JOURNAL OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 10, Number 1, January 1997, Pages 75–102
S 0894-0347(97)00220-8

RÉPARTITION ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES DE L'OPÉRATEUR DE HECKE T_p

JEAN-PIERRE SERRE

La répartition asymptotique des valeurs propres des opérateurs de Hecke T_p, pour p premier variable, est un problème intéressant et difficile, sur lequel on ne dispose que de résultats partiels, cf. Shahidi [27].

Il va s'agir ici d'une question un peu différente, et qui s'avère nettement plus facile: *on fixe un nombre premier* p et l'on fait tendre vers l'infini le poids (ou le niveau, ou les deux à la fois) des formes modulaires considérées. Prenons par exemple le cas des formes paraboliques de poids k (avec k pair $\to \infty$) sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. D'après Deligne, les valeurs propres de T_p sur cet espace appartiennent à l'intervalle $[-2p^{(k-1)/2}, 2p^{(k-1)/2}]$. Si on les normalise en les divisant par $p^{(k-1)/2}$, on obtient des points de l'intervalle $\Omega = [-2, +2]$. Pour k donné, le nombre de ces points est $k/12 + O(1)$; il tend vers l'infini avec k. On peut donc se poser un problème de *distribution asymptotique*: y a-t-il une mesure μ sur Ω suivant laquelle ces points sont *équirépartis* (au sens rappelé au n° 1.1 ci-après)? Et, si oui, quelle est cette mesure μ? Le cas où l'on fait varier p (cf. [27]) suggère que μ pourrait être la mesure de Sato-Tate $\mu_\infty = \frac{1}{\pi}\sqrt{1 - x^2/4}\,dx$. Il n'en est rien. On trouve une mesure μ_p *différente de* μ_∞, cf. n° 2.3; cette mesure intervenait déjà dans [17] et [19], à propos des valeurs propres de certains graphes, et elle a une interprétation simple en termes de mesures de Plancherel, cf. n° 2.3.

En fait, l'équirépartition suivant μ_p est un phénomène général. Elle vaut (n° 3.2, th. 1) *pour toute suite* (k_λ, N_λ) *de poids et de niveaux, avec* k_λ *pair,* N_λ *premier à* p *et* $k_\lambda + N_\lambda \to \infty$. Le principe de la démonstration consiste à utiliser la formule des traces d'Eichler-Selberg, et à remarquer que les termes "intéressants" de cette formule (ceux notés A_2, A_3 et A_4 dans [24]) sont négligeables par rapport au terme "évident" (celui noté A_1).

Cette démonstration fait l'objet des §§3, 4. Les §§1, 2 contiennent divers préliminaires. Le §5 donne des variantes du th. 1, par exemple aux newforms (n° 5.1). Le §6 contient des applications aux *corps de rationalité* des valeurs propres, et à la décomposition des jacobiennes $J_0(N)$ des courbes modulaires $X_0(N)$; par exemple (n° 6.2, th. 7) *la dimension du plus grand facteur* $\mathbf{Q}$*-simple de* $J_0(N)$ *tend vers l'infini avec* N.

Les deux derniers §§ traitent de problèmes quelque peu différents.

Le §7 s'occupe de familles de *courbes algébriques* sur $\mathbf{F}_q$, de genres tendant vers l'infini: que peut-on dire de la distribution de leurs "angles de Frobenius"? Cette question a déjà été traitée par Tsfasman [31] et Tsfasman-Vlăduţ [32], par des arguments très semblables à ceux utilisés ici. Le résultat principal est le th. 8 du

Received by the editors March 1, 1996.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11F11.

n^o 7.3, qui traduit l'équirépartition des angles de Frobenius en termes de nombres de points sur les extensions de $\mathbf{F}_q$. Parmi les corollaires de ce théorème, signalons: a) le fait que les angles de Frobenius sont *denses* sur le cercle (quelle que soit la famille de courbes considérée); b) à isomorphisme près, il n'y a qu'un *nombre fini* de courbes sur $\mathbf{F}_q$ dont la jacobienne soit $\mathbf{F}_q$-isogène à un produit de courbes elliptiques.

Le §8 considère les matrices d'incidence des *graphes réguliers* finis de valence $q+1$ fixée. Ici encore, une suite de graphes donne une suite de familles de points sur un intervalle de $\mathbf{R}$, et l'on cherche s'il y a équirépartition suivant une mesure convenable. On trouve que cela dépend du *nombre de circuits* de longueur donnée des graphes en question (ou, ce qui revient au même, des fonctions zêta de Ihara de ces graphes), cf. n^o 8.3, th. 10 et n^o 8.4, th. 10$'$. Le cas où il n'y a "pas trop" de circuits conduit à des graphes asymptotiquement du type de Ramanujan (cf. [16], [17]); dans le cas extrême où il y a "très peu" de circuits, on retrouve une équirépartition suivant la mesure μ_q du n^o 2.3, cf. [19].

Table des matières

§1. Rappels sur l'équirépartition des familles finies de points d'un espace compact

1.1. **Définitions.** Soit Ω un espace compact muni d'une mesure de Radon positive μ de masse 1 (cf. Bourbaki [2], Chap. III, §1, n^o 3). Par définition, μ est une forme linéaire réelle

$$f \mapsto \int f(x)\mu(x)$$

sur l'espace $C(\Omega;\mathbf{R})$ des fonctions continues réelles sur Ω, satisfaisant aux deux conditions suivantes:

$$\int f(x)\mu(x) \geq 0 \quad \text{si } f \geq 0,$$

$$\int \mu(x) = 1.$$

Dans ce qui suit, l'intégrale $\int f(x)\mu(x)$ sera souvent notée $\langle f, \mu\rangle$.

Soit L une suite d'indices tendant vers $+\infty$. Pour tout $\lambda \in L$, soit I_λ un ensemble fini non vide, de cardinal $d_\lambda = |I_\lambda|$, et soit $\mathbf{x}_\lambda = (x_{i,\lambda})$, $i \in I_\lambda$, une famille finie de points de Ω indexée par I_λ. On pose:

$$\delta_{\mathbf{x}_\lambda} = \frac{1}{d_\lambda} \sum_{i \in I_\lambda} \delta_{x_{i,\lambda}}$$

où $\delta_{x_{i,\lambda}}$ est la mesure de Dirac au point $x_{i,\lambda}$. La mesure ainsi définie est positive de masse 1. Si $f \in C(\Omega; \mathbf{R})$, on a:

$$\langle f, \delta_{\mathbf{x}_\lambda} \rangle = \frac{1}{d_\lambda} \sum_{i \in I_\lambda} f(x_{i,\lambda}). \tag{1}$$

On dit que la famille $\mathbf{x}_\lambda$ ($\lambda \in L$) est *μ-équirépartie* (ou *équirépartie suivant μ*) si

$$\lim_{\lambda \to \infty} \delta_{\mathbf{x}_\lambda} = \mu, \tag{2}$$

pour la topologie vague sur l'espace des mesures ([2], Chap. III, §1, n° 9). Cela signifie que:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{d_\lambda} \sum_{i \in I_\lambda} f(x_{i,\lambda}) = \langle f, \mu \rangle \quad \text{pour tout } f \in C(\Omega; \mathbf{R}). \tag{3}$$

1.2. **Propriétés de l'équirépartition.** Si A est une partie de Ω, notons $N(\mathbf{x}_\lambda, A)$ le nombre des indices $i \in I_\lambda$ tels que $x_{i,\lambda} \in A$. La proposition suivante justifie le terme d'*équirépartition*:

Proposition 1. *Supposons que $\mathbf{x}_\lambda$ soit μ-équirépartie et que la frontière de A soit de mesure nulle pour μ. On a alors*:

$$\lim_{\lambda \to \infty} N(\mathbf{x}_\lambda, A)/d_\lambda = \mu(A). \tag{4}$$

(Autrement dit, la probabilité de "$x_{i,\lambda}$ appartient à A" tend vers $\mu(A)$ quand $\lambda \to \infty$.)

Cela résulte de la prop. 22 de [2], Chap. IV, §5, n° 12, appliquée à la fonction caractéristique de A.

Corollaire. *Si A est fermée et de μ-mesure nulle, on a*:

$$\lim_{\lambda \to \infty} N(\mathbf{x}_\lambda, A)/d_\lambda = 0. \tag{5}$$

Remarque. Si le support de μ est Ω (ce qui sera souvent le cas par la suite), les $x_{i,\lambda}$ sont *denses* dans Ω. De façon plus précise, si U est un ouvert non vide de Ω, on a $N(\mathbf{x}_\lambda, U) > 0$ pour tout λ assez grand; cela résulte par exemple de (3), appliqué à une fonction continue positive f, non identiquement nulle, et à support dans U.

1.3. **Equirépartition de valeurs propres d'opérateurs.** Dans les §§ suivants, Ω est un intervalle fermé de $\mathbf{R}$. Pour tout $\lambda \in L$ on considère un opérateur linéaire H_λ, de rang fini $d_\lambda > 0$, dont les valeurs propres appartiennent à Ω. On pose $I_\lambda = [1, d_\lambda]$ et l'on prend pour $\mathbf{x}_\lambda$ la famille $(x_{i,\lambda})$ des *valeurs propres* de H_λ, répétées suivant leurs multiplicités, et rangées dans un ordre arbitraire.

Proposition 2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(a) *La famille de valeurs propres* $\mathbf{x}_\lambda$ *est* μ*-équirépartie sur* Ω.

(b) *Pour tout polynôme* $P(X)$ *à coefficients réels, on a*:

$$\operatorname{Tr} P(H_\lambda)/d_\lambda \to \langle P, \mu\rangle \quad \textit{pour } \lambda \to \infty. \tag{6}$$

(b′) *Pour tout entier* $m \geq 0$, *il existe un polynôme* P *de degré* m *satisfaisant à* (6).

Si P est un polynôme, la trace de l'opérateur $P(H_\lambda)$ est égale à la somme des $P(x_{i,\lambda})$. Vu (1), on a donc

$$\operatorname{Tr} P(H_\lambda)/d_\lambda = \langle P, \delta_{\mathbf{x}_\lambda}\rangle, \tag{7}$$

ce qui permet de récrire (6) sous la forme:

$$\langle P, \delta_{\mathbf{x}_\lambda}\rangle \to \langle P, \mu\rangle \quad \text{pour } \lambda \to \infty. \tag{8}$$

Il est clair que (2)⇒(8), d'où (a) ⇒ (b). L'implication réciproque résulte du fait que les polynômes sont *denses* dans $C(\Omega; \mathbf{R})$, et que les mesures positives de masse 1 sont équicontinues sur $C(\Omega; \mathbf{R})$.

L'équivalence (b) ⇔ (b′) est immédiate.

§2. Les polynômes X_n et les mesures μ_q

2.1. **Les polynômes X_n.** Notons Ω l'intervalle fermé $[-2, +2]$. Si $x \in \Omega$, on écrit x de manière unique sous la forme

$$x = 2\cos\varphi, \quad \text{avec } 0 \leq \varphi \leq \pi. \tag{9}$$

Si n est un entier ≥ 0, on pose:

$$X_n(x) = e^{in\varphi} + e^{i(n-2)\varphi} + \cdots + e^{-ni\varphi} = \sin(n+1)\varphi/\sin\varphi. \tag{10}$$

Les X_n sont des polynômes en x:

$$X_0 = 1,\ X_1 = x,\ X_2 = x^2 - 1,\ X_3 = x^3 - 2x, \ldots .$$

On peut les définir au moyen de la série génératrice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) t^n = 1/(1 - xt + t^2). \tag{11}$$

Une autre façon de caractériser les X_n consiste à écrire x sous la forme $x = \operatorname{Tr} U$, avec $U \in \mathbf{SU}_2(\mathbf{C})$ de valeurs propres $e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$. On a alors:

$$X_n(x) = \operatorname{Tr} \operatorname{Sym}^n(U). \tag{12}$$

Les X_n sont donc essentiellement les *caractères irréductibles* du groupe $\mathbf{SU}_2$ (ou du groupe $\mathbf{SL}_2$, cela revient au même). Ils satisfont à la formule de Clebsch-Gordan:

$$X_n X_m = \sum_{0 \leq r \leq \inf(n,m)} X_{n+m-2r} = X_{n+m} + X_{n+m-2} + \cdots + X_{|n-m|}. \tag{13}$$

2.2. **La mesure de Sato-Tate μ_∞.** C'est la mesure sur $\Omega = [-2, +2]$ définie par:

$$\mu_\infty(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1 - x^2/4}\, dx = \frac{2}{\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi. \tag{14}$$

C'est une mesure positive de masse 1. On peut la caractériser par la formule:

$$\langle X_n, \mu_\infty\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n > 0. \end{cases} \tag{15}$$

Vu (13), on a:

$$\langle X_n X_m, \mu_\infty\rangle = \delta_{nm} \quad \text{(symbole de Kronecker).} \tag{16}$$

Interprétation de μ_∞. Soit μ_G la mesure de Haar normalisée du groupe compact $G = \mathbf{SU}_2(\mathbf{C})$. L'image de μ_G par l'application $\mathrm{Tr} : G \to \Omega$ n'est autre que μ_∞. De ce point de vue, (16) ne fait qu'exprimer les relations d'orthogonalité des caractères irréductibles de G.

2.3. **Les mesures μ_q.** Soit q un nombre réel > 1. On définit une fonction f_q sur Ω par:

$$f_q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{-m} X_{2m}(x) = \frac{q+1}{(q^{1/2} + q^{-1/2})^2 - x^2}. \tag{17}$$

En faisant le produit de f_q par μ_∞ on obtient une mesure:

$$\mu_q = f_q \mu_\infty. \tag{18}$$

On étend cette définition à $q = 1$ en posant:

$$\mu_1 = \lim_{q \to 1} \mu_q = \frac{dx}{2\pi\sqrt{1 - x^2/4}} = \frac{1}{\pi}\, d\varphi. \tag{19}$$

La mesure μ_q est positive de masse 1 pour tout $q \geq 1$. On a $\lim_{q\to\infty} \mu_q = \mu_\infty$, ce qui explique la notation choisie.

Les formules (15), (17), (18), et (19) entraînent:

$$\langle X_n, \mu_q\rangle = \begin{cases} q^{-n/2} & \text{si } n \text{ est pair}, \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases} \tag{20}$$

Si l'on définit des polynômes $X_{n,q}$ par la formule:

$$X_{n,q} = X_n - q^{-1} X_{n-2} \quad \text{(en convenant que } X_m = 0 \text{ si } m < 0\text{)}, \tag{21}$$

on a:

$$\langle X_{n,q}, \mu_q\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n > 0. \end{cases} \tag{22}$$

La série génératrice des $X_{n,q}$ est:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_{n,q}(x) t^n = \frac{1 - t^2/q}{1 - xt + t^2}. \tag{23}$$

A un facteur de normalisation près, les $X_{n,q}$ sont les *polynômes orthogonaux* associés à μ_q. On a en effet, en combinant (13), (20) et (21):

$$\langle X_{n,q} X_{m,q}, \mu_q\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 1 + q^{-1} & \text{si } m = n > 0. \end{cases} \tag{24}$$

Interprétation de μ_q. Supposons que q soit entier, et soit A un *arbre régulier de valence* $q+1$, i.e. un arbre dans lequel le nombre des arêtes d'origine donnée est égal à $q+1$, cf. §8. Le groupe $G = \mathrm{Aut}(A)$ est un groupe localement compact pour la topologie de la convergence simple. A tout $x \in \Omega$ on peut associer de façon naturelle une *représentation unitaire irréductible de* G, appartenant à la "série principale non ramifiée"; avec les notations de Cartier [4], c'est celle qui correspond au paramètre $t = q^{1/2}x$. Cela identifie Ω à une partie du spectre de G, et la mesure μ_q s'interprète alors comme la restriction à Ω de la *mesure de Plancherel* du spectre de G, convenablement normalisée, cf. [4], n° 4.

Lorsque q est une puissance d'un nombre premier (et $q > 1$), on a un résultat analogue en remplaçant G par $\mathbf{PGL}_2(K)$, où K est un corps local dont le corps résiduel a q éléments, cf. Mautner [18] et Silberger [30].

§3. Le théorème principal

3.1. **Notations modulaires.** Si N et k sont des entiers > 0, avec k pair, on note $S(N,k)$ l'espace des formes modulaires paraboliques de poids k sur le groupe de congruence $\Gamma_0(N)$, cf. e.g. Shimura [28], Chap. II. On pose:

$$s(N,k) = \dim S(N,k), \tag{25}$$

et on suppose que $s(N,k) > 0$, ce qui est le cas si k ou N est assez grand, par exemple $k \geq 16$ ou $N \geq 26$.

Pour tout $n \geq 1$, on note $T_n = T_n(N,k)$ l'opérateur de Hecke associé à n, (*loc. cit.*, Chap. III). C'est un endomorphisme de $S(N,k)$ qui est hermitien pour le produit scalaire de Petersson (donc à valeurs propres réelles) si $\mathrm{pgcd}(N,n) = 1$. On le normalise en le divisant par $n^{(k-1)/2}$; cela conduit à introduire l'opérateur:

$$T'_n = T'_n(N,k) = T_n(N,k)/n^{(k-1)/2}. \tag{26}$$

On s'intéresse particulièrement au cas où n est *un nombre premier* p *ne divisant pas* N. D'après la conjecture de Ramanujan-Petersson, démontrée par Deligne, les valeurs propres de T_p ont une valeur absolue $\leq 2p^{(k-1)/2}$. Il en résulte que *les valeurs propres de* T'_p *appartiennent à l'intervalle* $\Omega = [-2,+2]$. On note $\mathbf{x}(N,k,p)$ la famille de ces valeurs propres.

3.2. **Enoncé du théorème.** Soit p un nombre premier fixé.

Théorème 1. *Soit* (N_λ, k_λ) *une suite de couples d'entiers* > 0 *satisfaisant aux conditions suivantes*:

a) k_λ *est pair*;
b) $k_\lambda + N_\lambda$ *tend vers* $+\infty$;
c) p *ne divise pas* N_λ.

Alors la famille $\mathbf{x}_\lambda = \mathbf{x}(N_\lambda, k_\lambda, p)$ *des valeurs propres de* $T'_p(N_\lambda, k_\lambda)$ *est équirépartie dans* $\Omega = [-2,+2]$ *suivant la mesure* μ_p *définie au* n° 2.3, *à savoir*:

$$\mu_p = \frac{p+1}{\pi} \frac{(1-x^2/4)^{1/2}\,dx}{(p^{1/2}+p^{-1/2})^2 - x^2}. \tag{27}$$

La démonstration sera donnée ci-dessous.

Corollaire 1. *Soient* α, β *des nombres réels tels que* $-2 \leq \alpha \leq \beta \leq 2$. *Lorsque* λ *tend vers l'infini, la proportion du nombre des valeurs propres de* $T_p(N_\lambda, k_\lambda)$ *qui sont comprises entre* $\alpha.p^{(k-1)/2}$ *et* $\beta.p^{(k-1)/2}$ *tend vers* $\int_\alpha^\beta \mu_p(x)$.

En effet, puisque μ_p a une densité continue, les extrémités de l'intervalle $[\alpha,\beta]$ ont une mesure nulle pour μ_p, et l'on peut appliquer la prop. 1.

Corollaire 2. *Les valeurs propres des* $T'_p(N_\lambda,k_\lambda)$ *sont denses dans* $[-2,+2]$.

Cela résulte du cor. 1, et du fait que le support de μ_p est égal à Ω.

Remarque. Le cor. 1 entraîne en particulier que, pour tout $\varepsilon>0$, et tout λ assez grand (dépendant de ε) il existe une valeur propre de $T_p(N_\lambda,k_\lambda)$ qui est $>(2-\varepsilon)p^{(k_\lambda-1)/2}$; la borne de Deligne est donc essentiellement *optimale.*

3.3. **Un résultat auxiliaire.** La proposition suivante sera démontrée au §4:

Proposition 3. *Soit n un entier ≥ 1. On a*

$$\lim \operatorname{Tr} T'_n(N,k)/(\frac{k-1}{12})\psi(N)=\begin{cases} n^{-1/2} & \textit{si } n \textit{ est un carré},\\ 0 & \textit{sinon},\end{cases} \tag{28}$$

la limite étant prise pour $N+k\to\infty$, k pair, et N premier à n.
(Rappelons que $\psi(N)=N\prod_{l|N}(1+1/l)$ est l'indice de $\Gamma_0(N)$ dans $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$.)

Lorsque $n=1$, on a $\operatorname{Tr} T'_n(N,k)=\dim S(N,k)=s(N,k)$, et la prop. 3 donne:

Corollaire. *On a*

$$s(N,k)\sim\frac{k-1}{12}\psi(N)\quad \textit{pour } N+k\to\infty,\ k \textit{ pair.} \tag{29}$$

3.4. **Démonstration du th. 1 à partir de la prop. 3.** Le lemme suivant est bien connu:

Lemme 1. *Si p est premier au niveau N, on a, pour tout $m\geq 0$,*

$$T'_{p^m}=X_m(T'_p), \tag{30}$$

où $X_m(x)$ est le polynôme de degré m défini au n° 2.1.

Rappelons la démonstration. On part de l'identité de Hecke

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_{p^m}t^m=1/(1-T_pt+p^{k-1}t^2).$$

En y remplaçant t par $t/p^{(k-1)/2}$, on obtient:

$$\sum_{m=0}^{\infty} T'_{p^m}t^m=1/(1-T'_pt+t^2). \tag{31}$$

En comparant avec (11), on en déduit (30).

Si l'on combine ce lemme avec la prop. 2, on voit que le th. 1 est équivalent à la formule:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\operatorname{Tr} T'_{p^m}(N_\lambda,k_\lambda)/s(N_\lambda,k_\lambda)=\langle X_m,\mu_p\rangle\quad\text{pour tout } m\geq 0.$$

D'après (20), le membre de droite est égal à $p^{-m/2}$ si m est pair et à 0 si m est impair. D'autre part, le corollaire à la prop. 3 permet de remplacer $s(N_\lambda,k_\lambda)$ par $\frac{(k_\lambda-1)}{12}\psi(N_\lambda)$ dans le membre de gauche. On est donc ramené à démontrer:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\operatorname{Tr} T'_{p^m}(N_\lambda,k_\lambda)/\frac{(k_\lambda-1)}{12}\psi(N_\lambda)=\begin{cases} p^{-m/2} & \text{si } m \text{ est pair},\\ 0 & \text{sinon},\end{cases}$$

ce qui résulte de la prop. 3 appliquée à $n=p^m$.

§4. Majoration des termes de la formule des traces

4.1. **Enoncé du résultat.** On se place dans un cadre un peu plus général que celui du §3: outre le poids $k \geq 2$ et le niveau N, on se donne un caractère χ sur $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ que l'on prolonge à $\mathbf{R}$ en posant $\chi(x) = 0$ si x n'est pas un entier > 0 premier à N. On suppose que $(-1)^k = \chi(-1)$ et l'on note $S(N, k, \chi)$ l'espace des formes modulaires paraboliques de poids k et de caractère χ sur le groupe $\Gamma_1(N)$, cf. par exemple [24], §2. Le cas considéré au §3 est celui où $\chi = 1$.

Pour tout entier $n > 0$, on note $T_n(N, k, \chi)$ l'endomorphisme de $S(N, k, \chi)$ défini par l'opérateur de Hecke T_n (*loc. cit.*, formule (2)). On va prouver:

Proposition 4. *On a*:

$$\left| \operatorname{Tr} T_n(N, k, \chi) - \frac{k-1}{12}\chi(n^{1/2})n^{k/2-1}\psi(N) \right| \ll_n n^{k/2}N^{1/2}d(N), \tag{32}$$

où $d(N)$ *est le nombre des diviseurs* > 0 *de* N.

(Rappelons que le symbole $A \ll_n B$ signifie qu'il existe une constante positive $C(n)$, ne dépendant que de n, telle que $A \leq C(n)B$ quelles que soient les valeurs des autres paramètres intervenant dans A et B; ces paramètres sont ici k, N et χ, avec $k \geq 2$ et $\chi(-1) = (-1)^k$. Noter qu'il serait possible de donner une majoration explicite de $C(n)$, comme le fait Brumer [3] pour $k = 2$; nous n'en aurons pas besoin.)

La formule (32), *appliquée à* $\chi = 1$, *entraîne la prop.* 3 *du* n$^{\text{o}}$ 3.3. En effet, si l'on divise tous les termes de (33) par $\frac{k-1}{12}n^{(k-1)/2}\psi(N)$, on obtient:

$$| \operatorname{Tr} T'_n(N, k)/(\frac{k-1}{12})\psi(N) - \chi(n^{1/2})n^{-1/2}| \ll_n \frac{N^{1/2}d(N)}{(k-1)\psi(N)}. \tag{33}$$

Or on a $d(N) \ll_\varepsilon N^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ (cf. e.g. [10], th. 315), et $\psi(N) \geq N$. Le terme de droite tend donc vers 0 quand $k + N$ tend vers l'infini. D'autre part, le terme $\chi(n^{1/2})n^{-1/2}$ est égal à $n^{-1/2}$ si n est un carré premier à N, et à 0 sinon. On obtient donc bien l'énoncé de la prop. 3.

Le reste de ce § est consacré à la démonstration de la prop. 4. Nous utiliserons pour cela la *formule des traces* d'Eichler-Selberg. Avec les notations de [5], [24], cette formule s'écrit:

$$\operatorname{Tr} T_n(N, k, \chi) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \tag{34}$$

où les $A_i = A_i(N, k, n, \chi)$ sont certaines expressions élémentaires dont nous rappellerons les valeurs plus loin.

Le terme A_1 est le *terme principal*:

$$A_1 = \frac{k-1}{12}\chi(n^{1/2})n^{k/2-1}\psi(N). \tag{35}$$

La démonstration de la prop. 4 consiste à majorer en valeur absolue les termes A_2, A_3 et A_4. On verra que l'on a:

$$|A_2| \ll_n n^{k/2}d(N), \tag{36}$$

$$|A_3| \ll_n n^{k/2}N^{1/2}d(N), \tag{37}$$

$$|A_4| \ll_n 1 \tag{38}$$

ce qui entraîne bien (32).

4.2. **Majoration de $|A_2|$.** D'après [24], th. 2.2, le terme A_2 est donné par:

$$A_2 = -\frac{1}{2}\sum_{t^2<4n}\frac{\rho^{k-1}-\overline{\rho}^{k-1}}{\rho-\overline{\rho}}\sum_f h_w\left(\frac{t^2-4n}{f^2}\right)\mu(t,f,n), \tag{39}$$

où:

t parcourt les entiers (de signe quelconque) tels que $t^2 < 4n$;

ρ et $\overline{\rho}$ sont les deux racines du polynôme $X^2 - tX + n$;

f parcourt les entiers ≥ 1 tels que f^2 divise $t^2 - 4n$, et que $(t^2 - rn)/f^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$;

$h_w(\frac{t^2-4n}{f^2})$ est le nombre de classes de l'ordre du corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\rho)$ de discriminant $\frac{t^2-4n}{f^2}$, divisé par 2 (resp. 3) si ce discriminant est -4 (resp. -3);

$\mu(t,f,n) = \frac{\psi(N)}{\psi(N/N_f)}\sum_{x \bmod N}\chi(x)$, où $N_f = \mathrm{pgcd}(N,f)$ et où x parcourt les éléments inversibles de $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ tels que $x^2 - tx + n \equiv 0 \pmod{N_f N}$.

Remarque. Le terms $\frac{\rho^{k-1}-\overline{\rho}^{k-1}}{\rho-\overline{\rho}}$ est un *entier*, égal à $n^{k/2-1}X_{k-2}(tn^{-1/2})$, avec les notations du n° 2.1.

Noter que, pour n fixé, t, f, ρ et $h_w(\frac{t^2-4n}{f^2})$ sont contenus dans des ensembles finis, indépendants de k, N et χ. On a de plus $|\rho| = n^{1/2}$ et $|\rho - \overline{\rho}| = (4n - t^2)^{1/2} \geq 1$, de sorte que:

$$\left|\frac{\rho^{k-1}-\overline{\rho}^{k-1}}{\rho-\overline{\rho}}\right| \leq 2n^{(k-1)/2}/(4n-t^2)^{1/2} \ll_n n^{k/2}.$$

On déduit de ceci:

$$|A_2| \ll_n n^{k/2}\sup|\mu(t,f,n)|. \tag{40}$$

Or $|\mu(t,f,n)|$ est majoré par $\frac{\psi(N)}{\psi(N/N_f)}M(t,n,N)$, où $M(t,n,N)$ est le nombre de solutions de la congruence $x^2 - tx + n \equiv 0 \pmod N$. On a:

$$\psi(N)/\psi(N/N_f) \leq \psi(N_f) \leq \psi(f) \ll_n 1,$$

puisque N_f divise f, qui est $\leq 2n^{1/2}$. L'inégalité (40) entraîne donc:

$$|A_2| \ll_n n^{k/2}\sup_t M(t,n,N). \tag{41}$$

Or on a:

Lemme 2. *Soient a et b des entiers tels que $a^2 - 4b \neq 0$, soit N un entier ≥ 1 et soit $M(a,b,N)$ le nombre de solutions* $\pmod N$ *de la congruence $x^2 - ax + b \equiv 0$* $\pmod N$*.*

On a:

$$M(a,b,N) \leq 2^{\omega(N)}|a^2-4b|^{1/2}, \tag{42}$$

où $\omega(N)$ est le nombre de facteurs premiers de N.

Ce résultat est un cas particulier d'un théorème de M. Huxley [12], applicable à un polynôme unitaire f de degré quelconque (la borne étant alors $\deg(f)^{\omega(N)}|D|^{1/2}$, où D est le discriminant de f). Le cas considéré ici peut aussi se traiter par un calcul direct: on peut supposer que N est une puissance d'un nombre premier p, et l'on montre que l'on a alors

$$M(a,b,N) \leq 2.p^{[c/2]}$$

où c est la valuation p-adique de a^2-4b, ce qui est un peu plus précis (si c est impair) que (42).

Le lemme 2, appliqué avec $a=t, b=n$, donne:

$$\sup_t M(t,n,N) \leq 2^{\omega(N)} \sup |4n-t^2|^{1/2} \leq 2^{1+\omega(N)} n^{1/2} \ll_n 2^{\omega(N)} \ll_n d(N). \tag{43}$$

En combinant (41) et (43) on obtient l'inégalité (36) annoncée au n$^{\mathrm{o}}$ 4.1.

Remarque. La méthode suivie ici fournit une *majoration explicite* de $|A_2|$: il suffit de reprendre les calculs précédents et d'utiliser l'inégalité

$$\sum_{t^2<4n} \sum_f h_w\left(\frac{t^2-4n}{f^2}\right) < 2\sigma_1(n),$$

cf. [3], lemma 4.1. On obtient ainsi:

$$|A_2| < 2\sigma_1(n) n^{(k-1)/2} 2^{\omega(N)} \sup_{f^2<4n} \psi(f). \tag{44}$$

4.3. **Majoration de $|A_3|$.** D'après [23], *loc. cit.*, on a:

$$A_3 = -\frac{1}{2} \sum_{d|n} \inf(d,n/d)^{k-1} \sum_c \varphi(\mathrm{pgcd}(N/c,c))\chi(y), \tag{45}$$

où:

c parcourt les diviseurs >0 de N tels que $\mathrm{pgcd}(N/c,c)$ divise $n/d-d$ ainsi que N/N_χ, où N_χ est le conducteur de χ;

y est un entier défini $\mathrm{mod}\, N/\mathrm{pgcd}(N/c,c)$ par les conditions $y \equiv d \pmod{c}$ et $y \equiv n/d \pmod{N/c}$.

Le nombre des d est $d(n)$; chaque terme $\inf(d,n/d)^{k-1}$ est $\leq n^{(k-1)/2}$. De même, le nombre des c est $\leq d(N)$, et l'on a $\varphi(\mathrm{pgcd}(N/c,c)) \leq N^{1/2}$. On en déduit:

$$|A_3| \leq \frac{1}{2} d(n) n^{(k-1)/2} d(N) N^{1/2} \ll_n n^{k/2} N^{1/2} d(N), \tag{46}$$

ce qui donne bien la majoration (37).

4.4. **Majoration de $|A_4|$.** D'après [24], on a

$$A_4 = \begin{cases} 0 & \text{si } k>2, \text{ ou si } \chi \neq 1, \\ \sum t & \text{si } k=2 \text{ et } \chi=1, \end{cases} \tag{47}$$

où t parcourt les diviseurs >0 de n tels que $\mathrm{pgcd}(N,n/t)=1$.

On a donc

$$|A_4| \leq \sigma_1(n) \ll_n 1, \tag{48}$$

ce qui démontre (38), et achève la démonstration de la prop. 4 (donc aussi celles de la prop. 3 et du th. 1).

§5. Variantes du théorème 1

J'en donne trois, qui se déduisent facilement des majorations du §4: newforms (n° 5.1), plusieurs nombres premiers (n° 5.2), Nebentypus (n° 5.3).

D'autres variantes doivent être traitables sans grand effort supplémentaire: par exemple, le cas des formes paraboliques satisfaisant à des conditions de symétrie à la Atkin-Lehner. On pourrait aussi s'intéresser à d'autres sous-groupes de congruence de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ que $\Gamma_0(N)$ et $\Gamma_1(N)$; dans cette direction, les majorations de Cox-Parry [7] seront sûrement utiles. Une autre possibilité consiste à remplacer $\mathbf{SL}_2$ et $\mathbf{GL}_2$ par un groupe réductif quelconque, l'équirépartition se faisant suivant la mesure de Plancherel (pour les représentations locales relatives à une place fixée); on trouvera des exemples de ce type (pour la place à l'infini) dans Rohlfs-Speh [22] et Savin [23].

5.1. **Equirépartition pour les formes paraboliques primitives.** Reprenons les notations des §§3, 4 et notons $S(N,k)^{\mathrm{new}}$ le sous-espace de $S(N,k)$ engendré par les formes primitives ("newforms", cf. [1]). Cet espace est stable par les opérateurs de Hecke. On pose:

$$\begin{aligned}
&s(N,k)^{\mathrm{new}} = \dim S(N,k)^{\mathrm{new}},\\
&T_n(N,k)^{\mathrm{new}} = \text{ restriction de } T_n(N,k) \text{ à } S(N,k)^{\mathrm{new}},\\
&T'_n(N,k)^{\mathrm{new}} = T_n(N,k)^{\mathrm{new}}/n^{(k-1)/2}.
\end{aligned}$$

Théorème 2. *L'énoncé du th.* 1 *reste valable lorsqu'on y remplace* $S(N_\lambda,k_\lambda)$ *par* $S(N_\lambda,k_\lambda)^{\mathrm{new}}$ *et* $T'_p(N_\lambda,k_\lambda)$ *par* $T'_p(N_\lambda,k_\lambda)^{\mathrm{new}}$.

(Autrement dit, les valeurs propres de $T'_p(N_\lambda,k_\lambda)^{\mathrm{new}}$ sont équiréparties dans $\Omega = [-2,+2]$ suivant la mesure μ_p du n° 2.3, pour $\lambda \to \infty$.)

Tout revient à estimer les traces des opérateurs $T'_n(N,k)^{\mathrm{new}}$ pour n premier à N, ce que l'on va faire en se ramenant au cas des $T'_n(N,k)$. Si l'on se place dans le groupe de Grothendieck des T_n-modules (n premier à N), on a d'après [1], th. 5:

$$S(N,k) = \sum_{M|N} d(N/M).S(M,k)^{\mathrm{new}}. \tag{49}$$

Définissons alors des entiers $d^*(M)$ par la série de Dirichlet

$$\sum d^*(M)M^{-s} = 1/\sum d(M)M^{-s} = 1/\zeta^2(s). \tag{50}$$

La fonction $M \mapsto d^*(M)$ est multiplicative; sa valeur pour une puissance l^α d'un nombre premier l est:

$$d^*(l^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \text{ ou } 2,\\ -2 & \text{si } \alpha = 1,\\ 0 & \text{si } \alpha > 2.\end{cases} \tag{51}$$

D'où:

$$|d^*(N)| \le 2^{\omega(N)} \le d(N) \le_\varepsilon N^\varepsilon \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0. \tag{52}$$

De (49) et (50) on déduit par un argument standard (convolution):

$$s(N,k)^{\mathrm{new}} = \sum_{M|N} d^*(N/M).S(M,k). \tag{53}$$

En particulier:

$$S(N,k)^{\mathrm{new}} = \sum_{M|N} d^*(N/M).s(M,k).$$

Plus généralement, si n est premier à N, on a:

$$\operatorname{Tr} T_n(N,k)^{\mathrm{new}} = \sum_{M|N} d^*(N/M).\operatorname{Tr} T_n(N,k). \tag{54}$$

Cette formule, jointe à la formule des traces (n° 4.1), permet d'écrire $\operatorname{Tr} T_n(N,k)^{\mathrm{new}}$ comme somme des termes A_i^{new}, $i = 1,2,3,4$, définis par:

$$A_i^{\mathrm{new}} = \sum_{M|N} d^*(N/M).A_i(M), \tag{55}$$

où $A_i(M)$ désigne le terme A_i relatif à M (et bien sûr à n,k).

Le terme principal A_1^{new} est:

$$A_1^{\mathrm{new}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré,} \\ \frac{k-1}{12} n^{k/2-1} \psi^{\mathrm{new}}(N) & \text{si } n \text{ est un carré,} \end{cases} \tag{56}$$

où $\psi^{\mathrm{new}}(N)$ est défini par:

$$\psi^{\mathrm{new}}(N) = \sum_{M|N} d^*(N/M)\psi(M). \tag{57}$$

La fonction ψ^{new} est multiplicative. Sa valeur pour l^α, l premier, est:

$$\psi^{\mathrm{new}}(l^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0, \\ l-1 & \text{si } \alpha = 1, \\ l^2 - l - 1 & \text{si } \alpha = 2, \\ l^\alpha - l^{\alpha-1} - l^{\alpha-2} + l^{\alpha-3} & \text{si } \alpha > 2. \end{cases} \tag{58}$$

On en déduit:

$$C.\varphi(N) \le \psi^{\mathrm{new}}(N) \le \varphi(N), \tag{59}$$

avec $C = \prod_l (1 - 1/(l^2 - l)) = 0,37395\ldots$.

En particulier:

$$N^{1-\varepsilon} \ll_\epsilon \psi^{\mathrm{new}}(N) \le N \quad \text{pour tout } \epsilon > 0. \tag{60}$$

D'autre part, la formule (55), combinée à (36), (37), (38), donne:

$$\begin{aligned} |A_2^{\mathrm{new}} + A_3^{\mathrm{new}} + A_4^{\mathrm{new}}|/n^{(k-1)/2} &\ll_n \sum_{M|N} d^*(N/M) M^{1/2} d(M) \\ &\ll_{n,\varepsilon} N^{1/2+\varepsilon} \sum_{M|N} (N/M)^\varepsilon M^{1/2+\varepsilon} N^{-1/2-\varepsilon}, \quad \text{cf. (54),} \\ &\ll_{n,\varepsilon} N^{1/2+\varepsilon} \sum_{M|N} (M/N)^{1/2} \ll_{n,\varepsilon} N^{1/2+\varepsilon} d(N) \\ &\ll_{n,\varepsilon} N^{1/2+2\varepsilon} \quad \text{pour tout } \epsilon > 0. \end{aligned} \tag{61}$$

Ce terme est donc négligeable devant $(k-1)\psi^{\mathrm{new}}(N)$ pour $k + N \to \infty$.

Pour $n = 1$, cela entraîne:

$$s(N,k)^{\mathrm{new}} \sim A_1^{\mathrm{new}} = \frac{k-1}{12} \psi^{\mathrm{new}}(N). \tag{62}$$

On déduit de là, et de (61), une formule analogue à celle de la prop. 3, à savoir:

$$\lim \operatorname{Tr} T'_n(N,k)^{\text{new}}/(\frac{k-1}{12})\psi^{\text{new}}(N) = \begin{cases} n^{-1/2} & \text{si } n \text{ est un carré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{63}$$

Le th. 2 se déduit de (63) par le même argument que celui employé au n° 3.4.

5.2. **Equirépartition simultanée des valeurs propres de plusieurs opérateurs de Hecke.** Jusqu'à présent, nous ne nous sommes intéressés qu'aux valeurs propres de T_p pour un nombre premier p fixé. On peut se proposer d'étudier simultanément les T_p relatifs à différents nombres premiers. C'est ce que nous allons faire:

Soit donc P un ensemble fini de nombres premiers, et soit (N,k) un couple d'entiers satisfaisant aux conditions du n° 3.1 pour tout $p \in P$—ce qui entraîne en particulier que N n'est divisible par aucun élément de P. Choisissons une base $f_1, \dots, f_d$ de $S(N,k)$ formée de fonctions propres pour les T_p, $p \in P$; notons $x_i(N,k,p)$ la valeur propre correspondante de $T'_p = T_p/p^{(k-1)/2}$. Pour i fixé, les $x_i(N,k,p)$ définissent un point $x_i(N,k,P)$ de $\Omega^P = \Omega \times \cdots \times \Omega$. Notons $\mathbf{x}(N,k,P)$ la famille de points ainsi obtenus.

Théorème 3. *L'énoncé du th.* 1 *reste valable lorsqu'on y remplace*:
$\mathbf{x}(N_\lambda, k_\lambda, p)$ *par* $\mathbf{x}(N_\lambda, k_\lambda, P)$,
Ω *par* Ω^P,
μ_p *par le produit tensoriel* μ_P *des mesures* μ_p, $p \in P$.

Autrement dit, il y a équirépartition suivant la *mesure produit* des μ_p; les T'_p, $p \in P$, se comportent de façon indépendante les uns des autres.

Corollaire. *Les* $x_i(N_\lambda, k_\lambda, P)$ *sont denses dans* Ω^P.

La démonstration du th. 3 est essentiellement la même que celle du th. 1. On est ramené à prouver ceci: si, pour tout $p \in P$, on se donne un polynôme $h_p(x)$, on a:

$$\lim \frac{1}{d_\lambda} \prod_{p \in P} \operatorname{Tr} h_p(T'_p(N_\lambda, k_\lambda)) = \prod_{p \in P} \langle h_p, \mu_p \rangle, \quad \text{où } d_\lambda = s(N_\lambda, k_\lambda).$$

Par linéarité, on peut se borner au cas où chaque $h_p(x)$ est de la forme $X_{m_p}(x)$. Si l'on pose alors $n = \prod p^{m_p}$, on est ramené à voir que

$$\lim \frac{1}{d_\lambda} \operatorname{Tr} T'_n(N_\lambda, k_\lambda) = \begin{cases} n^{-1/2} & \text{si } n \text{ est un carré,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et cela résulte de la prop. 3.

5.3. **Equirépartition des valeurs propres des opérateurs de Hecke "de Nebentypus".** On revient aux notations du n° 4.1, i.e. on se donne k, N et χ, où χ est un caractère $(\operatorname{mod} N)$ tel que $\chi(-1) = (-1)^k$. Soit p un nombre premier ne divisant pas N, et soit a_p une valeur propre de l'opérateur de Hecke T_p correspondant. En général, a_p n'est pas réel: on a

$$a_p = \overline{a_p}\chi(p). \tag{64}$$

Si $\chi(p)^{1/2}$ désigne l'une quelconque des racines carrées de $\chi(p)$, on voit ainsi que les valeurs propres de $T_p/\chi(p)^{1/2}$ sont *réelles.* Cela amène à introduire la normalisation:

$$T'_p = T_p/p^{(k-1)/2}\chi(p)^{1/2}. \tag{65}$$

Les valeurs propres de T'_p appartiennent à Ω, et l'on peut de nouveau se poser le problème de leur équirépartition. De façon plus précise, on se donne une suite $(N_\lambda, k_\lambda, \chi_\lambda)$, avec N_λ premier à p, $k_\lambda \geq 2$, $\chi_\lambda(-1) = (-1)^{k_\lambda}$ et $N_\lambda + k_\lambda \to \infty$. Pour chaque λ, on note $\mathbf{x}_\lambda$ la famille des valeurs propres de l'opérateur T'_p associé à $(N_\lambda, k_\lambda, \chi_\lambda)$ et au choix d'une racine carrée de $\chi_\lambda(p)$. Alors l'analogue du th. 1 est vrai, autrement dit:

Théorème 4. *Quand $\lambda \to \infty$, la famille $\mathbf{x}_\lambda$ est équirépartie dans Ω suivant la mesure μ_p.*

(Noter que le choix des racines carrées des $\chi_\lambda(p)$ n'a pas d'importance. Cela tient au fait que μ_p est invariante par la symétrie $x \mapsto -x$.)

Ce théorème se démontre de la même manière que le th. 1, compte tenu des majorations du §4. Les détails peuvent être laissés au lecteur.

§6. Application aux degrés des corps de rationalité des valeurs propres

6.1. **Corps de rationalité.** Si N est un entier ≥ 1, on peut choisir une base $f_1, \dots, f_s$ de $S(N,k)$ formée de vecteurs propres pour les opérateurs T_n avec $\mathrm{pgcd}(N,n) = 1$. On a

$$T_n f_i = x_{i,n} f_i, \tag{66}$$

où les $x_{i,n}$ sont des entiers algébriques totalement réels. Notons K_i le corps engendré par les $x_{i,n}$ (i fixé, n variable). C'est une extension finie de $\mathbf{Q}$. A indexation près, les K_i ne dépendent pas de la base choisie. Si r est un entier ≥ 1, nous noterons $s(N,k)_r$ *le nombre des indices i tels que* $[K_i : \mathbf{Q}] = r$. On a évidemment:

$$\sum_{r \geq 1} s(N,k)_r = \dim S(N,k) = s(N,k). \tag{67}$$

Exemple. L'entier $s(N,k)_1$ est le nombre des indices i tels que l'on ait $x_{i,n} \in \mathbf{Z}$ pour tout n premier à N.

Théorème 5. *Soit p un nombre premier fixé. Pour tout $r \geq 1$, on a:*

$$\lim s(N,k)_r/s(N,k) = 0. \tag{68}$$

où la limite est prise sur les entiers $N \geq 1$ premiers à p.

(Autrement dit, la plupart des corps K_i ont un grand degré.)

Notons $s(N,k,p)_r$ le nombre des indices i tels que $[\mathbf{Q}(x_{i,p}) : \mathbf{Q}] \leq r$. On a évidemment $s(N,k,p)_r \geq s(N,k)_r$. On va démontrer:

$$\lim s(N,k,p)_r/s(N,k) = 0, \tag{69}$$

ce qui établira le th. 5.

Si x est l'un des $x_{i,p}$ tels que $[\mathbf{Q}(x_{i,p}) : \mathbf{Q}] \leq r$, on a:

(a) x est un entier algébrique totalement réel de degré $\leq r$;

(b) les conjugués x^σ de x sont tels que $|x^\sigma| \leq 2p^{(k-1)/2}$.

Soit $A = A(p,k,r)$ l'ensemble des nombres x satisfaisant à ces deux conditions. C'est un ensemble *fini*: en effet, le polynôme caractéristique de x est de degré $\leq r$, et ses coefficients sont des entiers bornés. Soit A' la partie de $\Omega = [-2,+2]$ déduite de A par l'homothétie $x \mapsto x/p^{(k-1)/2}$. Comme A' est fini, il est de mesure nulle pour la mesure μ_p. En appliquant le th. 1 et le cor. 1 à la prop. 1 (ou le cor. 1 au th. 1, au choix), on en déduit que la proportion des i tels que $x_{i,p}$ appartienne à A tend vers 0 quand $N \to \infty$. Comme cette proportion est égale à $s(N,k,p)_r/s(N,k)$, on en déduit bien (69).

Question. Dans l'énoncé du th. 5, peut-on supprimer l'hypothèse que N n'est pas divisible par p? Autrement dit, est-il vrai que l'on a

$$\lim_{N\to\infty} s(N,k)_r/s(N,k) = 0 \quad \text{pour tout } r \geq 1?$$

Cela paraît vraisemblable, mais je ne sais pas le démontrer. Voici un résultat partiel dans cette direction:

Théorème 6. *Soit $r(N,k)$ la borne supérieure des degrés des corps K_i associés au couple (N,k). On a*

$$\lim_{N\to\infty} r(N,k) = \infty. \tag{70}$$

(Rappelons que le poids k est fixé. J'ignore ce qui se passe lorsque l'on fixe N et fait varier k.)

Soit R un entier. On doit montrer que $r(N,k) > R$ si N est assez grand. Choisissons un nombre premier p^* tel que $r(p^*,k) > R$; c'est possible d'après le th. 5 appliqué avec $p = 2$ par exemple. Distinguons maintenant deux cas, suivant que N est ou non divisible par p^*:

(i) *N n'est pas divisible par p^*.*

Dans ce cas, le th. 5, appliqué avec $p = p^*$, montre que $r(N,k) > R$ pour tout N assez grand.

(ii) *N est divisible par p^*.*

Dans ce cas, $S(N,k)$ contient $S(p^*,k)$, et cette inclusion ne change pas les corps K_i (on sait en effet que K_i est engendré par les $x_{i,p}$ pour p premier $\geq p_0$ quel que soit p_0—en fait, un ensemble de nombres premiers de densité 1 suffit). On a donc $r(N,k) \geq r(p^*,k) > R$, ce qui achève la démonstration.

Remarques. 1) Le th. 5 est également vrai pour l'espace $S(N,k)^{\text{new}}$ des "newforms": la démonstration est la même, compte tenu du th. 2. J'ignore ce qu'il en est du th. 6; la démonstration ci-dessus ne s'applique pas, car elle repose sur l'emploi des "oldforms".

2) On aimerait pouvoir préciser le th. 5. Par exemple, est-il vrai que

$$s(N,k)_r/N^\alpha \to 0 \qquad (k, r \text{ fixés, } N \to \infty)$$

pour un $\alpha < 1$, ou même pour tout $\alpha > 0$?

6.2. **Dimensions des facteurs Q-simples de $J_0(N)$.** Lorsque $k = 2$, on dispose, grâce à Shimura (cf. [28], [29]), d'une interprétation simple des corps K_i intervenant au n° précédent:

Soit $J_0(N)$ la jacobienne de la courbe modulaire $X_0(N)$. Décomposons $J_0(N)$, à $\mathbf{Q}$-isogénie près, en facteurs $\mathbf{Q}$-simples:

$$J_0(N) \simeq \prod A_j.$$

Pour tout j, la $\mathbf{Q}$-algèbre $E_j = \mathbf{Q} \otimes \mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(A_j)$ est un corps. D'après Shimura, *loc. cit.* (voir aussi Ribet [21], §4), ce corps est commutatif, totalement réel, et l'on a $[E_j : \mathbf{Q}] = \dim A_j$. De plus, les corps E_j ainsi définis sont essentiellement le mêmes que les corps K_i du n$^{\text{o}}$ précédent (pour le poids 2); de façon plus précise, les corps K_i correspondent bijectivement aux couples (j, σ), où σ est un plongement de E_j dans $\mathbf{R}$.

En particulier, *le nombre des A_j de dimension donnée r est égal à* $\frac{1}{r}s(2,N)_r$, avec les notations du n$^{\text{o}}$ 6.1. Pour $r = 1$, cela montre que $s(2,N)_1$ est le nombre des facteurs $\mathbf{Q}$-simples de $J_0(N)$ qui sont des courbes elliptiques.

Les théorèmes 5 et 6 peuvent donc se traduire en des énoncés disant que "peu" de facteurs A_j sont de dimension fixée. Ainsi, le th. 6 donne:

Théorème 7. *Soit $r(N)$ la plus grande des dimensions des facteurs $\mathbf{Q}$-simples de $J_0(N)$. On a:*

$$\lim r(N) = \infty \quad \textit{pour } N \to \infty.$$

En particulier, on a $r(N) > 1$ pour N assez grand. Autrement dit:

Corollaire. *Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers $N \geq 1$ tels que $J_0(N)$ soit $\mathbf{Q}$-isogène à un produit de courbes elliptiques.*

Ceci justifie une assertion de [8], n$^{\text{o}}$ 2, Rem. 2.

Remarques. 1) Il résulte d'un théorème d'Evertse-Silverman [9] que le nombre des classes d'isomorphisme de $\mathbf{Q}$-courbes elliptiques de conducteur divisant N est $\ll_c N^c$ pour tout $c > 1/2$. Il en est donc de même de $s(2,N)_1$, ce qui est bien plus précis que les résultats obtenus ci-dessus pour $r = 1$. (Je dois cette remarque à A. Brumer.)

2) La méthode suivie ici se prête à des calculs numériques. Ainsi, H. Cohen [6] a montré que les valeurs *impaires* de N telles que $J_0(N)$ soit $\mathbf{Q}$-isogène à un produit de courbes elliptiques sont:

a) les N tels que le genre de $X_0(N)$ soit 0 (i.e. $N = 1,3,5,7,9,13,25$) ou 1 (i.e. $N = 11,15,17,19,21,49$);

b) $N = 33,37,45,57,75,99,121$, les genres correspondants étant respectivement: $3,2,3,5,5,9,6$.

§7. Equirépartition des valeurs propres des endomorphismes de Frobenius des courbes algébriques sur $\mathbf{F}_q$

7.1. **Préliminaires: coefficients de Fourier d'une mesure sur Ω.** On revient aux notations du §2: on paramètre $\Omega = [-2,+2]$ par $x = 2\cos\varphi$, avec $0 \leq \varphi \leq \pi$. Si n est un entier ≥ 0, on pose:

$$Y_n = X_n - X_{n-2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 2\cos n\varphi & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \tag{71}$$

(Ce polynôme coïncide avec celui noté $X_{n,1}$ au n$^{\text{o}}$ 2.3; à un changement de variables $x \mapsto x/2$, près, c'est essentiellement le n-ième polynôme de Chebyshev.)

Si μ est une mesure sur Ω, ses *coefficients de Fourier* $a_n(\mu)$ sont définis par:

$$a_n(\mu) = \langle Y_n, \mu \rangle. \tag{72}$$

Le développement de Fourier de μ (au sens “distributions”) est:

$$\mu = (a_0 + a_1 \cos\varphi + \cdots + a_n \cos n\varphi + \cdots)\mu_1 \tag{73}$$

où $a_n = a_n(\mu)$ et $\mu_1 = \frac{1}{\pi}\, d\varphi$, cf. n° 2.3.

La série $\sum a_n \cos n\varphi$ converge normalement (au sens usuel) lorsque $\sum |a_n| < \infty$. Ce sera le cas par la suite, en vertu du résultat élémentaire suivant:

Proposition 5. *Supposons que μ soit positive de masse 1 et que ses coefficients de Fourier a_n soient ≤ 0 pour $n \geq 1$. On a alors*

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| \leq 1. \tag{74}$$

Pour tout entier $m \geq 1$, posons

$$P_m(x) = \frac{1}{2m+1}(1 + 2\cos\varphi + 2\cos 2\varphi + \cdots + 2\cos m\varphi)^2.$$

On peut écrire P_m comme combinaison linéaire des Y_n:

$$P_m = \sum_n b_{m,n} Y_n,$$

avec

$$b_{m,n} = \begin{cases} 1 - n/(2m+1) & \text{si } 0 \leq n \leq 2m, \\ 0 & \text{si } n > 2m. \end{cases}$$

Comme P_m est ≥ 0 sur Ω, on a

$$\langle P_m, \mu\rangle = \sum_{n\geq 0} b_{m,n} a_n \geq 0 \quad \text{pour tout } m \geq 1.$$

En tenant compte de $a_0 = 1$, $b_{m,0} = 1$ et $a_n = -|a_n|$ pour $n \geq 1$, cela donne:

$$\sum_{n\geq 1} b_{m,n}|a_n| \leq 1 \quad \text{pour tout } m \geq 1. \tag{75}$$

Les $b_{m,n}$ et les $|a_n|$ sont ≥ 0. Cela permet de passer à la limite dans l'inégalité (75). Comme $\lim_{m\to\infty} b_{m,n} = 1$, on obtient (74).

Corollaire. *Le support de μ est égal à Ω.*

En effet, d'après (73), on a $\mu = \frac{1}{\pi} F\, d\varphi$, avec

$$F = 1 - \sum_{n\geq 1} |a_n| \cos n\varphi, \qquad \sum |a_n| \leq 1.$$

La fonction F n'a qu'*un nombre fini de zéros*: si $\sum |a_n| < 1$, elle n'en a aucun, et si $\sum |a_n| = 1$, il existe un $m \geq 1$ avec $a_m \neq 0$, et F ne peut être nul que si $\cos m\varphi = 1$. Cela montre bien que le support de $F\, d\varphi$ est Ω.

7.2. **Courbes sur $\mathbf{F}_q$: notations.** Dans ce qui suit, $\mathbf{F}_q$ désigne un corps fini à q éléments. Par une *courbe* sur $\mathbf{F}_q$ on entend une courbe projective lisse absolument irréductible sur $\mathbf{F}_q$.

Si C est une telle courbe, on note $g = g(C)$ son *genre*, et $n(C, q^r)$ le *nombre de ses points rationnels* sur une extension de $\mathbf{F}_q$ de degré r ($r = 1, 2, \ldots$). On a

$$n(C, q^r) = 1 + q^r - \sum_{\alpha=1}^{g} (\pi_\alpha^r + \overline{\pi}_\alpha^r), \tag{76}$$

où $(\pi_1, \overline{\pi}_1, \ldots, \pi_g, \overline{\pi}_g)$ sont les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius de C. On posera:

$$x_\alpha = (\pi_\alpha + \overline{\pi}_\alpha)/q^{1/2} \quad \text{pour } \alpha = 1, \ldots, g. \tag{77}$$

D'après Weil, les x_α appartiennent à $\Omega = [-2, +2]$; les angles correspondants $\varphi_1, \ldots, \varphi_g$ sont les "angles de Frobenius". A une permutation près de $(\pi_\alpha, \overline{\pi}_\alpha)$, on a

$$\pi_\alpha = q^{1/2} e^{i\varphi_\alpha} \quad \text{et} \quad \overline{\pi}_\alpha = q^{1/2} e^{-i\varphi_\alpha}. \tag{78}$$

On obtient ainsi une famille $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_g)$ de points de Ω, dont la connaissance équivaut à celle des $n(C, q^r)$. La formule (76) peut s'écrire:

$$n(C, q^r) = 1 + q^r - q^{r/2} \sum_{\alpha=1}^{g} Y_r(x_\alpha),$$

où Y_r est le polynôme défini par (71). Si $g > 0$, et si l'on désigne par $\delta_{\mathbf{x}}$ la mesure sur Ω définie par la famille $\mathbf{x}$, i.e. $\frac{1}{g} \sum \delta_{x_\alpha}$ (cf. n$^{\text{o}}$ 1.1), on a:

$$n(C, q^r)/g = (1 + q^r)/g - q^{r/2} \langle Y_r, \delta_{\mathbf{x}} \rangle. \tag{79}$$

7.3. **Equirépartition des angles de Frobenius.** Soit C_λ une famille de courbes sur $\mathbf{F}_q$ dont les genres g_λ sont > 0 et tendent vers $+\infty$ avec λ. Pour chaque λ, soit $\mathbf{x}_\lambda$ la famille de points de Ω associée à C_λ comme ci-dessus. On s'intéresse à l'équirépartition des $\mathbf{x}_\lambda$ dans Ω pour $\lambda \to \infty$. On a le résultat suivant, dû à Tsfasman [31] et Tsfasman-Vlăduţ [32]:

Théorème 8. 1) *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) *Il existe une mesure μ sur Ω telle que les $\mathbf{x}_\lambda$ soient μ-équirépartis.*
(ii) *Pour tout $r \geq 1$, $n(C_\lambda, q^r)/g_\lambda$ a une limite quand $\lambda \to \infty$.*

2) *Supposons* (i) *et* (ii) *satisfaites, et posons*:

$$\nu_r = \lim_{\lambda \to \infty} n(C_\lambda, q^r)/g_\lambda \quad \textit{pour } r = 1, 2, \ldots . \tag{80}$$

Les coefficients de Fourier de μ sont:

$$a_0(\mu) = 1; \tag{81}$$

$$a_r(\mu) = -q^{-r/2} \nu_r \quad \textit{pour } r \geq 1. \tag{82}$$

On a:

$$\mu = \frac{1}{\pi} F \, d\varphi, \quad \textit{avec } F = 1 - q^{-1/2} \nu_1 \cos\varphi - \cdots - q^{-r/2} \nu_r \cos r\varphi - \cdots , \tag{83}$$

cette série étant normalement convergente. Le support de μ est égal à Ω.

(Dans [31], [32], le cas (i) est appelé "asymptotically exact".)

Si les $\mathbf{x}_\lambda$ sont μ-équirépartis, les $\langle Y_r, \delta_{\mathbf{x}_\lambda} \rangle$ tendent vers $\langle Y_r, \mu \rangle$. Comme $(1+q^r)/g_\lambda$ tend vers 0, la formule (79) montre que

$$n(C_\lambda, q^r)/g_\lambda \to -q^{r/2} \langle Y_r, \mu \rangle,$$

ce qui démontre (i), ainsi que (82). La formule (81) est évidente puisque μ est positive de mesure 1. Inversement, si la limite

$$\nu_r = \lim_{\lambda \to \infty} n(C_\lambda, q^r)/g_\lambda$$

existe pour tout r, le même argument montre que $\langle Y_r, \delta_{\mathbf{x}_\lambda}\rangle$ a une limite pour tout r. Par linéarité, on en déduit que $\lim_{\lambda\to\infty}\langle P, \delta_{\mathbf{x}_\lambda}\rangle$ existe quel que soit le polynôme P. Si l'on note $\mu(P)$ cette limite, on a $\mu(1) = 1$ et $\mu(P) \geq 0$ si P est ≥ 0 sur Ω. On en déduit facilement (cf. e.g. [2], Chap. III, §1, prop. 9) que μ se prolonge par continuité à $C(\Omega; \mathbf{R})$ tout entier. D'où (i). Les autres assertions du théorème résultent de ce qui précède, et de ce qui a été dit au n° 7.1.

Corollaire 1. *Les $x_{\alpha,\lambda}$ associés aux courbes C_λ sont denses dans Ω.*

Supposons qu'il existe un ouvert non vide de Ω ne contenant aucun des $x_{\alpha,\lambda}$ pour λ assez grand. Quitte à remplacer la suite des λ par une sous-suite, on peut supposer que les $\mathbf{x}_\lambda$ sont μ-équirépartis suivant une mesure μ (utiliser la compacité de l'espace des mesures positives de masse 1). D'après le th. 8, le support de μ est égal à Ω, ce qui contredit l'hypothèse faite (cf. n° 1.2).

Corollaire 2. *La dimension maximum des $\mathbf{F}_q$-facteurs simples de* $\mathrm{Jac}(C_\lambda)$ *tend vers $+\infty$ avec λ.*

Cela se déduit du cor. 1 en remarquant que les $x_{\alpha,\lambda}$ dont le degré sur $\mathbf{Q}$ est borné sont en nombre fini (même argument qu'au §6).

Corollaire 3. *A isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de courbes sur $\mathbf{F}_q$ dont la jacobienne est $\mathbf{F}_q$-isogène à un produit de courbes elliptiques.*

En effet, le cor. 2 montre que les genres de ces courbes sont bornés.

Exemple. Prenons $q = 2$, et soit C une courbe de genre g sur $\mathbf{F}_2$ dont la jacobienne soit $\mathbf{F}_2$-isogène à un produit de courbes elliptiques. Les $\pi_\alpha + \overline{\pi}_\alpha$ correspondant à C sont des entiers de valeur absolue $\leq 2\sqrt{2}$; ils sont donc égaux à $-2, -1, 0, 1$ ou 2. On en déduit que $\pi_\alpha^{16} + \overline{\pi}_\alpha^{16}$ est égal à 449 ou à 512. Vu (76), on a donc

$$n(C, 2^{16}) \leq 1 + 2^{16} - 449g,$$

d'où $g \leq 65537/449 < 146$, ce qui fournit une borne explicite (mais sûrement grossière) pour g.

Corollaire 4. *Si les limites ν_r existent, on a*:

$$\sum_{r=1}^{\infty} q^{-r/2}\nu_r \leq 1. \tag{84}$$

Cela résulte de la prop. 5.

Remarque. Il y a intérêt à énoncer autrement l'inégalité (84). Si C est une courbe sur $\mathbf{F}_q$, notons $n^\circ(C, q^r)$ le nombre des points de C qui sont rationnels sur $\mathbf{F}_{q^r}$ mais pas sur un sous-corps propre de $\mathbf{F}_{q^r}$. On a:

$$n(C, q^r) = \sum_{s|r} n_s^\circ(C, q^s). \tag{85}$$

Notons ν_r° la limite des $n^\circ(C_\lambda, q^r)/g_\lambda$, si elle existe (ce qui est le cas si les ν_r existent). On a

$$\nu_r = \sum_{s|r} \nu_s^\circ.$$

En portant dans (84), et en regroupant les termes, on obtient:

$$\sum_s \nu_s^\circ/(q^{s/2}-1) \leq 1, \tag{86}$$

cf. [26], th. 3 et [31], cor. 1 au th. 2. En remplaçant la somme de gauche par son premier terme, on retrouve l'inégalité de Drinfeld-Vlăduţ:

$$\nu_1 \leq q^{1/2}-1. \tag{87}$$

Corollaire 5. *Pour que les* $\mathbf{x}_\lambda$ *soient équirépartis suivant la mesure* $\mu_1 = \frac{1}{\pi}\, d\varphi$, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\lim_{\lambda\to\infty} n(C_\lambda, q^r)/g_\lambda = 0 \quad \textit{pour tout } r \geq 1. \tag{88}$$

Cela résulte du fait que les coefficients de Fourier $a_r(\mu_1)$ sont égaux à 0 pour $r \geq 1$.

Remarque. Ainsi, l'équirépartition des angles de Frobenius suivant la mesure "naturelle" $\frac{1}{\pi}\, d\varphi$ équivaut à dire que les C_λ ont "peu" de points sur les extensions $\mathbf{F}_{q^r}$ de $\mathbf{F}_q$. Noter que c'est le cas lorsque les C_λ sont contenues dans un espace projectif $\mathbf{P}_N$ fixé, car les entiers $N(C_\lambda, q^r)$ sont alors bornés, et leur quotient par g_λ tend vers 0.

Corollaire 6. *Pour que les* $\mathbf{x}_\lambda$ *soient équirépartis suivant la mesure* μ_q *du* n° 2.3, *il faut et il suffit que l'on ait*:

$$\lim_{\lambda\to\infty} n(C_\lambda, q^r)/g_\lambda = \begin{cases} q-1 & \textit{si } r \textit{ est pair,} \\ 0 & \textit{si } r \textit{ est impair.} \end{cases} \tag{89}$$

D'après (20) et (71), on a:

$$a_r(\mu_q) = \begin{cases} -(q-1)q^{-r/2} & \text{si } r \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases} \tag{90}$$

D'où le corollaire, vu le th. 8.

Remarque. Avec les notations de (85) et (86), on peut reformuler (89) comme:

$$\nu_r^\circ = \begin{cases} q-1 & \text{si } r=2, \\ 0 & \text{si } r \neq 2. \end{cases} \tag{91}$$

Autrement dit, les courbes C_λ ont "beaucoup" de points sur $\mathbf{F}_{q^2}$ (asymptotiquement, autant que le permet la borne de Drinfeld-Vlăduţ) et "peu" de points sur les autres $\mathbf{F}_{q^r}$, à part ceux provenant de l'inclusion $\mathbf{F}_{q^2} \to \mathbf{F}_{q^r}$ pour r pair.

(Noter que l'égalité $\nu_2^\circ = q-1$ suffit à elle seule à entraîner (91); cela se déduit de (86).)

7.4. **Interprétation en termes de fonctions zêta.** Reprenons les notations du n° 7.2. La *fonction zêta* de la courbe C est donnée par:

$$Z(C,t) = \exp\Big(\sum_{r=1}^{\infty} n(C,q^r)t^r/r\Big) = \frac{\prod(1-\pi_\alpha t)(1-\overline{\pi}_\alpha t)}{(1-t)(1-qt)}. \tag{92}$$

On peut définir $Z(C,t)^{1/g}$ comme une *série formelle* à coefficients dans $\mathbf{Q}$:

$$Z(C,t)^{1/g} = \exp\Big(\frac{1}{g}\sum_{r=1}^{\infty} n(C,q^r)t^r/r\Big).$$

On démontre sans difficulté (cf. [32]):

Théorème 8′. *Pour que les propriétés* (i) *et* (ii) *du th.* 8 *soient satisfaites, il faut et il suffit que, pour $\lambda \to \infty$, la série $Z(C_\lambda, t)^{1/g_\lambda}$ ait une limite dans $\mathbf{R}[[t]]$ muni de la topologie de la convergence simple des coefficients.*

Si c'est le cas, on a:

$$\lim_{\lambda\to\infty} Z(C_\lambda, t)^{1/g_\lambda} = \exp(\sum_{r=1}^{\infty} \nu_r t^r/r) = 1/\prod_{r=1}^{\infty}(1-t^r)^{\nu_r^\circ/r}, \tag{93}$$

où $\nu_r = \lim n(C_\lambda, q^r)/g_\lambda$ et $\nu_r^\circ = \lim n^\circ(C_\lambda, q^r)/g_\lambda$, cf. n° 7.3.

En particulier, la série $z(t) = \lim Z(C_\lambda, t)^{1/g_\lambda}$ détermine la mesure μ associée aux C_λ, et inversement.

Exemples. 1) Le cas du cor. 5 au th. 8 ($\mu = \mu_1$) correspond à $\nu_r = 0$ pour tout r d'où $z(t) = 1$.

2) Le cas du cor. 6 au th. 8 ($\mu = \mu_q$) correspond à $\nu_r^\circ = 0$ pour $r \neq 2$ et $\nu_2^\circ = q-1$. D'où, d'après (93): $z(t) = 1/(1-t^2)^{(q-1)/2}$.

Nombre de points des jacobiennes des C_λ. Soit h_λ le nombre de points $\mathbf{F}_q$-rationnels de la jacobienne de C_λ. On a $h_\lambda = q^{g_\lambda}\prod(1-1/\pi_{\alpha,\lambda})(1-1/\overline{\pi}_{\alpha,\lambda})$ où les $\pi_{\alpha,\lambda}$ et $\overline{\pi}_{\alpha,\lambda}$ sont les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius associé à C_λ. On déduit facilement de là (cf. [31]):

Théorème 8″. *Si les propriétés* (i) *et* (ii) *du th.* 8 *sont satisfaites, on a*:

$$\lim_{\lambda\to\infty} h_\lambda^{1/g_\lambda} = q.z(q^{-1}) = q.\exp(\sum_{r=1}^{\infty}\nu_r q^{-r}/r).$$

Cette formule montre en particulier que $\lim h_\lambda^{1/g_\lambda}$ est $\geq q$, et qu'il y a égalité dans le cas du cor. 5 au th. 8, et seulement dans ce cas.

7.5. **Exemple: les courbes modulaires $X_0(N)$.** On suppose maintenant que q est égal à un nombre premier p. Si N est un entier ≥ 1 premier à p, la courbe modulaire $X_0(N)$ a bonne réduction en p (cf. Igusa [13]), et définit donc une courbe sur $\mathbf{F}_q$, que nous noterons encore $X_0(N)$. Le genre $g_0(N)$ de cette courbe est égal à la dimension de l'espace vectoriel noté $S(N,2)$ au n° 3.1. De plus, les $\pi_\alpha + \overline{\pi}_\alpha$ associés (cf. n° 7.1) coïncident, d'après Eichler-Shimura (complété par Igusa, *loc. cit.*) avec les valeurs propres de l'opérateur de Hecke $T_p = T_p(N,2)$. D'après le th. 1, ces valeurs propres, divisées par $p^{1/2}$, sont équiréparties dans Ω suivant la mesure μ_p. Vu le cor. 6 au th. 8, ceci entraîne:

Théorème 9. *On a*

$$\lim n(X_0(N), p^r)/g_0(N) = \begin{cases} p-1 & \textit{si } r \textit{ est pair}, \\ 0 & \textit{si } r \textit{ est impair}, \end{cases} \tag{94}$$

la limite étant prise pour $N \to \infty$, N premier à p (r et p fixés).

Remarques. 1) On peut aussi déduire (92) directement des majorations du §4, combinées avec la formule suivante (qui se déduit par exemple de (30) et (79)):

$$n(X_0(N), p^r) = 1 + p^r - \operatorname{Tr} T_{p^r} + p.\operatorname{Tr} T_{p^{r-2}}. \tag{95}$$

2) Un résultat analogue au th. 9 (mais valable pour des courbes modulaires différentes) se trouve déjà dans une note de Ihara [15]. Comme le montre Ihara,

"la plupart" des points $\mathbf{F}_{p^r}$-rationnels de $X_0(N)$ sont des points *supersinguliers*. Si l'on note $X_0(N)^{\mathrm{ord}}$ la courbe affine obtenue en enlevant ces points, on peut récrire (94) sous la forme plus simple:

$$\lim n(X_0(N)^{\mathrm{ord}}, p^r)/g_0(N) = 0 \quad \text{pour tout } r \geq 1. \tag{96}$$

§8. Equirépartition des valeurs propres des matrices d'incidence des graphes réguliers finis

Dans ce qui suit, q est un entier fixé ≥ 1.

8.1. Graphes réguliers de valence $q+1$.

Notations (cf. [25], Chap. I, n° 2.1). Un *graphe* E est formé de deux ensembles, l'ensemble $\mathrm{som}\, E$ de ses *sommets*, et l'ensemble $\mathrm{ar}\, E$ de ses *arêtes*, ces ensembles étant munis de l'application "origine" $o : \mathrm{ar}\, E \to \mathrm{som}\, E$, et de l'application "inverse" $\mathrm{ar}\, E \to \mathrm{ar}\, E$, notée $y \mapsto \overline{y}$. On suppose que $\overline{\overline{y}} = y$ et $\overline{y} \neq y$ pour tout $y \in \mathrm{ar}\, E$. On pose $t(y) = o(\overline{y})$; c'est *l'extrémité* de l'arête y.

On note $|E|$ le nombre d'éléments de $\mathrm{som}\, E$.

On dit que E est *régulier de valence* $q+1$ si, pour tout $x \in \mathrm{som}\, E$, l'ensemble des arêtes d'origine x a $q+1$ éléments.

Tous les graphes considérés par la suite sont supposés réguliers de valence $q+1$, finis, et non vides (mais pas nécessairement connexes).

Chemins et circuits. Soit r un entier ≥ 1. Un *chemin de longueur* r dans E est une suite

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_r)$$

de r arêtes $y_i \in \mathrm{ar}\, E$ telle que $t(y_i) = o(y_{i+1})$ pour $1 \leq i < r$. L'origine $o(\mathbf{y})$ de $\mathbf{y}$ est $o(y_1)$; son extrémité $t(\mathbf{y})$ est $t(y_r)$. Un chemin est dit *fermé* si son origine est égale à son extrémité.

On dit que $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_r)$ est *sans aller-retour* si $y_{i+1} \neq \overline{y}_i$ pour $1 \leq i < r$. On dit que $\mathbf{y}$ est un *circuit* s'il est fermé, sans aller-retour, et si $y_r \neq \overline{y}_1$ (i.e. si $y_{i+1} \neq \overline{y}_i$ pour tout $i \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$).

Le *composé* $\mathbf{y}.\mathbf{y}'$ de deux chemins $\mathbf{y}$ et $\mathbf{y}'$ tels que $t(\mathbf{y}) = o(\mathbf{y}')$ se définit de façon évidente. En particulier, on peut parler des *puissances* $\mathbf{z}^s$ $(s = 1, 2, \ldots)$ d'un chemin fermé $\mathbf{z}$.

Un circuit $\mathbf{y}$ est dit *primitif* s'il n'est égal à aucun $\mathbf{z}^s$, avec $s > 1$. Tout circuit s'écrit de façon unique comme puissance d'un circuit primitif.

Nombres de circuits. Notons f_r le nombre des chemins fermés sans aller-retour de longueur r, et c_r (resp. c_r°) le nombre des circuits (resp. circuits primitifs) de longueur r. Il est clair que:

$$c_r = \sum_{s|r} c_s^\circ. \tag{97}$$

On a d'autre part:

$$f_r - c_r = \sum_{1 \leq i < r/2} (q-1)q^{i-1} c_{r-2i} = (q-1)c_{r-2} + (q-1)qc_{r-4} + \cdots . \tag{98}$$

Cette formule se démontre en remarquant que tout chemin fermé sans aller-retour $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_r)$, qui n'est pas un circuit, s'écrit $y_1.\mathbf{z}.\overline{y}_1$, où $\mathbf{z} = (y_2, \ldots, y_{r-1})$ est un chemin fermé sans aller-retour de longueur $r-2$. Pour $\mathbf{z}$ fixé, il y a $q-1$ choix possibles de y_1 si $\mathbf{z}$ est un circuit (car y_1 doit être distinct de $\overline{y}_2$ et de y_{r-1}); il y a q choix possibles si $\mathbf{z}$ n'est pas un circuit (car y_1 doit être distinct de $\overline{y}_2 = y_{r-1}$). D'où:

$$f_r - c_r = (q-1)c_{r-2} + q(f_{r-2} - c_{r-2}),$$

et l'on en déduit (98) en raisonnant par récurrence sur r.

Remarque. Supposons E connexe, et soit $\widetilde{E}$ son revêtement universel, relativement à un point-base $x \in \operatorname{som} E$. Le graphe $\widetilde{E}$ est un *arbre* régulier de valence $q+1$, et l'on peut écrire E sous la forme $\widetilde{E}/\Gamma_E$, où $\Gamma_E = \pi_1(E, x)$ est un sous-groupe discret sans torsion de $\operatorname{Aut}(\widetilde{E})$. Les définitions ci-dessus (ainsi que celles données plus loin) peuvent se traduire en termes de Γ_E; c'est le point de vue de Ihara [14]; voir aussi [11] et [16].

8.2. **Les opérateurs T et Θ_r.** Soit E comme ci-dessus. On note C_E le groupe des 0-*chaînes* de E, i.e. le $\mathbf{Z}$-module des fonctions sur $\operatorname{som} E$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$. Si $x \in \operatorname{som} E$, on note e_x la fonction égale à 1 en x et à 0 ailleurs; les e_x forment une base de C_E.

L'opérateur T. Soit T l'endomorphisme de C_E défini par:

$$T(e_x) = \sum_{o(y)=x} e_{t(y)}. \tag{99}$$

Vu comme *correspondance* sur $\operatorname{som} E, T$ transforme un sommet en la somme des sommets voisins; il joue un rôle analogue à celui de l'opérateur de Hecke T_p. La matrice de T par rapport à la base des e_x est appelée la *matrice d'incidence* de E. On s'intéresse à la distribution de ses valeurs propres dans $\mathbf{R}$.

Les opérateurs Θ_r. La définition de T se généralise de la façon suivante: pour tout $r \geq 1$ on définit $\Theta_r \in \operatorname{End}(C_E)$ par:

$$\Theta_r(e_x) = \sum_{\mathbf{y}} e_{t(\mathbf{y})}, \tag{100}$$

où la somme porte sur les chemins sans aller-retour $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_r)$ d'origine x et de longueur r. Il est clair que l'on a $\Theta_1 = T$.

On complète cette définition en posant $\Theta_0 = 1$.

Expression des Θ_r en fonction de T. Les Θ_r s'écrivent comme des *polynômes* en T:

$$\Theta_0 = 1,\ \Theta_1 = T,\ \Theta_2 = T^2 - (q+1),\ \Theta_3 = T^3 - (2q+1)T, \ldots,$$

cf. [24], Chap. II, n° 1.1, exerc. 3. L'une des façons de le voir consiste à démontrer la formule:

$$T\Theta_r = \Theta_{r+1} + \begin{cases} q+1 & \text{si } r = 1, \\ q\Theta_{r-1} & \text{si } r > 1. \end{cases} \tag{101}$$

On en déduit la série génératrice:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \Theta_r t^r = \frac{1-t^2}{1-tT+qt^2}. \tag{102}$$

Si l'on pose:

$$T' = T/q^{1/2} \quad \text{et} \quad \Theta'_r = \Theta_r/q^{r/2}, \tag{103}$$

la formule (102) se récrit:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \Theta'_r t^r = \frac{1 - t^2/q}{1 - tT + t^2}. \tag{104}$$

En comparant avec la formule (23), on en déduit

$$\Theta'_r = X_{r,q}(T'), \tag{105}$$

où $X_{r,q} = X_r - q^{-1}X_{r-2}$ est le polynôme défini au n° 2.3.

Autrement dit:

$$\Theta_r = q^{r/2} X_{r,q}(T/q^{1/2}). \tag{106}$$

Trace de Θ_r. Si $r \geq 1$, il est clair que $\operatorname{Tr}\Theta_r = f_r$, où f_r est le nombre des chemins fermés sans aller-retour de longueur r. D'où, d'après (98):

$$\operatorname{Tr}\Theta_r = c_r + \sum_{1 \leq i < r/2} (q-1) q^{i-1} c_{r-2i} \qquad (r \geq 1). \tag{107}$$

Ainsi, la connaissance des $\operatorname{Tr}\Theta_r$, pour $r = 1, 2, \ldots$, équivaut à celle des c_r. Vu (105), il en résulte que, pour tout polynôme P, la trace de $P(T')$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des c_r et de $|E| = \operatorname{Tr} 1$. Nous aurons besoin pour la suite du cas particulier où P est l'un des polynômes $Y_r = X_r - X_{r-2}$ du n° 7.1:

Lemme 3. *Si* $r \geq 1$*, on a*:

$$\operatorname{Tr} Y_r(T') = c_r q^{-r/2} - \begin{cases} (q-1)q^{-r/2}|E| & \textit{si } r \textit{ est pair}, \\ 0 & \textit{si } r \textit{ est impair}. \end{cases} \tag{108}$$

On tire de (106) et (107):

$$q^{r/2} \operatorname{Tr} X_{r,q}(T') = \begin{cases} |E| & \text{si } r = 0, \\ c_r + \sum_{1 \leq i < r/2} (q-1) q^{i-1} c_{r-2i} & \text{si } r > 0. \end{cases} \tag{109}$$

Comme $X_{r,q} = X_r - q^{-1}X_{r-2}$, on en déduit par récurrence sur r:

$$q^{r/2} \operatorname{Tr} X_r(T') = \sum_{0 \leq i < r/2} q^i c_{r-2i} + \begin{cases} |E| & \text{si } r \text{ est pair}, \\ 0 & \text{si } r \text{ est impair}. \end{cases} \tag{110}$$

En utilisant le fait que $Y_r = X_r - X_{r-2}$, on obtient (108).

8.3. **Equirépartition des valeurs propres de T'.** Soit (E_λ) une famille de graphes du type ci-dessus (i.e. finis, non vides et réguliers de valence $q+1$). Notons $c_{r,\lambda}$ (resp. $c^{\circ}_{r,\lambda}$) le nombre de circuits (resp. de circuits primitifs) de E_λ de longueur r, cf. n° 8.1.

Pour chaque λ, la matrice d'incidence T_λ de E_λ est une matrice symétrique dont les coefficients sont ≥ 0 et de somme $q+1$ (sur chaque ligne). Il en résulte que les valeurs propres de T_λ sont réelles et de valeur absolue $\leq q+1$. On s'intéresse à la répartition de ces valeurs propres (noter que $q+1$ est une telle valeur propre—sa multiplicité est égale au nombre de composantes connexes de E_λ).

Comme dans les §§ précédents, il est commode de diviser T_λ par $q^{1/2}$, cf. (103), ce qui donne une matrice T'_λ dont les valeurs propres appartiennent à l'intervalle:

$$\Omega_q = [-\omega_q, +\omega_q] \quad \text{où } \omega_q = q^{1/2} + q^{-1/2}. \tag{111}$$

Cet intervalle *contient* l'intervalle $\Omega = [-2, +2]$ utilisé jusqu'à présent. En particulier, toute mesure sur Ω s'identifie à une mesure sur Ω_q à support contenu dans Ω.

Notons $\mathbf{x}_\lambda$ la famille des valeurs propres de T'_λ, vue comme famille de points de l'espace Ω_q, cf. n° 1.1.

Théorème 10. 1) *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) *Il existe une mesure μ sur Ω_q telle que les $\mathbf{x}_\lambda$ soient μ-équirépartis.*

(ii) *Pour tout $r \geq 1$, $c_{r,\lambda}/|E_\lambda|$ a une limite quand $\lambda \to \infty$.*

2) *Supposons* (i) *et* (ii) *satisfaites, et posons*:

$$\gamma_r = \lim_{\lambda\to\infty} c_{r,\lambda}/|E_\lambda| \quad \textit{pour } r = 1, 2, \dots . \tag{112}$$

On a alors $\mu = \mu_q + \nu$, où μ_q est la mesure sur Ω définie au n° 2.3*, et ν est une mesure sur Ω_q, caractérisée par*:

$$\langle Y_r, \nu\rangle = \begin{cases} 0 & \textit{si } r = 0, \\ \gamma_r q^{-r/2} & \textit{si } r > 0. \end{cases} \tag{113}$$

(Précisons que $Y_r = X_r - X_{r-2}$, cf. n° 7.1, et que $\langle Y_r, \nu\rangle = \int_{-\omega_q}^{\omega_q} Y_r(x)\nu(x)$: l'intégrale porte sur l'intervalle Ω_q tout entier.)

Comme au n° 1.1, notons $\delta_{\mathbf{x}_\lambda}$ la mesure discrète sur Ω_q définie par la famille $\mathbf{x}_\lambda$. D'après (108) on a

$$\langle Y_r, \delta_{\mathbf{x}_\lambda}\rangle = q^{-r/2} c_{r,\lambda}/|E_\lambda| - \begin{cases} (q-1)q^{-r/2} & \text{si } r \text{ est pair } > 0, \\ 0 & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases} \tag{114}$$

Si les $\delta_{\mathbf{x}_\lambda}$ tendent vers une mesure μ, la formule (114) montre que les $c_{r,\lambda}/|E_\lambda|$ ont une limite, et, si γ_r désigne cette limite, on a:

$$\langle Y_r, \mu\rangle = \gamma_r q^{-r/2} - \begin{cases} (q-1)q^{-r/2} & \text{si } r \text{ est pair } > 0, \\ 0 & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases} \tag{115}$$

Vu (90), ceci peut se récrire:

$$\langle Y_r, \mu\rangle = \gamma_r q^{-r/2} + \langle Y_r, \mu_q\rangle \quad \text{pour } r = 1, 2, \dots . \tag{116}$$

On en déduit que la mesure $\nu = \mu - \mu_q$ satisfait à (113).

Inversement, si les $c_{r,\lambda}/|E_\lambda|$ ont une limite pour tout $r > 0$, le même argument que celui employé pour le th. 8 montre que les mesures $\delta_{\mathbf{x}_\lambda}$ ont une limite.

Remarques. 1) Un autre façon de caractériser μ est de dire que l'on a:

$$\langle X_r, \mu\rangle = \sum_{0\leq i<r/2} \gamma_{r-2i} q^{i-r/2} + \begin{cases} q^{-r/2} & \text{si } r \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases}$$

Cela résulte de (110).

2) En général, le support de μ *n'est pas contenu dans* Ω; il peut même contenir les extrémités ω_q et $-\omega_q$ de Ω_q.

En fait, on a $\mathrm{Supp}(\mu) \subset \Omega$ si et seulement si $\gamma_r = O(q^{r/2})$ pour $r \to \infty$; cela se déduit facilement de [2], formule (13), p. 213 (cette référence m'a été indiquée par P. Cartier).

3) Le fait que $\langle X_r, \mu\rangle$ soit ≥ 0 pour tout r entraîne le résultat (bien connu) suivant: le support de μ *rencontre l'intervalle* $[2, \omega_q]$.

Corollaire 1. *Si les limites γ_r existent, et si $\sum_{r=1}^{\infty} \gamma_r q^{-r/2} < \infty$, la mesure μ est portée par Ω, et a une densité continue par rapport à la mesure $\mu_1 = \frac{1}{\pi}\, d\varphi$.*

(Autrement dit, s'il n'y a "pas trop" de circuits, les graphes E_λ se comportent asymptotiquement comme des "graphes de Ramanujan", au sens de [16], [17].)

En effet, d'après ce qui a été au dit au n° 7.1, il existe une mesure ν_0 portée par Ω telle que $\langle 1, \nu_0\rangle = 0$ et $\langle Y_r, \nu_0\rangle = \gamma_r q^{-r/2}$ pour $r \geq 1$; il suffit de prendre $\nu_0 = F.\mu_1$, avec

$$F = \sum_{r=1}^{\infty} \gamma_r q^{-r/2} \cos r\varphi.$$

Puisque $\langle Y_r, \nu_0\rangle = \langle Y_r, \nu\rangle$ pour tout $r \geq 0$, on a $\nu = \nu_0$, ce qui démontre le corollaire.

Remarque. Les hypothèses du cor. 1 entraînent que tout point de Ω_q est de mesure nulle pour μ. On en déduit, comme dans les §§ précédents, que *le maximum des degrés sur* $\mathbf{Q}$ *des valeurs propres de* T_λ *tend vers l'infini avec* λ.

Le cas où les γ_r sont nuls conduit au résultat suivant (déjà obtenu par B. D. McKay [19], comme me l'a fait observer W. Li):

Corollaire 2. *Pour que les $\mathbf{x}_\lambda$ soient équirépartis suivant la mesure μ_q* (*de support* Ω)*, il faut et il suffit que $\gamma_r = 0$ pour tout $r \geq 1$, autrement dit que*:

$$\lim_{\lambda\to\infty} c_{r,\lambda}/|E_\lambda| = 0 \quad \textit{pour } r = 1, 2, \ldots . \tag{117}$$

(C'est le cas où il y a "très peu" de circuits.)

Remarque. La condition (117) est notamment vérifiée si, pour tout r, on a $c_{r,\lambda} = 0$ pour λ assez grand, autrement dit, si le *calibre* ("girth") de E_λ tend vers l'infini avec λ. C'est le cas traité dans [16] et [17].

8.4. **Interprétation en termes de fonctions zêta de Ihara.** Reprenons les notations des n$^{\text{os}}$ 8.1 et 8.2. La *fonction zêta* de Ihara du graphe E est la série formelle définie par:

$$Z(E,t) = \exp\Big(\sum_{r=1}^{\infty} c_r t^r/r\Big) = 1/\prod_{r=1}^{\infty}(1-t^r)^{c_r^\circ/r}. \tag{118}$$

C'est une fonction rationnelle de t. De façon plus précise, on a la formule suivante (cf. [11], [14]), qui se déduit par exemple de (108):

$$Z(E,t) = (1-t^2)^{-g(E)} \det(1 - tT + qt^2)^{-1}, \tag{119}$$

où $g(E) = \frac{1}{2}(q-1)|E|$ est l'opposé de la caractéristique d'Euler-Poincaré de E.

Comme au n° 7.4, on a:

Théorème 10′. *Pour que la famille de graphes* (E_λ) *possède les propriétés* (i) *et* (ii) *du th.* 10*, il faut et il suffit que la série formelle $Z(E_\lambda, t)^{1/|E_\lambda|}$ ait une limite dans* $\mathbf{R}[[t]]$.

De plus, cette limite est égale à $1/\prod_{r=1}^{\infty}(1-t^r)^{\gamma_r^\circ/r}$, où $\gamma_r^\circ = \lim c_{r,\lambda}^\circ/|E_\lambda|$.

Exemple. Le cas du cor. 2 au th. 10 (i.e. $\mu = \mu_q$) correspond à:

$$\lim Z(E_\lambda, t)^{1/|E_\lambda|} = 1.$$

8.5. **Exemple: graphes de Brandt.** Soient p et N deux nombres premiers. Faisons les hypothèses:

$$N \equiv 1 \pmod{12}, \tag{120}$$

$$\left(\frac{p}{N}\right) = 1. \tag{121}$$

On associe à ces données un *graphe* $E(N,p)$ de la manière suivante (cf. [11], [20]):

les *sommets* de ce graphe sont les courbes elliptiques supersingulières en caractéristique N, à isomorphisme près (noter que, d'après (120), le groupe d'automorphismes d'une telle courbe est $\{\pm 1\}$);

les *arêtes* sont les isogénies de degré p entre deux telles courbes, à isomorphisme près.

On définit de façon évidente l'origine et l'extrémité d'une arête y, ainsi que l'arête $\overline{y}$ inverse de y (transposition). Les conditions (120) et (121) assurent que l'on obtient bien ainsi un graphe (en particulier que $\overline{y} \neq y$ pour toute arête y) et que ce graphe est régulier de valence $q+1$. La matrice d'incidence correspondante est essentiellement *la matrice de Brandt* associée à (N,p). On a

$$|E(N,p)| = (N-1)/12 = g_0(N) + 1, \tag{122}$$

où $g_0(N)$ est le genre de la courbe modulaire $X_0(N)$. De plus, les valeurs propres de T sont (cf. [20]):

$$p+1, \quad \text{avec multiplicité } 1,$$

les valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p agissant sur $S(N,2)$,

cf. n$^\text{o}$ 3.1.

De là, et du th. 1 (ou d'un calcul direct), résulte:

Théorème 11. *Pour p fixé et N premier $\to \infty$* (satisfaisant à (120) et (121))*, la famille de graphes $E(N,p)$ jouit des propriétés du cor.* 2 *au th.* 10*, avec $q = p$.*

Remarque. On pourrait se débarrasser des conditions (120) et (121) en *rigidifiant* la situation par des données supplémentaires.

Bibliographie

[1] A. O. L. Atkin et J. Lehner, *Hecke operators on* $\Gamma_0(m)$, Math. Ann. **185** (1970), 134–160. MR **42:**3022

[2] N. Bourbaki, *Intégration*, chap. I–IV, 2° édition, Hermann, Paris, 1965. MR **36:**2763

[3] A. Brumer, *The rank of* $J_0(N)$, Astérisque **228** (1995), 41–68. MR **96f:**11083

[4] P. Cartier, *Harmonic analysis on trees*, A.M.S. Proc. Sympos. Pure Math. **26** (1973), 419–424. MR **49:**3038

[5] H. Cohen, *Trace des opérateurs de Hecke sur* $\Gamma_0(N)$, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux 1976–1977, exposé 4. MR **58:**27771

[6] H. Cohen, *Sur les N tels que $J_0(N)$ soit* **Q***-isogène à un produit de courbes ellliptiques*, Bordeaux, 1994.

[7] D. A. Cox et W. R. Parry, *Genera of congruence subgroups in* **Q***-quaternion algebras*, J. Crelle **351** (1984), 66–112. MR **85i:**11029

[8] T. Ekedahl et J.-P. Serre, *Exemples de courbes algébriques à jacobienne complètement décomposable*, C. R. Acad. Sci. Paris **317** (1993), 509–513. MR **94j:**14029

[9] J.-H. Evertse et J. H. Silverman, *Uniform bounds for the number of solutions to* $Y^n = f(X)$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **100** (1986), 237–248. MR **87k:**11034

[10] G. Hardy et E. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3° édition, Oxford, 1954. MR **16:**673c

[11] K. Hashimoto, *Zeta functions of finite graphs and representations of p-adic groups*, Adv. Studies in Pure Math., vol. 15, Kinokuniya Company Ltd. et Acad. Press, Tokyo, 1989, pp. 211–280. MR **91i:**11057

[12] M. N. Huxley, *A note on polynomial congruences*, Recent Progress in Analytic Number Theory (Durham, 1979), Academic Press, 1981, pp. 193–196. MR **83e:**10005

[13] J. Igusa, *Kroneckerian model of fields of elliptic modular functions*, Amer. J. Math. **81** (1959), 561–577. MR **21:**7214

[14] Y. Ihara, *On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 219–235. MR **36:**6511

[15] Y. Ihara, *Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields*, J. Fac. Sci. Tokyo **28** (1982), 721–724. MR **84c:**14016

[16] A. Lubotzky, *Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures*, Progress in Math., vol. 125, Birkhäuser Verlag, 1994. MR **96g:**22018

[17] A. Lubotzky, R. Phillips et P. Sarnak, *Ramanujan graphs*, Combinatorica **8** (1988), 261–277. MR **89m:**05099

[18] F. I. Mautner, *Spherical functions over p-adic fields* I, Amer. J. Math. **80** (1958), 441–457; II, *ibid.*, **86** (1964), 171–200. MR **20:**82; MR **29:**3582

[19] B. D. McKay, *The expected eigenvalue distribution of a large regular graph*, Linear Algebra and its Applications **40** (1981), 203–216. MR **84h:**05089

[20] J-F. Mestre, *La méthode des graphes. Exemples et applications*, Taniguchi Symp., Kyoto (1986), pp. 217–242. MR **88e:**11025

[21] K. Ribet, *Twists of modular forms and endomorphisms of abelian varieties*, Math. Ann. **253** (1980), 43–62. MR **82e:**10043

[22] J. Rohlfs et B. Speh, *On limit multiplicities of representations with cohomology in the cuspidal spectrum*, Duke Math. J. **55** (1987), 199–212. MR **88k:**22010

[23] G. Savin, *Limit multiplicities of cusp forms*, Invent. Math. **95** (1989), 149–159. MR **90c:**22035

[24] R. Schoof et M. van der Vlugt, *Hecke operators and weight distribution of certain codes*, J. Combinatorial Theory, série A, **57** (1991), 163–186. MR **92g:**94017

[25] J-P. Serre, *Arbres, Amalgames*, $\mathbf{SL}_2$, Astérisque **46**, S.M.F., 1977 (trad. anglaise: *Trees*, Springer-Verlag, 1980). MR **57:**16426

[26] J-P. Serre, *Sur le nombre des points rationnels d'une courbe algébrique sur un corps fini*, C. R. Acad. Sci. Paris **296** (1983), 397–402 (= *Oe.* 128). MR **85b:**14027

[27] F. Shahidi, *Symmetric power L-functions for* $\mathbf{GL}(2)$, C.R.M. Proc., vol. 4, A.M.S., 1994, pp. 159–182. MR **95c:**11066

[28] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanomi Shoten et Princeton University Press, Princeton, 1971. MR **47:**3318

[29] G. Shimura, *On the factors of the jacobian variety of a modular function field*, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 523–544. MR **47:**6709

[30] A. J. Silberger, $\mathbf{PGL}_2$ *over the p-adics*: *its representations, spherical functions and Fourier analysis*, Lect. Notes in Math., vol. 166, Springer-Verlag, 1970. MR **44:**2891

[31] M. A. Tsfasman, *Some remarks on the asymptotic number of points*, Lect. Notes in Math., vol. 1518, Springer-Verlag, 1992, pp. 178–192. MR **93h:**11064

[32] M. A. Tsfasman et S. G. Vlăduţ, *Asymptotic properties of zeta functions*, Prépubl. de l'I.M.L., n° 96-12, C.N.R.S., Marseille (1996).

Collège de France, 3 rue d'Ulm, F-75231 Paris Cedex 05, France
E-mail address: `serre@dmi.ens.fr`