement parfait). On note $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et k_s la plus grande extension séparable de k contenue dans $\overline{k}$; le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_s/k) = \mathrm{Aut}_k(\overline{k})$ est noté Γ_k. On rappelle que G_0 désigne le sous-groupe de G engendré par les éléments d'ordre 2 et par les carrés, cf. §5.3.

6.1. **Le théorème principal et ses corollaires.**

6.1.1. *La G-forme trace associée à une G-algèbre galoisienne.*

Soit L une G-algèbre galoisienne sur k. Rappelons que cela signifie que L est une k-algèbre commutative, qui est étale (i.e. produit fini d'extensions finies séparables de k), et qui est munie d'une action de G qui en fait un $k[G]$-module libre de rang 1. D'autres caractérisations se trouvent dans [A VIII, §16.7] et [BFS 94, §1.3] ; l'une d'elles est : "L est l'algèbre affine d'un G-torseur sur k". Lorsque L est un corps, il revient au même de dire que L est une extension galoisienne de k, munie d'un isomorphisme $G \simeq \mathrm{Gal}(L/k)$; cela explique la terminologie choisie.

Nous noterons $q_L : L \times L \to k$ la forme bilinéaire symétrique définie par :

(6.1.2) $q_L(x, y) = \mathrm{Tr}_{L/k}(xy)$, où $\mathrm{Tr}_{L/k}$ désigne la trace.

Comme L/k est étale, cette forme bilinéaire est non dégénérée. Elle est invariante par G : on a

(6.1.3) $q_L(gx, gy) = q_L(x, y)$ quels que soient $g \in G, x \in L, y \in L$.

On dit que q_L est la *G-forme trace* de L. Deux telles G-formes q_L et $q_{L'}$ sont isomorphes si et seulement si il existe une bijection k-linéaire $f : L \to L'$, compatible à l'action de G, et telle que $q_{L'}(f(x), f(y)) = q_L(x, y)$ quels que soient $x, y \in L$. On écrit alors $q_L \simeq_G q_{L'}$.

6.1.4. *Le théorème principal.*

Si L est une G-algèbre galoisienne, et si H est un sous-groupe normal de G, l'ensemble L^H des éléments de H fixés par H est une sous-algèbre de L sur laquelle G/H opère, et c'est une G/H-algèbre galoisienne. Nous allons utiliser ceci pour $H = G_0$:

Théorème 6.1.5 - *Soient L et L' deux G-algèbres galoisiennes sur k. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *Les G-formes q_L et $q_{L'}$ sont isomorphes.*

(ii) *Les G/G_0-algèbres galoisiennes L^{G_0} et L'^{G_0} sont isomorphes.*

La démonstration sera donnée au §6.3.

6.1.6. *Traduction du théorème 6.1.5 en termes d'homomorphismes.*

Une G-algèbre galoisienne est déterminée à isomorphisme près par un homomorphisme continu $\varphi_L : \Gamma_k \to G$; deux homomorphismes donnent des G-algèbres isomorphes si et seulement si ils sont G-conjugués, cf. [BFS 94, §1.3.1]. Le théorème 6.1.5 peut donc être reformulé de la façon suivante :

Théorème 6.1.7 - *Soient $\varphi_L, \varphi_{L'} : \Gamma_k \to G$ les homomorphismes associés à L et L', et soient $\varphi^0_L, \varphi^0_{L'} : \Gamma_k \to G/G_0$ leurs composés avec $G \to G/G_0$. Pour que les G-formes traces q_L et $q_{L'}$ soient isomorphes, il faut et il suffit que $\varphi^0_L = \varphi^0_{L'}$.*

Remarque. Bien que φ_L ne soit défini qu'à G-conjugaison près, son composé φ^0_L avec $G \to G/G_0$ est défini sans ambiguïté, puisque G/G_0 est commutatif. Comme de plus G/G_0 est un 2-groupe élémentaire (cf. §5.3), on peut utiliser la théorie d'Artin-Schreier ([A V, §11.9]) pour interpréter φ^0_L en termes du quotient $k/\wp(k)$, où $\wp : k \to k$ est $x \mapsto x^2 + x$; de façon plus précise, si X_G désigne le groupe des caractères essentiels de G, on peut identifier φ_L à un homomorphisme $\alpha_L : X_G \to k/\wp(k)$ et le théorème 6.1.5 dit que α_L détermine q_L.

6.1.8. *Application à l'existence d'une BNA et démonstration du théorème B.*

Prenons pour L' une G-algèbre galoisienne scindée ("split"), autrement dit un produit $k \times ... \times k$ de copies de k, permutées de façon simplement transitive par G ; du point de vue galoisien, cela revient à dire que $\varphi_{L'} : \Gamma_k \to G$ est trivial. La G-forme trace correspondante est la *G-forme unité* ; elle a une base normale autoduale canonique : l'ensemble des idempotents indécomposables $(1, 0, .., 0), ..., (0, ..., 0, 1)$. Le théorème 6.1.7 entraîne donc :

Théorème 6.1.9 - *Pour que L possède une base normale autoduale, il faut et il suffit que $\varphi^0_L = 1$, autrement dit que l'image de $\varphi_L : \Gamma_k \to G$ soit contenue dans G_0, ou encore que L soit isomorphe à une algèbre induite $\mathrm{Ind}_{G_0}^G M$, où M est une G_0-algèbre galoisienne.*

[Pour la notion d' *induction* des algèbres galoisiennes (appelée *coïnduction* dans [A VIII, §16.7]), voir par exemple [BFS 94, §1.3.2].]

Corollaire 6.1.10 - *Supposons que L soit un corps. Pour que L ait une BNA, il faut et il suffit que $G = G_0$, autrement dit* (cf. proposition 5.3.2), *que G soit engendré par des éléments d'ordre 2 et par des éléments d'ordre impair.*

[C'est le théorème B de l'introduction.]

Cela résulte du théorème 6.1.9 : en effet, l'hypothèse que L est un corps équivaut à dire que φ_L est surjectif ; son image ne peut être contenue dans G_0 que si $G = G_0$.

6.1.11. *Application aux extensions de degré impair.*

Corollaire 6.1.12 - *Soient L et L' deux G-algèbres galoisiennes, et soit k_1 une extension finie de k de degré impair. Si les G-formes q_L et $q_{L'}$ deviennent isomorphes après extension des scalaires à k_1, elles sont k-isomorphes.*

Démonstration. Le groupe Γ_{k_1} est un sous-groupe d'indice impair de Γ_k ; cela entraîne que, si ψ, ψ' sont deux homomorphismes de Γ_k dans un 2-groupe abélien qui coïncident sur Γ_{k_1}, alors $\psi = \psi'$. D'où $\varphi_L^0 = \varphi_{L'}^0$, et l'on applique le théorème 6.1.7.

Variante. Utiliser le corollaire 4.9.3.

Remarque. J'ignore si cet énoncé s'étend à des G-formes bilinéaires symétriques quelconques (comme c'est le cas en caractéristique $\neq 2$, cf. [BFL 90, th.4.1]).

6.1.13. *Un théorème d'existence.*

Théorème 6.1.14 - *Soit H un sous-groupe de G tel que $H.G_0 = G$ et soit L_0 une G/G_0-algèbre galoisienne. Il existe une H-algèbre galoisienne M telle que, si l'on pose $L' = \mathrm{Ind}_H^G M$, on ait $L'^{G_0} \simeq L_0$.*

Démonstration. Soit S un 2-Sylow de H ; puisque $H \to G/G_0$ est surjectif, et que G/G_0 est un 2-groupe, l'homomorphisme $S \to G/G_0$ est surjectif. On a d'autre part $cd_2(\Gamma_k) \leqslant 1$, cf. [Se 64, II, §2.2] ; d'après [Se 64, I, §3.4], cela entraîne que l'homomorphisme $\varphi_{L_0} : \Gamma_k \to G/G_0$ se relève à S, donc *a fortiori* à H. On obtient ainsi une H-algèbre galoisienne qui a la propriété requise.

Corollaire 6.1.15 - *Pour toute G/G_0-algèbre galoisienne L_0, il existe une G-algèbre galoisienne L telle que $L^{G_0} \simeq L_0$.*

C'est le cas particulier $H = G$.

Corollaire 6.1.16 - *Soit L une G-algèbre galoisienne et soit H un sous-groupe de G tel que $H.G_0 = G$* (par exemple un 2-Sylow de G). *Il existe une H-algèbre galoisienne M telle que les G-formes trace de L et de $\mathrm{Ind}_H^G M$ soient isomorphes.*

Démonstration. On applique le théorème 6.1.14 à $L_0 = L^{G_0}$; on obtient une H-algèbre M, d'où une algèbre induite $L' = \mathrm{Ind}_H^G M$, avec $L'^{G_0} \simeq L^{G_0}$. D'après le théorème 6.1.5, cela entraîne que les G-formes trace de L et de L' sont isomorphes.

6.1.17. *Application au principe de Hasse pour les G-formes trace.*

Supposons que k soit un *corps global* de caractéristique 2, autrement dit une extension de type fini de $\mathbf{F}_2$ dont le degré de transcendance est 1. Le "principe de Hasse" est l'énoncé suivant (démontré en caractéristique $\neq 2$ dans [BPS 13]) :

Théorème 6.1.18 - *Soient L et L' deux G-algèbres galoisiennes sur k. Si, pour toute place v de k, les G-formes trace q_L et $q_{L'}$ deviennent isomorphes sur le complété k_v de k en v, alors elles sont isomorphes.*

Démonstration. Soient $\varphi_L^0, \varphi_{L'}^0 : \Gamma_k \to G/G_0$ les homomorphismes définis dans le théorème 6.1.7. Vu le théorème en question, il nous faut prouver que $\varphi_L^0 = \varphi_{L'}^0$. Or, par hypothèse, cette égalité devient vraie lorsqu'on restreint ces homomorphismes aux groupes de décomposition des places de k ; comme ces groupes

engendrent topologiquement Γ_k (cela résulte par exemple du théorème de densité de Chebotarev), on obtient le résultat cherché.

Remarque. On peut remplacer *toute place* par *toute place sauf un nombre fini*, ou même par *toutes les places d'un ensemble de densité analytique* $> 1/2$; la démonstration est la même. Une telle amélioration n'est pas possible en caractéristique $\neq 2$.

6.2. **Elimination des extensions radicielles**.

Proposition 6.2.1 - *Soient L et L' deux G-algèbres galoisiennes sur k. Supposons que les G-formes q_L et $q_{L'}$ deviennent isomorphes sur une extension radicielle de k. Alors q_L et $q_{L'}$ sont isomorphes.*

Démonstration. On peut supposer que l'extension radicielle en question est de degré fini sur k, donc contenue dans $k^{1/q}$, où q est une puissance convenable de 2. Posons $L^{1/q} = L \otimes_k k^{1/q}$, et définissons de même $L'^{1/q}$. Par hypothèse, il existe un isomorphisme de G-formes $\theta : L^{1/q} \to L'^{1/q}$.

Lemme 6.2.2 - *Il existe un isomorphisme de G-formes $\theta_0 : L \to L'$ et un seul tel que l'on ait*

(6.2.3) $\theta_0(x^q) = \theta(x)^q$ *pour tout* $x \in L^{1/q}$.

Démonstration du lemme 6.2.2. Remarquons d'abord que l'application $x \mapsto x^q$ est une bijection de $L^{1/q}$ sur L (ce qui justifie la notation) ; cela se vérifie en se ramenant au cas d'un corps, qui est bien connu (cf. e.g. [A V, §6.7 et §15.4]). Ce fait, appliqué à L et à L', montre qu'il existe une bijection unique $\theta_0 : L \to L'$ ayant la propriété (6.2.3). Il est clair que θ_0 est k-linéaire, et commute à l'action de G ; le fait qu'elle transforme q_L en q'_L résulte de la formule $\mathrm{Tr}(x^q) = \mathrm{Tr}(x)^q$, qui elle-même se démontre en se ramenant au cas où L est un corps (ou bien en écrivant $\mathrm{Tr}(x)$ comme $\sum_{g \in G} gx$.)

Il est clair que le lemme 6.2.2 entraîne la proposition 6.2.1.

Remarque. La proposition 6.2.1 est spéciale aux G-formes trace, autrement dit aux G-formes associées à des G-algèbres galoisiennes ; elle ne s'étend pas à des G-formes quelconques, comme le montre déjà le cas $G = \{1\}$, où de telles formes correspondent aux éléments de $k^\times/k^{\times 2}$. Nous reviendrons là-dessus au §7.4.

6.3. **Démonstration du théorème 6.1.5.**

Soient L et L' deux G-algèbres galoisiennes sur k. Nous devons montrer l'équivalence de :

(6.3.1) *Les G-formes q_L et $q_{L'}$ sont isomorphes.*

et

(6.3.2) *Les G/G_0-algèbres galoisiennes L^{G_0} et L'^{G_0} sont isomorphes.*

6.3.3. *Réduction au cas où le corps k est parfait.* Soit $k_i = k^{2^{-\infty}}$ la clôture parfaite du corps k. Si la condition (6.3.1) (resp. la condition (6.3.2)) est satisfaite sur k, elle l'est sur k_i. Inversement, si elle est satisfaite sur k_i, elle l'est sur k : c'est clair pour (6.3.2) puisque $\Gamma_{k_i} = \Gamma_k$, et pour (6.3.1) cela résulte de la proposition 6.2.1.

On déduit de là que l'on peut supposer que $k = k_i$, autrement dit que k est parfait. Nous ferons cette hypothèse dans la suite de la démonstration.

6.3.4. *Traduction en termes de cohomologie galoisienne.*

Comme on l'a rappelé au §6.1.6, la G-algèbre L est déterminée à isomorphisme près par un homomorphisme continu $\varphi_L : \Gamma_k \to G$, défini à conjugaison près, autrement dit par un élément de $H^1(k, G)$. Soit f_L cet élément. L'injection $G \to U_G$ transforme f_L en un élément u_L de $H^1(G, U_G)$. On définit de même $f_{L'} \in H^1(k, G)$ et $u_{L'} \in H^1(k, U_G)$. On sait - voir par exemple [BFS 94, proposition 1.5.1] [7] - que la propriété (6.3.1) est équivalente à :

(6.3.5) $u_L = u_{L'}$ *dans* $H^1(k, U_G)$.

6.3.6. *Fin de la démonstration.*

Soient u_L^0 et $u_{L'}^0$ les images de u_L et de $u_{L'}$ dans $H^1(k, U_G/U_G^0)$. D'après le corollaire 4.9.2 (qui est applicable puisque k est parfait), (6.3.5) équivaut à :

(6.3.7) $u_L^0 = u_{L'}^0$ *dans* $H^1(k, U_G/U_G^0)$.

D'après (5.4.2), on a $U_G/U_G^0 = G/G_0 \times E_G$, d'où :

(6.3.8) $H^1(k, U_G/U_G^0) = H^1(k, G/G_0) \times H^1(k, E_G)$.

L'élément u_L^0 de $H^1(k, U_G/U_G^0)$ a deux composantes : l'une dans $H^1(k, G/G_0)$ et l'autre dans $H^1(k, E_G)$. La seconde est triviale car $G \to U_G \to E_G$ applique G en l'élément neutre de E_G. La première est à valeurs dans $H^1(k, G/G_0) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Gamma_k, G/G_0)$; c'est l'homomorphisme noté φ_L^0 dans le théorème 6.1.7, autrement dit le composé $\Gamma_k \xrightarrow{\varphi_L} G \to G/G_0$. On déduit de là que (6.3.7) équivaut à $\varphi_L^0 = \varphi_{L'}^0$, ce qui est équivalent à (6.3.2), et termine la démonstration.

§7 - Compléments

7.1. **Notations.**

Ce sont les mêmes qu'aux §§5,6 : G est un groupe fini, k est un corps de caractéristique 2, et $A = k[G]$. On note $\boldsymbol{t} : A \to k$ l'homomorphisme d'augmentation, i.e. l'unique forme linéaire sur A telle que $\boldsymbol{t}(g) = 1$ pour tout $g \in G$. On note σ_G l'élément $\sum_{g \in G} g$ de A.

Si $x = \sum_{g \in G} x_g g$ est un élément de A, on pose :

(7.1.1) $\delta_g(x) = x_g$;

lorsque $g = 1$, on écrit δ à la place de δ_1.

On a :

(7.1.2) $\delta(xy) = \delta(yx)$ et $\delta(x^*) = \delta(x)$ si $x, y \in A$.

et

(7.1.3) $\boldsymbol{t} = \sum_{g \in G} \delta_g$.

On s'intéressera à des G-*formes* (V, q) au sens suivant :

7. Dans [BFS 94], la caractéristique de k est supposée $\neq 2$; toutefois cette hypothèse ne joue aucun rôle dans la démonstration, à condition d'interpréter q_L comme une G-forme bilinéaire symétrique, et non comme une G-forme quadratique.

(7.1.4) *V est un k-espace vectoriel muni* :
- *d'une action de G qui en fait un A-module libre de rang* 1,
- *d'une forme bilinéaire symétrique q non dégénérée et invariante par G.*

On a $\dim V = |G|$.

Remarque. La condition que q soit invariante par G est équivalente à :

(7.1.5) $q(ax, y) = q(x, a^* y)$ quels que soient $x, y \in V$ et $a \in A$.

Exemple : la forme unité. C'est le cas $(V, q) = (A, q_1)$, où $q_1(x, y) = \delta(xy^*)$ avec les notations ci-dessus. Si g et g' sont deux éléments de G, on a $q_1(g, g') = 1$ si $g = g'$ et $q_1(g, g') = 0$ sinon ; autrement dit, les éléments de G forment une BNA de (A, q_1).

7.2. **Deux questions.**

Nous avons vu au §6 que, si L est une G-algèbre galoisienne, la G-forme q_L ne dépend que de la G/G_0-algèbre galoisienne L^{G_0}, ou, ce qui revient au même, du composé $\Gamma_k \to G \to G/G_0$ (ou encore de l'homomorphisme $\alpha_L : X_G \to k/\wp(k)$ du §6.1.7).

Il est naturel de se poser la question suivante :

(7.2.1) *Lorsqu'on connait $\Gamma_k \to G/G_0$, peut-on décrire explicitement la G-forme trace correspondante ?*

Autre question, tout aussi naturelle :

(7.2.2) *Comment caractériser les G-formes* (au sens de (7.1.4)) *qui sont des formes trace ?*

La suite de ce § donnera des réponses partielles à ces questions ; voir notamment les théorèmes 7.3.2, 7.10.4 et 7.10.10.

7.3 - **Exemple de réponse à la question** (7.2.1)**.**

Lorsque l'image de Γ_k dans G/G_0 est triviale, la G-forme trace est la forme unité, nous l'avons vu. Supposons maintenant que cette image soit non triviale, mais aussi petite que possible. Cela revient à faire l'hypothèse suivante :

(7.3.1) *L'image de $\Gamma_k \to G/G_0$ est un sous-groupe d'ordre 2 de G/G_0.*

Notons $\{1, \gamma\}$ l'image de Γ_k dans G/G_0. Le noyau de $\Gamma_k \to \{1, \gamma\}$ est alors un sous-groupe ouvert d'indice 2 de Γ_k. Il correspond à une extension quadratique de k, que l'on écrit à la Artin-Schreier comme $k(t)$ avec $t^2 + t = z$, $z \in k$. Choisissons un élément $s \in G$, d'ordre une puissance de 2, dont l'image dans G/G_0 soit γ (un tel élément existe car, si S est un 2-Sylow de G, l'homomorphisme $S \to G \to G/G_0$ est surjectif).

Théorème 7.3.2 - *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, il existe une base $\{v\}$ du A-module L telle que* :

(7.3.3) $q_L(v, v) = 1$, $q_L(v, sv) = z$ *et* $q_L(v, gv) = 0$ *pour tout* $g \neq 1, s, s^{-1}$.

[La forme q_L est donc presque la forme unité, la différence étant dictée par le caractère quadratique de Γ_k fourni par $\Gamma_k \to G/G_0$.]

La démonstration sera donnée au §7.10.6.

7.4 - **Les propriétés particulières des G-formes trace.**

Soit (V,q) une G-forme. On va donner trois *conditions nécessaires* pour que (V,q) soit isomorphe à une G-forme trace [8]. Dans quelques cas (pas très nombreux), nous montrerons plus loin que ces conditions sont suffisantes.

• *Première condition* :

(7.4.1) *On a* $q(x,sx)=0$ *pour tout* $s\in G$ *d'ordre 2 et tout* $x\in V$.

C'est vrai si $(V,q)=(L,q_L)$, car le produit $y=x.sx$ appartient à la sous-algèbre L^s de L fixée par s, et l'on a $\mathrm{Tr}_{L/k}(y)=\sum_{g\in G} gy=0$ car les termes relatifs à g et à gs se détruisent deux à deux.

(Variante : la trace $\mathrm{Tr}_{L/k}$ se factorise en $\mathrm{Tr}_{L^s/k}\circ\mathrm{Tr}_{L/L^s}$ et l'on a $\mathrm{Tr}_{L/L^s}(y)=2y=0$.)

C'est cette condition qui est la plus importante (et qui est spéciale à la caractéristique 2) ; noter que c'est une condition "géométrique" : elle est invariante par extension du corps de base.

• *Deuxième condition* :

(7.4.2) *Il existe* $e\in V$ *tel que* $\sigma_G x=q(x,e)e$ *pour tout* $x\in V$.
[Rappelons que $\sigma_G=\sum_{g\in G} g$.]

Exemple. Lorsque (V,q) est la forme unité (A,q_1), on a $e=\sigma_G$.

Dans le cas $(V,q)=(L,q_L)$, on prend $e=1$. Noter que e, s'il existe, est non nul, car $\sigma_G x$ n'est pas toujours 0 puisque V est $k[G]$-libre de rang 1 ; de plus, e est unique, et fixé par G ; nous l'appellerons *l'élément canonique* de (V,q).

Remarques.
(7.4.2.1) Puisque V est $k[G]$-libre de rang 1, le sous-espace V^G de V fixé par G est de dimension 1 ; si $\{v\}$ est une base de V^G, il existe une unique forme linéaire $\ell(x)$ sur V telle que $\sigma_G x=\ell(x)v$ pour tout $x\in V$. Cette forme linéaire est G-invariante ; elle s'écrit donc $\ell(x)=\lambda q(v,x)$ avec $\lambda\in k^\times$; la condition (7.4.2) équivaut à dire que λ *est un carré*, auquel cas on a $e=\lambda^{1/2}v$. Noter que cette condition est satisfaite après extension du corps de base à $k^{1/2}$.

(7.4.2.2) Voici une autre caractérisation de l'élément e (en supposant (7.4.1)) :

(7.4.2′) *On a* $q(e,x)^2=q(x,x)$ *pour tout* $x\in V$.

En effet, on déduit de (7.4.2) :

$$q(e,x)^2=q(q(e,x)e,x)=q(\sigma_G x,x)=\sum q(gx,x).$$

Dans $\sum q(gx,x)$, il y a trois types de termes : celui avec $g=1$, qui donne $q(x,x)$; ceux où g est d'ordre 2, qui donnent 0 d'après (7.4.1) ; ceux avec g d'ordre >2, qui se détruisent deux à deux, car $q(gx,x)=q(g^{-1}x,x)$. On a donc $\sum q(gx,x)=q(x,x)$, ce qui démontre (7.4.2′).

8. En fait, comme on le verra, la troisième condition entraîne la seconde.

Une conséquence de (7.4.2) :

Proposition 7.4.3 - *Soit (V,q) une G-forme satisfaisant à* (7.4.2). *Supposons qu'il existe une extension de k sur laquelle (V,q) devienne isomorphe à la forme unité. Il existe alors une telle extension qui est séparable et finie sur k.*
[Autrement dit, (V,q) peut s'obtenir par *descente galoisienne* à partir de la forme unité.]

Démonstration. Soit e l'élément canonique de (V,q). Soit P le schéma des isomorphismes du triplet (A,q_1,σ_G) sur le triplet (V,q,e). C'est un torseur sous le groupe des automorphismes de (A,q_1,σ_G). Or le groupe des automorphismes de (A,q_1) est U_G^{sch}, et celui de (A,q_1,σ_G) est U_G : cela se voit en remarquant que, si u est un point de U_G^{sch}, on a $u\sigma_G = \boldsymbol{t}(u)\sigma_G$, donc u fixe σ_G si et seulement si $\boldsymbol{t}(u)=1$. Ainsi, P est un U_G-torseur, donc est lisse, donc possède des points sur une extension finie séparable du corps de base (cf. par exemple [BLR 90, §2.2, cor.13]).
[Voici une description concrète de l'ensemble $P(k')$ des points de P à valeurs dans une k-algèbre commutative k' : un point de $P(k')$ est un point v de $k'\otimes_k V$ tel que $q(gv,g'v)=1$ si $g=g'$, $q(gv,g'v)=0$ si $g\neq g'$, et $\sigma_G v = 1\otimes e$.]

• *Troisième condition* :

(7.4.4) *Il existe une application additive $F : V \to V$ jouissant des propriétés suivantes* :
(7.4.4.1) (semi-linéarité) $F(\lambda x)=\lambda^2 F(x)$ *pour tout $\lambda\in k$ et tout $x\in V$.*
(7.4.4.2) (compatibilité avec G) $F(gx)=gF(x)$ *pour tout $g\in G$ et tout $x\in V$.*
(7.4.4.3) (compatibilité avec q) $q(Fx,Fy)=q(x,y)^2$ *pour tous $x,y\in V$.*

Lorsque $(V,q)=(L,q_L)$, on prend pour F l'application $x\mapsto x^2$; les propriétés (7.4.4.1) et (7.4.4.2) sont immédiates, et (7.4.4.3) résulte de ce que $\mathrm{Tr}_{L/k}(x^2)=\mathrm{Tr}_{L/k}(x)^2$ pour tout $x\in L$.

Noter que F est injective (et même bijective si k est parfait).

Il est commode de reformuler (7.4.4) comme :

(7.4.4′) *Soit $\pi : k\to k$ l'application $\lambda\mapsto\lambda^2$ et soit $(V,q)_\pi$ la G-forme déduite de (V,q) par le changement de base π. On a $(V,q)\simeq_G (V,q)_\pi$.*

Une autre façon de formuler (7.4.4′) consiste à se placer sur le corps $k^{1/2}$; on dispose alors de deux G-formes : celle obtenue à partir de (V,q) par le changement de base correspondant à l'inclusion $\iota : k\to k^{1/2}$, et celle obtenue par l'isomorphisme $\sigma : k\to k^{1/2}$ donné par $\lambda\mapsto\lambda^{1/2}$. L'énoncé devient alors :

(7.4.4″) *Les deux G-formes ainsi définies sur $k^{1/2}$ sont isomorphes.*

Proposition 7.4.5 - *On a* (7.4.4) $\Rightarrow$ (7.4.2).

Démonstration. Supposons que (V,q) satisfasse à (7.4.4). D'après (7.4.4″) les deux G-formes sur $k^{1/2}$ obtenus par les changements de base $\iota : k\to k^{1/2}$, $\lambda\mapsto\lambda$ et $\sigma : k\to k^{1/2}$, $\lambda\mapsto\lambda^{1/2}$ sont isomorphes. D'après (7.4.2.1), la première satisfait à (7.4.2). Il en est donc de même de la seconde ; comme $\sigma : k\to k^{1/2}$ est un isomorphisme , il en va de même pour (V,q), par transport de structure.

Proposition 7.4.6 - *Soient* (V,q) *et* (V',q') *deux* G*-formes satisfaisant à* (7.4.4)*. Si ces* G*-formes deviennent isomorphes sur une extension radicielle de* k*, elles sont* k*-isomorphes.*

[Dans le cas des formes trace, on retrouve la proposition 6.2.1.]

Démonstration. En raisonnant par récurrence, on se ramène au cas où l'extension radicielle considérée est $k^{1/2}$. On applique alors (7.4.4″) comme dans la démontration précédente : les deux G-formes deviennent isomorphes sur $k^{1/2}$ lorsqu'on fait le changement de base σ, et comme σ est un isomorphisme, le même énoncé vaut sur k. [On peut aussi procéder de façon plus explicite, comme dans la démonstration de la proposition 6.2.1.]

7.5 - **Exemples et contre-exemples relatifs à la question (7.2.2).**

Commençons par une question de nature "géométrique" :

(7.5.1) - *Si* k *est algébriquement clos, est-il vrai que toute* G*-forme satisfaisant à* (7.4.1) *est isomorphe à la forme unité ?*

Je ne connais pas de contre-exemple.

Remarque. Si la réponse est "oui", alors toute G-forme (sur un corps k quelconque) satisfaisant à (7.4.1) et (7.4.2) s'obtient par torsion galoisienne à partir de la G-forme unité, donc correspond à un élément de $H^1(k,U_G)$; cela résulte de la proposition 7.4.3.

Théorème 7.5.2 - *La réponse à* (7.5.1) *est " oui " lorsque le groupe* G *a l'une des trois propriétés suivantes* :

(i) *il est commutatif*;

(ii) *son ordre est une puissance de* 2 ;

(iii) *son ordre est impair.*

Pour la démonstration, voir §7.7.

Lorsqu'on ne suppose pas que k est algébriquement clos, il n'est pas difficile de donner des exemples de G-formes satisfaisant à (7.4.1) et (7.4.2) qui ne sont pas des formes trace, même si k est parfait. Par exemple :

Proposition 7.5.3 - *Si* $E_G \neq \{1\}$ (*i.e. si* $U_G \neq G.U_G^0$*, cf. §5.4),il existe une extension finie* k *de* $\mathbf{F}_2$ *et une* G*-forme* (V,q) *sur* k *telle que* :

(a) (V,q) *satisfait à (7.4.1) et (7.4.2)*;

(b) (V,q) *n'est pas isomorphe à une* G*-forme trace.*

Démonstration. Choisissons une extension finie k de $\mathbf{F}_2$ assez grande pour que $U_G(k)$ contienne un sous-groupe cyclique H non contenu dans $G.U_G(\overline{k})$; c'est possible puisque $E_G \neq \{1\}$. Quitte à agrandir k, on peut aussi supposer que Γ_k opère trivialement sur $E_G(\overline{k})$. Soit $\varphi : \Gamma_k \to H$ un homomorphisme continu et surjectif ; on peut voir ϕ comme un 1-cocycle de Γ_k à valeurs dans $U_G(\overline{k})$; notons $[\varphi]$ sa classe dans $H^1(k,U_G)$. L'image de $[\varphi]$ dans $H^1(k,E_G) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Gamma_k, E_G(\overline{k}))$ est non triviale. Il en résulte que $[\varphi]$ n'est pas contenue dans l'image de $H^1(k,G) \to H^1(k,U_G)$; si (V,q) est la G-forme obtenue en tordant la forme unité par $[\varphi]$, cela montre que (V,q) n'est pas isomorphe à une G-forme trace.

Remarques.

i) Si l'on prend $G = \widehat{S}_3$ (cf. §5.5.6), la construction ci-dessus est possible sur $k = \mathbf{F}_2$, et la G-forme ainsi obtenue satisfait non seulement à (7.4.1) et (7.4.2), mais aussi à (7.4.4).

ii) Lorsque G est un 2-groupe, la proposition 7.5.3 admet la réciproque suivante :

Proposition 7.5.4 - *Si G est un 2-groupe, et si $E_G = \{1\}$, toute G-forme satisfaisant à (7.4.1) et (7.4.2) est isomorphe à une G-forme trace.*

Démonstration. D'après le théorème 7.5.2 et la remarque qui le précède, les G-formes satisfaisant à (7.4.1) et (7.4.2) correspondent aux éléments de $H^1(k, U_G)$. Celles qui sont isomorphes à une G-forme trace correspondent aux éléments de l'image de l'application naturelle $i : H^1(k, G) \to H^1(k, U_G)$. Nous devons donc montrer que i est surjective. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(k,G) & \stackrel{i}{\to} & H^1(k,U_G) \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ H^1(k,G/G_0) & \stackrel{j}{\to} & H^1(k,U_G/U_G^0). \end{array} \tag{7.5.5}$$

De plus :

(7.5.6) *L'application $\pi : H^1(k, G) \to H^1(k, G/G_0)$ est surjective.* Cela résulte de ce que $cd_2(\Gamma_k) \leqslant 1$, cf. [Se 64, II, §2.2 et I, §3.1].

(7.5.7) *L'application $j : H^1(k, G/G_0) \to H^1(k, U_G/U_G^0)$ est bijective.* Cela résulte de ce que $G/G_0 \to U_G/U_G^0$ est un isomorphisme, puisque $E_G = \{1\}$.

(7.5.8) *L'application $\pi' : H^1(k, U_G) \to H^1(k, U_G/U_G^0)$ est injective.* En effet, comme G est un 2-groupe, les groupes U_G et U_G^0 sont unipotents. De plus, U_G^0 est *déployé* ("split", i.e. extension successive de groupes isomorphes à $\mathbf{G}_a$, cf. [Sp 98, §12.3.5]), car il provient par extension des scalaires d'un groupe défini sur un corps parfait, à savoir $\mathbf{F}_2$. Cela entraîne que ses tordus (au sens de la cohomologie galoisienne) sont déployés, car la propriété d'être déployé se teste sur la clôture séparable du corps de base, cf. [Sp 98, th.14.3.8 (iii)] ; leur H^1 est donc trivial ; l'injectivité de π' en résulte d'après la suite exacte de cohomologie non abélienne, cf. [Se 64, I, cor.2 à la prop.39].

Ces trois propriétés, jointes au fait que $\pi' \circ i = j \circ \pi$ entraînent que π' est bijectif et que i est surjectif. D'où la proposition.

(7.5.9) *Question. Existe-t-il un 2-groupe fini G tel que $E_G \neq \{1\}$?*

7.6 - **Traductions hermitiennes.**

7.6.1. *La G-forme associée à un élément hermitien.*

Soit h un élément hermitien de A. La forme bilinéaire q_h sur l'espace vectoriel A définie par

(7.6.2) $q_h(a, b) = \delta(ahb^*), \quad a, b \in A,$

est G-invariante et symétrique [rappelons, cf. §7.1, que, si $x \in A$, $\delta(x)$ désigne le coefficient de 1 dans x] ; elle est non dégénérée si et seulement si h est inversible ; dans ce cas, (A, q_h) est une G-forme.

Si h' est un autre élément hermitien inversible de A, les G-formes (A, q_h) et $(A, q_{h'})$ sont isomorphes si et seulement si il existe $a \in A^\times$ tel que $h' = aha^*$; on dit alors que h et h' sont *équivalents*, ce que nous écrirons $h \sim h'$.

7.6.3. *Passage des G-formes aux éléments hermitiens.* Soit (V, q) une G-forme. Choisissons une base $\{v\}$ du $k[G]$-module V ; on associe à ces données l'élément hermitien $h = h_v$ défini par :

(7.6.4) $h = \sum_{g \in G} q(v, gv)g$, i.e. $\delta_g(h) = q(v, gv)$ pour tout $g \in G$.

L'application : $A \to V$ donnée par $a \mapsto av$ est un G-isomorphisme de A sur V qui transforme q_h en q ; cela résulte de la formule (7.6.2) appliquée à $a = 1, b = g$. Ainsi, *toute G-forme est isomorphe à la forme (A, q_h) associée à un élément hermitien inversible de A, bien déterminé à équivalence près.*

Soit h un élément hermitien inversible de A. Nous allons voir comment se traduisent pour la G-forme (A, q_h) les propriétés (7.4.1), (7.4.2) et (7.4.4) .

7.6.5. *Traduction de* (7.4.1).

Proposition 7.6.6 - *Soit h un élément hermitien de A. Pour que (A, q_h) satisfasse à* (7.4.1)*, il faut et il suffit que l'on ait* :

(7.6.7) $\delta_s(h) = 0$ *pour tout $s \in G$ d'ordre* 2.

Démonstration. Soit s un élément de G d'ordre 2. On a $\delta_s(h) = q_h(s.1, 1)$; cela montre que (7.4.1) entraîne (7.6.7). Inversement, supposons que l'on ait $\delta_{s'}(h) = 0$ pour tout conjugué s' de s, et montrons que l'on a $q_h(sx, x) = 0$ pour tout $x \in A$. La fonction $f : x \mapsto q_h(x, sx)$ est une forme quadratique sur l'espace vectoriel A. Sa forme bilinéaire associée est $(x, y) \mapsto q_h(sx, y) + q_h(x, sy)$, qui est 0 puisque $s^2 = 1$. Pour prouver que $f = 0$ il suffit donc de prouver que f s'annule sur la base G de A. Or, si g est un élément de G, on a

$$q_h(g, sg) = \delta(ghg^{-1}s) = \delta(hg^{-1}sg) = \delta(hs') = \delta_{s'}(h), \text{ avec } s' = g^{-1}sg.$$

Comme $\delta_{s'}(h) = 0$ par hypothèse, on en déduit que $f(g) = 0$ pour tout $g \in G$, d'où $f = 0$.

Un élément hermitien h satisfaisant à la condition (7.6.7) sera dit *spécial*. Si l'on utilise la partition $G - G_2 = \Sigma \sqcup \Sigma^{-1}$ introduite dans la démonstration du théorème 5.1.2, cela revient à dire que h s'écrit sous la forme

(7.6.8) $h = \lambda.1 + \sum_{\sigma \in \Sigma} h_\sigma(\sigma + \sigma^{-1})$, avec $\lambda, h_\sigma \in k$,

ce qui est équivalent à :

(7.6.9) *Il existe $\lambda \in k$ et $a \in A$ tels que $h = \lambda.1 + a + a^*$.*

Cela entraîne :

(7.6.10) $\lambda = \boldsymbol{t}(h) = \delta(h)$,

puisque $\delta(a) = \delta(a^*)$ et $\boldsymbol{t}(a) = \boldsymbol{t}(a^*)$. Nous dirons que h est *normalisé* s'il est spécial et si $\lambda = 1$, autrement dit si h est de la forme $1 + a + a^*$, avec $a \in A$.

7.6.11. *Traduction de* (7.4.2).

Proposition 7.6.12 - *Supposons que h satisfasse à la condition* (7.6.7). *On a* :

(7.6.12) $q_h(x,x) = \boldsymbol{t}(h)\boldsymbol{t}(x)^2$ *pour tout* $x \in A$.

Pour que (A, q_h) satisfasse à (7.4.2) *il faut et il suffit que $\boldsymbol{t}(h)$ soit un carré dans k, et l'on a alors* :

(7.6.13) $e = \boldsymbol{t}(h)^{-1/2}\sigma_G$, *où* $\sigma_G = \sum_{g\in G} g$.

[Noter que $\boldsymbol{t}(h)$ est $\neq 0$ puisque h est inversible et que $\boldsymbol{t} : A \to k$ est un homomorphisme d'algèbres.]

Démonstration. Les deux formes quadratiques

$$x \mapsto q_h(x,x) \quad \text{et} \quad x \mapsto \boldsymbol{t}(h)\boldsymbol{t}(x)^2$$

sont additives : c'est clair pour la seconde, et, pour la première, cela résulte de ce que $q_h(x,y)$ est symétrique. Pour montrer qu'elles sont égales, il suffit donc de le vérifier pour les éléments g de G. Or on a $q_h(g,g) = \delta(ghg^{-1}) = \delta(h)$ d'après (7.1.2) et (7.6.2), et $\boldsymbol{t}(h)\boldsymbol{t}(g)^2 = \boldsymbol{t}(h) = \delta(h)$ d'après (7.6.10). Cela démontre (7.6.12).

Supposons maintenant que k soit parfait, et définissons $e \in A$ par la formule $e = \boldsymbol{t}(h)^{-1/2}\sigma_G$. On a :

(7.6.14) $q_h(e,x) = \delta(ehx^*) = \boldsymbol{t}(h)^{-1/2}\delta(\sigma_G h x^*)$.

Or on a :

(7.6.15) $\delta(\sigma_G a) = \boldsymbol{t}(a)\sigma_G$ pour tout $a \in A$.

On peut donc récrire (7.6.14) sous la forme :

(7.6.16) $q_h(e,x) = \boldsymbol{t}(h)^{-1/2}\boldsymbol{t}(h)\boldsymbol{t}(x) = \boldsymbol{t}(h)^{1/2}\boldsymbol{t}(x)$,

d'où :

(7.6.17) $q_h(e,x)e = \boldsymbol{t}(x)\sigma_G = \sigma_G x$.

En comparant avec (7.4.2), on voit que e n'est autre que "l'élément canonique" de (A, q_h), ce qui démontre (7.6.13) lorsque k est parfait.

Dans le cas général, on applique ce qui précède à une extension parfaite k' de k. On en déduit que l'élément canonique e de $k' \otimes_k A$ appartient à A si et seulement si $\boldsymbol{t}(h)^{1/2}$ appartient à k, i.e. si $\boldsymbol{t}(h)$ est un carré dans k, et l'on a alors (7.6.13), ce qui achève la démonstration de la proposition 7.6.12.

Remarque. Si h est normalisé (i.e. de la forme $1 + a + a^*$), la proposition précédente montre que la condition (7.4.2) est satisfaite, et que l'on a $e = \sigma_G$. Inversement, si (7.4.1) et (7.4.2) sont satisfaites, on peut écrire h sous la forme $\mu h'$, avec $\mu = \boldsymbol{t}(h)^{1/2}$, et h' normalisé ; noter que $h' \simeq h$. Ainsi, *toute G-forme satisfaisant à* (7.4.1) *et* (7.4.2) *est isomorphe à une forme (A, q_h), avec h normalisé.* En outre, *deux telles formes (A, q_{h_1}) et (A, q_{h_2}) sont isomorphes si et seulement si il existe $a \in A^\times$ tel que $\boldsymbol{t}(a) = 1$ et $h_2 = ah_1a^*$.*

7.6.18. *Traduction de* (7.4.4).

Notons $F : A \to A$ l'endomorphisme de Frobenius de A :

(7.6.19) $\quad F(\sum x_g g) = \sum x_g^2 g.$

Proposition 7.6.20 - *Pour que* (A, q_h) *satisfasse à* (7.4.4) *il faut et il suffit que* $F(h) \sim h$.

En effet, la condition $F(h) \sim h$ n'est qu'une traduction de (7.4.4′).

7.7. **Démonstration du théorème 7.5.2.**

Dans ce §, k est supposé algébriquement clos, et nous en profiterons pour identifier un schéma lisse à l'ensemble de ses points.

Il s'agit de donner une réponse positive à la question (7.5.1) dans chacun des trois cas suivants :

(i) G est commutatif ;

(ii) G est un 2-groupe ;

(iii) $|G|$ est impair.

Vu les traductions hermitiennes du §7.6, cela revient à prouver que tout hermitien h, qui est spécial et inversible, est tel que $h \sim 1$, autrement dit est de la forme aa^*, avec $a \in A^\times$.

Notons H_s l'ensemble des hermitiens spéciaux, autrement dit de la forme $\lambda.1 + a + a^*$, avec $\lambda \in k$ et $a \in A$; c'est un sous-espace vectoriel de A, et d'après (7.6.8), on a :

(7.7.1) $\dim H_s = 1 + |\Sigma| = 1 + \frac{1}{2}(|G| - |G_2|)$, avec les notations du §7.6.5.

Les éléments inversibles de H_s forment un ouvert dense de H_s, que nous noterons $H_s^\times$. Faisons opérer le groupe algébrique $A^\times$ sur A par $a \bullet b = aba^*$. C'est une action linéaire ; elle laisse stable H_s et $H_s^\times$: cela se voit, soit par calcul direct, soit en invoquant la proposition 7.6.6. Soit H_s' l'orbite de 1 par cette action ; c'est l'ensemble des hermitiens de la forme $a \bullet 1 = aa^*$. La question (7.5.1) a une réponse positive si et seulement si l'on a $H_s' = H_s^\times$, autrement dit si $A^\times$ agit transitivement sur $H_s^\times$.

Proposition 7.7.3 - *L'orbite* H_s' *est ouverte* (et donc dense) *dans* $H_s^\times$.

Démonstration. Le fixateur du point 1 est le groupe U_G^{sch}. On a donc

$$\dim H_s' = \dim A^\times - \dim U_G = |G| - \tfrac{1}{2}(|G| + |G_2|) + 1 = 1 + \tfrac{1}{2}(|G| - |G_2|),$$

d'après la proposition 5.1.3. Vu (7.7.1), cela montre que $\dim H_s' = \dim H_s^\times$, d'où la proposition.

Corollaire 7.7.4 - *Pour que (7.5.1) ait une réponse positive, il faut et il suffit que* H_s' *soit fermé dans* $H_s^\times$.

C'est clair.

Corollaire 7.7.5 - *Tout élément de* $H_s^\times$ *qui appartient au centre de* A *appartient à* H_s'.

Démonstration. Soit h un tel élément. Son fixateur dans $A^\times$ est l'ensemble des a tels que $a \bullet h = h$, i.e. $aha^* = h$, ou encore $aa^* = 1$ puisque h et a commutent ;

c'est donc le groupe U_G. L'orbite de h a donc la même dimension que celle de 1 ; cela entraîne que c'est une orbite ouverte, ce qui n'est possible que si elle est égale à H'_s.

Corollaire 7.7.6 - *La réponse à (7.5.1) est " oui " dans le cas* (i) (autrement dit, quand G est commutatif).

Cela résulte du corollaire précédent, qui donne même un résultat légèrement plus fort : il suffit que les hermitiens spéciaux de A soient contenus dans le centre de A.

7.7.7. *Démonstration du théorème 7.5.2 dans le cas* (ii).

Ici, G est un 2-groupe. L'algèbre A est alors une algèbre locale (non commutative en général) dont l'idéal bilatère maximal $\mathfrak{m}$ est le noyau de $\boldsymbol{t} : A \to k$. Le noyau A_1 de $A^\times \to k^\times$ est un groupe unipotent connexe : cela se voit, par exemple, en filtrant A par les puissances de $\mathfrak{m}$ [cela résulte aussi de ce que la variété sous-jacente est isomorphe à un espace affine]. Le groupe A_1 opère sur la variété H_1 des éléments hermitiens normalisés au sens du §7.6.5. Le fixateur de 1 dans cette action est U_G. L'orbite de 1 est donc de dimension $\dim A_1 - \dim U_G$, ce qui est aussi la dimension de H_1. Cette orbite est donc ouverte dans H_1. Mais les orbites d'un groupe unipotent agissant sur une variété affine (ou même seulement quasi-affine) sont fermées, d'après un théorème de Rosenlicht ([Ro 61, th.2], voir aussi [Bo 91, prop.4.10]). On en conclut que A_1 opère transitivement sur H_1, autrement dit que tout hermitien normalisé h est de la forme aa^* avec $a \in A_1$. Mais tout hermitien spécial inversible est un multiple d'un hermitien normalisé, et lui est donc équivalent puisque tout élément de k est un carré ; il est donc de la forme aa^*, avec $a \in A^\times$, ce qui démontre le théorème 7.5.2 dans le cas (ii).

7.7.8. *Démonstration du théorème 7.5.2 dans le cas* (iii).

Ici, G est d'ordre impair. L'algèbre A est semi-simple. D'après le §5.5.1, on peut la décomposer en $A = A_0 \times \prod A_i$ avec :

$A_0 = k$,

$A_i = \mathbf{M}_{n_i} \times \mathbf{M}_{n_i}^{\mathrm{opp}}$, où l'involution est $(x, y) \mapsto (y, x)$.

Or, dans chacune de ces algèbres à involution, tout élément hermitien h s'écrit sous la forme $h = aa^*$: c'est clair pour A_0, et, pour A_i, on a $h = (x, x)$ avec $x \in \mathbf{M}_{n_i}(k)$ et l'on prend $a = (x, 1)$. Le même résultat est donc vrai pour A.

7.8. L'invariant d'une G-forme associé à un caractère essentiel.

Soit $\varepsilon : G \to \{1, c\}$ un caractère essentiel de G, cf. §5.2, distinct du caractère unité. Nous allons voir comment on peut utiliser ε pour définir un *invariant* d'une G-forme, à valeurs dans $k/\wp(k)$.

7.8.1. *Définition de h_ε.* Comme au §5.2, notons G_1 (resp. G_c) l'ensemble des $g \in G$ tels que $\varepsilon(g) = 1$ (resp. $\varepsilon(g) = c$), et choisissons une partie S de G_c telle que $G_c = S \sqcup S^{-1}$. Si h un élément hermitien de A, nous définirons $h_\varepsilon \in k$ par la formule :

(7.8.2) $h_\varepsilon = \sum_{s \in S} \delta_s(h)$.

Du fait que h est hermitien, cette somme ne dépend pas du choix de S.

7.8.3. *Une formule de transformation.*

Si $a = \sum_{g\in G} a_g g$ est un élément de A, nous poserons :

(7.8.4) $\quad a_+ = \sum_{g\in G_1} a_g g \quad$ et $\quad a_- = \sum_{g\in G_c} a_g g\,;$

on a :

(7.8.5) $\quad a = a_+ + a_-.$

Proposition 7.8.6 - *Si h est un élément hermitien de A, on a* :

(7.8.7) $\quad (aha^*)_\varepsilon = \boldsymbol{t}(a)^2 h_\varepsilon + \boldsymbol{t}(h)\boldsymbol{t}(a_+)\boldsymbol{t}(a_-) \quad$ *pour tout* $a \in A$.

Démonstration. Nous allons employer une méthode qui permet d'interpréter h_ε comme une "demi-somme", ce qui évite d'avoir à utiliser l'ensemble auxiliaire S. Pour cela, choisissons un anneau commutatif $\tilde{k}$ muni d'une surjection $\tilde{k} \to k$, et tel que

(7.8.8) $\quad 4.\tilde{k} = 0\,;$

(7.8.9) le noyau de $\tilde{k} \to k$ est $2.\tilde{k}\,;$

(7.8.9) l'application $x \mapsto 2x$ définit par passage au quotient une injection $\iota : k \to 2.\tilde{k}$.

Un tel anneau existe : il suffit par exemple de prendre pour $\tilde{k}$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur 2 sur k. On peut même demander que l'injection de (7.8.9) soit une bijection, autrement dit que $\tilde{k}$ soit un $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$-module libre, cf. [AC IX, App., prop.4].

Posons $\widetilde{A} = \tilde{k}[G]$, et choisissons des éléments $\tilde{h}$ et $\tilde{a}$ de $\widetilde{A}$ dont les images dans A sont h et a, avec $\tilde{h}$ hermitien. Utilisons pour $\widetilde{A}$ les mêmes notations $\boldsymbol{t}, \tilde{a}_+, \tilde{a}_-$ que pour A. On a :

(7.8.10) $\quad \iota(h_\varepsilon) = \boldsymbol{t}(\tilde{h}_-) \quad$ et $\quad \iota((\tilde{a}h\tilde{a}^*)_\varepsilon) = \boldsymbol{t}((\tilde{a}\tilde{h}\tilde{a}^*)_-),$

ce qui montre que h_ε et $(aha^*)_\varepsilon$ sont des "demi-sommes" dans $\tilde{k}$. De plus :

$$(\tilde{a}\tilde{h}\tilde{a}^*)_- \;=\; \tilde{a}_-\tilde{h}_-\tilde{a}_-^* \;+\; \tilde{a}_+\tilde{h}_-\tilde{a}_+^* \;+\; \tilde{a}_+\tilde{h}_+\tilde{a}_-^* \;+\; \tilde{a}_-\tilde{h}_+\tilde{a}_+^*,$$

d'où :

(7.8.11) $\quad \boldsymbol{t}((\tilde{a}\tilde{h}\tilde{a}^*)_-) = \;\boldsymbol{t}(\tilde{h}_-)(\boldsymbol{t}(\tilde{a}_+)^2 + \boldsymbol{t}(\tilde{a}_-)^2) \;+\; 2\boldsymbol{t}(\tilde{h}_+)\boldsymbol{t}(\tilde{a}_+)\boldsymbol{t}(\tilde{a}_-).$

Comme $\tilde{h}_-$ est hermitien, $\boldsymbol{t}(\tilde{h}_-)$ est divisible par 2 ; de plus, on a :

$$\boldsymbol{t}(\tilde{a}_+)^2 + \boldsymbol{t}(\tilde{a}_-)^2 \equiv \boldsymbol{t}(\tilde{a})^2 \pmod 2.$$

On peut donc récrire (7.8.11) sous la forme

(7.8.12) $\quad \boldsymbol{t}((\tilde{a}\tilde{h}\tilde{a}^*)_-) = \;\boldsymbol{t}(\tilde{h}_-)\boldsymbol{t}(\tilde{a})^2 + 2\boldsymbol{t}(\tilde{h}_+)\boldsymbol{t}(\tilde{a}_+)\boldsymbol{t}(\tilde{a}_-).$

On en déduit, d'après (7.8.10) :

(7.8.13) $\quad \iota((aha^*)_\varepsilon) = \;\iota(h_\varepsilon\boldsymbol{t}(a)^2 + \boldsymbol{t}(h_+)\boldsymbol{t}(a_+)\boldsymbol{t}(a_-)),$

d'où, d'après (7.8.9) :

(7.8.14) $\quad (aha^*)_\varepsilon = \;\; h_\varepsilon\boldsymbol{t}(a)^2 \;+\; \boldsymbol{t}(h_+)\boldsymbol{t}(a_+)\boldsymbol{t}(a_-),$

et comme $\boldsymbol{t}(h_+) = \boldsymbol{t}(h)$, cela donne (7.8.7).

7.8.15. *Définition de l'invariant.*

Supposons maintenant que h soit inversible. On a alors $\boldsymbol{t}(h) \neq 0$, ce qui permet de définir l'invariant normalisé :

(7.8.16) $h_\varepsilon^{\mathrm{norm}} = h_\varepsilon / \boldsymbol{t}(h)$.

Proposition 7.8.16 - *Soient h et h' deux éléments hermitiens inversibles de A. Si $h \sim h'$, on a* :

(7.8.17) $h_\varepsilon^{\mathrm{norm}} \equiv h_\varepsilon'^{\mathrm{norm}} \mod \wp(k)$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $a \in A^\times$ tel que $h' = aha^*$; on a alors $\boldsymbol{t}(h') = \boldsymbol{t}(h)\boldsymbol{t}(a)^2$, et la proposition 7.8.6 montre que :

(7.8.18) $h_\varepsilon'^{\mathrm{norm}} = h_\varepsilon^{\mathrm{norm}} + \boldsymbol{t}(a_+)\boldsymbol{t}(a_-)/\boldsymbol{t}(a)^2$.

Comme $\boldsymbol{t}(a) = \boldsymbol{t}(a_+) + \boldsymbol{t}(a_-)$, le terme $\boldsymbol{t}(a_+)\boldsymbol{t}(a_-)/\boldsymbol{t}(a)^2$ peut s'écrire $\lambda + \lambda^2$, avec $\lambda = \boldsymbol{t}(a_+)/\boldsymbol{t}(a)$. D'où la proposition.

Vu le dictionnaire entre classes d'hermitiens et G-formes, on voit que *l'on a attaché à toute G-forme (V,q) un élément $(V,q)_\varepsilon$ de $k/\wp(k)$*, à savoir la classe mod $\wp(k)$ de $h_\varepsilon^{\mathrm{norm}}$, où h est l'un quelconque des hermitiens associés à (V,q).

Variante. Nous venons de définir l'invariant $(V,q)_\varepsilon$ dans $k/\wp(k)$ en utilisant le dictionnaire hermitien. On peut aussi procéder de façon plus directe :

Le sous-espace V_1 de V fixé par $G_1 = \operatorname{Ker}\varepsilon$ est de dimension 2. Si $x \in V_1$, il existe $y \in V$ tel que $x = \sum_{g \in G_1} gy$, et un simple calcul montre que la somme $\sum_{s \in S} q(y, sy)$ ne dépend, ni du choix de S, ni du choix de y ; si on la note $q_\varepsilon(x)$, on peut prouver que q_ε est une forme quadratique non dégénérée sur V_1, et que son invariant d'Arf dans $k/\wp(k)$ est égal à $(V,q)_\varepsilon$: c'est la définition directe mentionnée plus haut.

Remarque. Lorsque ε est le caractère unité, on convient que $h_\varepsilon = 0$. Avec cette convention, on a :

Proposition 7.8.19 - *Soient ε_1 et ε_2 deux caractères essentiels. Alors* :

(7.8.20) $\quad h_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = h_{\varepsilon_1} + h_{\varepsilon_2} \quad$ *et* $\quad h_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^{\mathrm{norm}} = h_{\varepsilon_1}^{\mathrm{norm}} + h_{\varepsilon_2}^{\mathrm{norm}}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2$. Le cas où l'un des ε_i est égal à 1 est immédiat. Supposons donc $\varepsilon_i \neq 1$ pour tout i. Notons H_1 l'ensemble des $g \in G$ tels que $\varepsilon_1(g) = 1$ et $\varepsilon_2(g) = \varepsilon_3(g) \neq 1$, et définissons de même H_2 et H_3 (cf. démonstration du théorème 5.2.7). Décomposons chaque H_i en $H_i = S_i \sqcup S_i^{-1}$. L'ensemble des $g \in G$ tels que $\varepsilon_1(g) \neq 1$ est $S_2 \sqcup S_2^{-1} \sqcup S_3 \sqcup S_3^{-1}$. Si l'on pose $x_i = \sum_{g \in S_i} \delta_g(h)$, on a

(7.8.21) $\quad h_{\varepsilon_1} = x_2 + x_3$, et de même $\quad h_{\varepsilon_2} = x_3 + x_1 \quad$ et $\quad h_{\varepsilon_3} = x_1 + x_2$.

En ajoutant ces trois égalités, on obtient $h_{\varepsilon_1} + h_{\varepsilon_2} + h_{\varepsilon_3} = 0$, ce qui équivaut à la première formule de (7.8.20) ; la seconde en résulte en divisant par $\boldsymbol{t}(h)$.

Corollaire 7.8.22 - *L'invariant $(V,q) \mapsto (V,q)_\varepsilon$ est un homomorphisme de X_G dans $k/\wp(k)$.*

[Rappelons que X_G désigne le groupe des caractères essentiels de G, cf. §5.3.]

7.8.23. *Le cas des G-formes trace.*

Supposons maintenant que (V,q) soit une G-forme trace (L, q_L). Dans ce cas, il y a une façon plus directe d'associer à (V,q) et à un caractère essentiel $\varepsilon \neq 1$ un élément de $k/\wp(k)$: en effet, la sous-algèbre L^ε de L formée des éléments

fixés par $G_1 = \operatorname{Ker}\varepsilon$ est une k-algèbre étale de degré 2, donc est isomorphe à $k[x]/(x^2+x+z)$, où z est bien déterminé mod $\wp(k)$; l'image de z dans $k/\wp(k)$ est un invariant de (L, q_L). En fait :

Proposition 7.8.24 - *Les deux invariants définis ci-dessus coïncident.*

Démonstration. Soit $\{v\}$ une base du A-module L, et soit h l'élément hermitien correspondant. Quitte à multiplier v par un scalaire, on peut supposer que $\mathrm{Tr}_{L/k}(v) = 1$, auquel cas h est un hermitien normalisé : on a $\boldsymbol{t}(h) = 1$. Posons :

(7.8.25) $y = \sum_{g\in G_1} gv$ et $z = \sum_{g\in G_c} gv$.

On a :

(7.8.26) $y, z \in L^\varepsilon$, $gy = z$ et $gz = y$ si $g \in G_c$, et $y + z = \mathrm{Tr}_{L/k}(v) = 1$.

Le produit yz est un élément de k. De façon plus précise :

Lemme 7.8.27 - *On a $yz = h_\varepsilon$.*

Démonstration du lemme 7.8.27. On a :

(7.8.28) $yz = \sum_{a\in G_1, b\in G_c} av.bv$.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des parties à deux éléments de G rencontrant à la fois G_1 et G_c. Si $M = \{a, b\}$ est un élément de $\mathcal{M}$, posons $v_M = av.bv$, de sorte que (7.8.28) peut se récrire sous la forme

(7.8.29) $yz = \sum_{M\in\mathcal{M}} v_M$.

Le groupe G opère par translations à gauche sur l'ensemble $\mathcal{M}$. Cette action est libre, et chaque orbite contient un point et un seul de la forme $\{1, s\}$ avec $s \in S$. Cela permet de récrire (7.8.29) comme :

(7.8.30) $yz = \sum_{g\in G, s\in S} gv.gsv = \sum_{s\in S} \mathrm{Tr}_{L/k}(v.sv) = \sum_{s\in S} q_L(v, sv) = h_\varepsilon$,

ce qui démontre (7.8.28).

Fin de la démonstration de la proposition 7.8.24. Les formules (7.8.26) et (7.8.28) donnent la structure de l'algèbre quadratique L^ε : elles montrent que cette algèbre est isomorphe à $k[x]/(x^2+x+h_\varepsilon)$; son invariant d'Artin-Schreier dans $k/\wp(k)$ est donc la classe de h_ε, c'est-à-dire $(V, q)_\varepsilon$.

7.9. Application : le cas des 2-groupes.

Proposition 7.9.1 - *Supposons que G soit un 2-groupe tel que $E_G = \{1\}$. Soient h et h' deux hermitiens normalisés de A. Alors :*

$h \sim h' \iff h_\varepsilon \equiv h'_\varepsilon \mod \wp(k)$ *pour tout caractère essentiel ε de G.*

Démonstration. D'après la proposition 7.5.4, les G-formes (A, q_h) et $(A, q_{h'})$ sont isomorphes à des G-formes trace (L, q_L) et $(L', q_{L'})$. Soient $\varphi_L, \varphi_{L'} : \Gamma_k \to G$ les homomorvarphismes (uniques à conjugaison près) associés à L, L'. D'après la proposition 6.6.17, on a $(L, q_L) \simeq (L', q_{L'})$ si et seulement si les composés de φ_L et $\varphi_{L'}$ avec $G \to G/G_0$ coïncident ; cela revient à demander que, pour tout caractère essentiel ε de G, on ait $\varepsilon\circ\varphi_L = \varepsilon\circ\varphi_{L'}$; d'après la proposition 7.8.24, cela revient à demander que $h_\varepsilon \equiv h'_\varepsilon \mod \wp(k)$.

7.9.2. *Exemple : le groupe quaternionien.* Supposons que G soit le groupe quaternionien d'ordre 8. Avec les notations du §5.5.5, on peut écrire h et h' sous la forme :

$h = 1 + a_1(u + u^{-1}) + a_2(v + v^{-1}) + a_3(w + w^{-1})$ avec $a_i \in k$,

$h' = 1 + a'_1(u + u^{-1}) + a'_2(v + v^{-1}) + a'_3(w + w^{-1})$ avec $a'_i \in k$.

Il y a a trois caractères essentiels $\neq 1$; les h_ε correspondants sont a_1+a_2, a_2+a_3 et $a_3 + a_1$; ceux de h' sont $a'_1 + a'_2$, $a'_2 + a'_3$ et $a'_3 + a'_1$. Comme $E_G = \{1\}$, cf. §5.5.5, la proposition 7.9.1 s'applique ; elle montre que :

(7.9.3) $h \sim h' \iff a_1 + a'_1 \equiv a_2 + a'_2 \equiv a_3 + a'_3 \mod \wp(k)$.

7.9.4. *Exemple* : *G cyclique d'ordre $n = 2^m, m \geqslant 2$.* Ici encore, on sait que $E_G = \{1\}$, cf. §5.5.2. Soit s un générateur de G. Ecrivons h et h' sous la forme :

$h = 1 + \sum_{0<i<n/2} a_i(s^i + s^{-i})$ avec $a_i \in k$,

$h' = 1 + \sum_{0<i<n/2} a'_i(s^i + s^{-i})$ avec $a'_i \in k$.

Soit ε l'unique caractère essentiel non trivial de G. On a :

(7.9.5) $h_\varepsilon = \sum_{i \text{ impair}} a_i$ et $h'_\varepsilon = \sum_{i \text{ impair}} a'_i$.

La proposition 7.9.1 se traduit par :

(7.9.6) $h \sim h' \iff \sum_{i \text{ impair}} a_i \equiv \sum_{i \text{ impair}} a'_i \mod \wp(k)$.

7.10. Application : description des G-formes trace en termes d'hermitiens.

Etant donnés une G-algèbre galoisienne L et un hermitien normalisé $h = \sum \lambda_g g$ de A, on aimerait savoir à quelle condition h correspond à la G-forme trace q_L, autrement dit dans quel cas on a :

(7.10.1) $(L, q_L) \simeq_G (A, q_h)$,

ou, de façon équivalente :

(7.10.2) *Il existe une base $\{v\}$ du A-module L telle que $q_L(v, g.v) = \lambda_g$ pour tout $g \in G$.*

Comme on l'a vu plus haut, il y a une condition nécessaire, imposée par les caractères essentiels. Rappelons-la :

Soit ε un caractère essentiel. Par la formule (7.8.2) on associe à h un élément h_ε de k, d'où un élément, noté $h(\varepsilon)$, de $k/\wp(k)$. D'autre part, on associe à L l'élément de $k/\wp(k)$, noté $L(\varepsilon)$, qui correspond par Artin-Schreier au composé $\Gamma_k \xrightarrow{\varphi_L} G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. La condition nécessaire en question est celle de la proposition 7.8.24, autrement dit :

(7.10.3) *$h(\varepsilon) = L(\varepsilon)$ dans $k/\wp(k)$ pour tout caractère essentiel ε de G.*

Voici un cas où cette condition est suffisante :

Théorème 7.10.4 - *Supposons (7.10.3) satisfaite, ainsi que* :

(7.10.5) *Il existe un 2-sous-groupe H de G tel que $E_H = \{1\}$ et que $\lambda_g = 0$ pour tout $g \notin H$.*

Alors h et q_L se correspondent, autrement dit on a (7.10.1) et (7.10.2).

Démonstration. Choisissons un sous-groupe H de G satisfaisant à (7.10.5). D'après la proposition 7.5.4 il existe une H-algèbre galoisienne M telle que (M, q_M) soit H-isomorphe à $(k[H], h)$. Soit L' la G-algèbre galoisienne induite de M. Si ε est un caractère essentiel de G, on a $L'(\varepsilon) = h(\varepsilon) = L(\varepsilon)$. D'après

le théorème 6.1.7 cela entraîne que les G-formes q_L et q'_L sont isomorphes ; d'où (7.10.1).

7.10.6. *Application : démonstration du théorème 7.3.2.* Reprenons les notations $(L, \gamma, z, ...)$ de ce théorème, et soit $h = 1 + z(\gamma + \gamma^{-1})$; c'est un hermitien normalisé. Il nous faut montrer que h et q_L se correspondent. Cela résulte du théorème 7.10.4 appliqué au groupe cyclique H engendré par γ : la condition (7.10.3) est vraie par construction, et la condition $E_H = \{1\}$ est vraie d'après le §5.5.2.

7.10.7. *Autre application.* Soit S un 2-sous-groupe de Sylow de G. Faisons l'hypothèse :

(7.10.8) $E_S = \{1\}$.

Nous allons en déduire une famille d'éléments hermitiens de A qui décrivent, de façon essentiellement unique, toutes les G-formes trace.

Pour cela, choisissons une base $\xi_1, ..., \xi_n$ du $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel G/G_0, et soit $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ la base duale du groupe des caractères essentiels de G. Pour chaque i, choisissons un représentant γ_i de ξ_i dans S. Considérons les hermitiens de la forme :

(7.10.9) $\quad h(z_1, ..., z_n) = 1 + \sum z_i(\gamma_i + \gamma_i^{-1}),$ avec $\ z_i \in k.$

Ce sont des hermitiens normalisés. Nous allons voir qu'ils suffisent :

Théorème 7.10.10 - *Faisons l'hypothèse (7.10.8). Alors toute G-forme trace q_L correspond à un hermitien $h(z_1, ..., z_n)$ tel que l'image de z_i dans $k/\wp(k)$ soit égale à $L(\varepsilon_i)$.*

Démonstration. Cela résulte du théorème 7.10.4, appliqué en prenant $H = S$.

On obtient ainsi (hélas, sous l'hypothèse (7.10.8)) une description explicite des G-formes trace. D'où l'intérêt du calcul de E_S lorsque S est un 2-groupe.

Références

[A V] N. Bourbaki, *Algèbre, Chapitre* V, *Corps commutatifs*, Masson, Paris, 1981 et Springer-Verlag, 2006 ; traduction anglaise, Springer-Verlag, 1998.

[A VIII] ——- , *Algèbre, Chapitre* VIII, *Anneaux et modules semi-simples*, nouvelle édition révisée, Springer-Verlag, 2011.

[AC IX] ——- , *Algèbre Commutative, Chapitre* IX, *Anneaux locaux noethériens complets*, Masson, Paris, 1983 et Springer-Verlag, 2006.

[Arf 41] C. Arf, *Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik* 2, J. Crelle **183** (1941), 148-167.

[Ba 89] E. Bayer-Fluckiger, *Self-dual normal bases* I, Indag. Math. **51** (1989), 379-383.

[Bar 13] M. Barakat, *Computations of unitary groups in characteristic 2*, `http://www.mathematik.uni-kl.de/~barakat/__for_JP_Serre/UnitaryGroup.pdf`

[BFS 94] E. Bayer-Fluckiger & J-P. Serre, *Torsions quadratiques et bases normales autoduales*, Amer. J. Math. **116** (1994), 1-64.

[BL 90] E. Bayer-Fluckiger & H.W. Lenstra, Jr, *Forms in odd degree extensions and self-dual normal bases*, Amer. J. Math. **112** (1990), 359-373.

[BLR 90] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud, *Néron Models*, Ergebn. Math. (3 Folge) **21**, Springer-Verlag, 1990.

[Bo 91] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, second enlarged edition, Springer-Verlag, 1991.

[BoS 64] A. Borel & J-P. Serre, *Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne*, Comm. Math. Helv. **39** (1964), 111-164 (= A.Borel, Oe.64).

[BPS 13] E. Bayer-Fluckiger, R. Parimala & J-P. Serre, *Hasse principle for G-trace forms*, Izvestiya RAS/Ser. Math. **77** (2013), 5-28.

[BR 00] V. Bovdi & A.L. Rosa, *On the order of the unitary subgroup of a modular group algebra*, Comm. Algebra **28** (2000), 1897–1905.

[BT 65] A. Borel & J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. IHES **27** (1965), 55-150 (= A. Borel, Oe.66 et J. Tits, Oe.61).

[Bu 11] W. Burnside, *Theory of Groups of Finite Order*, second edition, Cambridge Univ. Press, 1911 et Dover Publ. 1955.

[CGP 10] B. Conrad, O. Gabber & G. Prasad, *Pseudo-reductive Groups*, New math. monographs **17**, Cambridge Univ. Press, 2010.

[Ch 58] C. Chevalley, *Classification des groupes de Lie algébriques*, Séminaire ENS 1956-1958, Secrétariat math., IHP, 1958 ; édition révisée par P. Cartier, *Classification des Groupes Algébriques Semi-simples*, Springer-Verlag, 2005.

[CR 62] C.W. Curtis & I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Pure and Applied Math. XI, Intersc. Publ. 1962.

[EVT II] N. Bourbaki, *Espaces Vectoriels Topologiques, Chapitre* II*, Ensembles convexes et espaces localement convexes*, Masson, Paris, 1981 et Springer-Verlag, 2007 ; traduction anglaise, Springer-Verlag, 1987.

[Fe 82] W. Feit, *The Representation Theory of Finite Groups*, North-Holland Math. Library **25**, 1982.

[Fu 84] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag, 1984.

[GM 13] P. Gille & L. Moret-Bailly, *Actions algébriques de groupes arithmétiques*, in *Torsors, Étale Homotopy and Applications to Rational Points*, éditeur A. Skorobogatov, L.M.S. Lect. Notes **405** (2013), 231-249.

[Hu 67] B. Huppert. *Endliche Gruppen* I, Springer-Verlag, 1967.

[Ja 03] J.C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, seconde édition, Math. Surveys **107**, AMS, 2003.

[KMRT 98] M. Knus, A. Merkurjev, M. Rost & J–P. Tignol, *The Book of Involutions*, AMS Colloquium Publications **44**, 1998.

[La 56] S. Lang, *Algebraic groups over finite fields*, Amer. J. Math. **78** (1956), 555-563.

[MT 12] G. Malle & D. Testerman, *Linear Algebraic Groups and Finite Groups of Lie Type*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **133**, Oxford, 2011.

[Ro 61] M. Rosenlicht, *On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **83** (1961), 211-223.

[Se 62] J-P. Serre, *Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires*, Colloque sur la théorie des groupes algébriques, Bruxelles (1962), 53-68 (= Oe.53).

[Se 64] ——-, *Cohomologie Galoisienne*, Springer Lect. Notes **5** (1964) ; cinquième édition révisée et complétée, Springer-Verlag, 1994 ; traduction anglaise, *Galois Cohomology*, Springer-Verlag, 1997.

[Se 68] ——-, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1968 ; cinquième édition corrigée et augmentée, Hermann, Paris, 1998 ; traduction anglaise, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer-Verlag, 1977.

[Se 05] ——-, *BL-bases and unitary groups in characteristic 2*, Oberwolfach Reports **2** (2005), 37-40.

[SGA 3] M. Demazure & A. Grothendieck, *Schémas en Groupes*, 3 vol., Springer Lect. Notes **151, 152, 153** (1970) ; édition révisée par P. Gille et P. Polo, *Documents Mathématiques*, SMF, 2012, 201?, 2012.

[Sp 98] T.A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, second edition, Birkhäuser Boston, 1998.

[St 67] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley Groups*, Notes polycopiées, Yale University, 1967.

[St 75] ——-, *Torsion in Reductive Groups*, Adv. in Math. **15** (1975), 63-92 (= C.P. 415-444).

[Va 05] A. Vasiu, *Normal, unipotent subgroup schemes of reductive groups*, C. R. Acad. Sci. Paris **341** (2005), 79-84.

[Wa 79] W.C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, Springer-Verlag, 1979.

[We 61] A. Weil, *Adeles and Algebraic Groups*, I.A.S. Princeton, 1961 ; Progress in Math. **23**, Birkhäuser Boston, 1982.

Collège de France
3, rue d'Ulm
75005 PARIS