

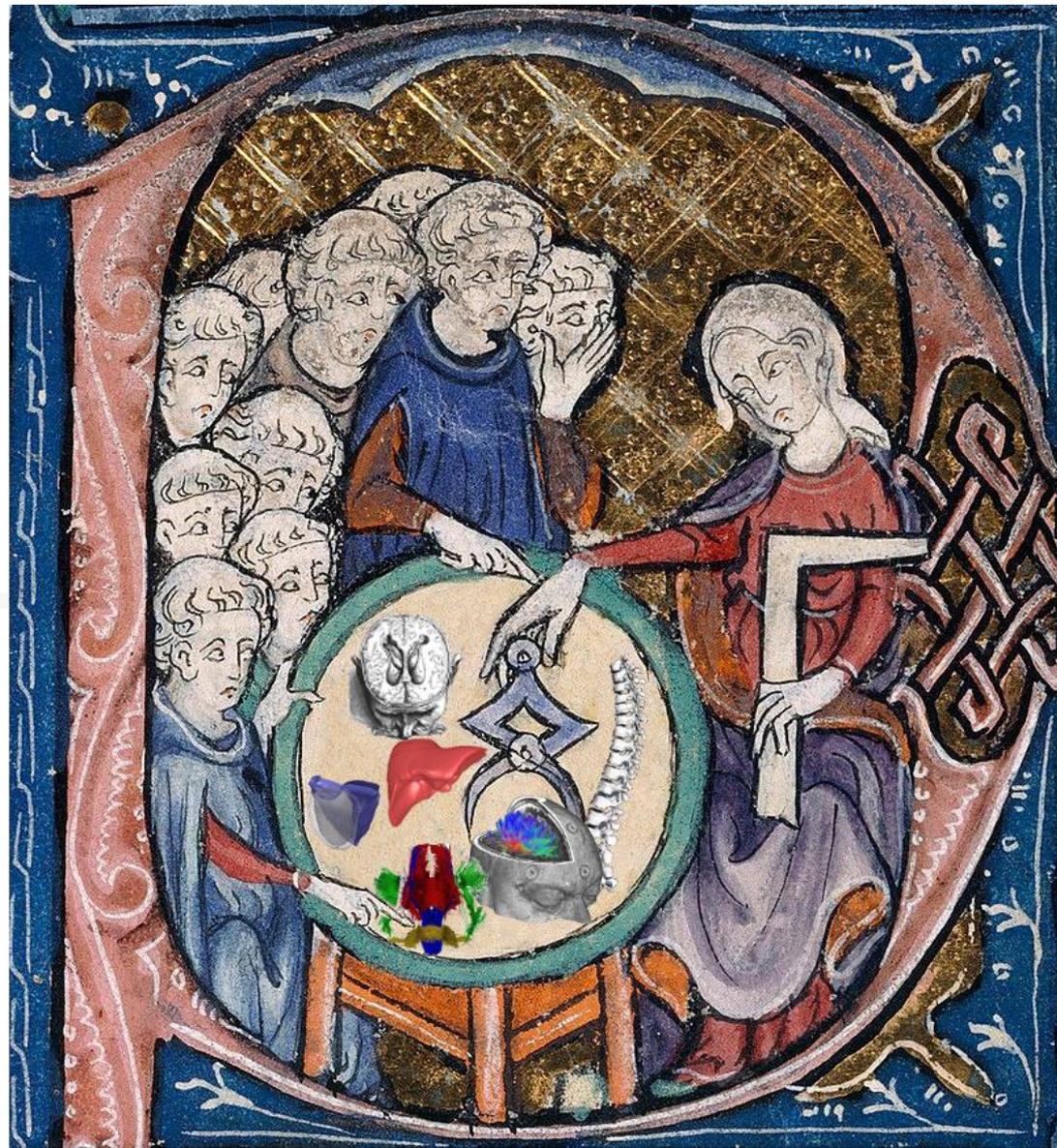
# Xavier Pennec

Asclepios team,  
INRIA Sophia-Antipolis  
Méditerranée, France

Statistiques de formes  
et variétés anatomiques

Collège de France

13 mai 2014



COLLÈGE  
DE FRANCE  
— 1530 —

Le patient numérique personnalisé  
Images, médecine et informatique

informatics mathematics  
*inria*

# Anatomie, géométrie et statistiques

## Anatomie (Larousse) :

- Science qui a pour objet l'étude de la **forme et de la structure** des êtres organisés, et celle **des rapports des organes** qui les constituent.

## Géométrie (Larousse) :

- Pour Euclide, science des **figures de l'espace** ;
- pour F. Klein (programme d'Erlangen), étude des **invariants d'un groupe de transformations** de l'espace.

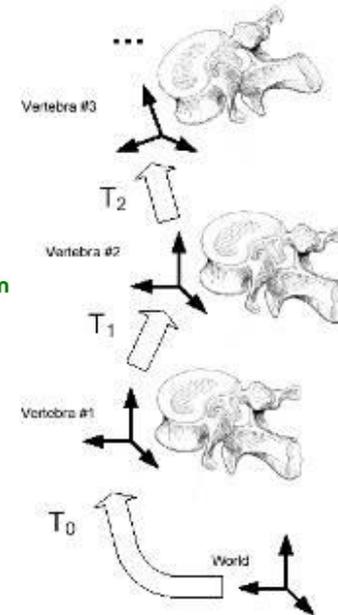
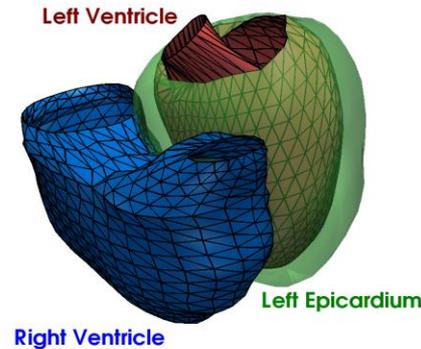
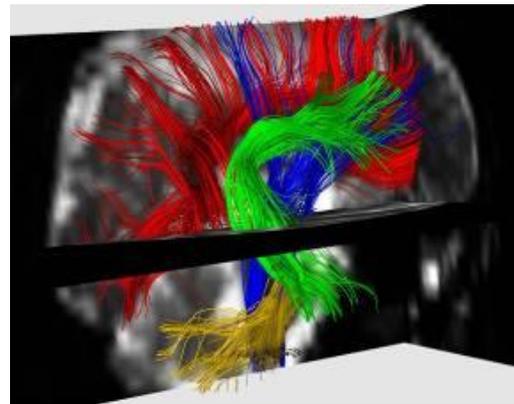
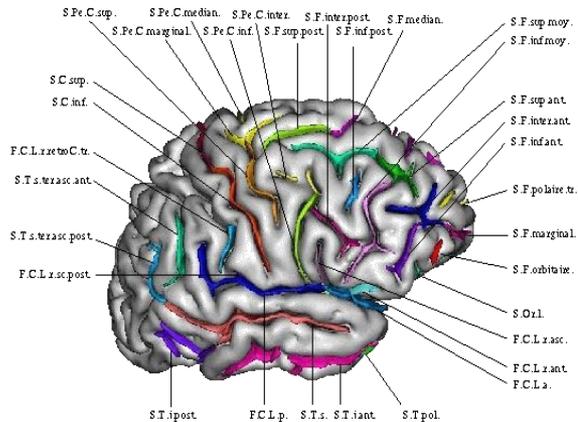
## Statistiques (L'internaute) :

- Science qui recueille et analyse mathématiquement des données pour une **évaluation numérique**
- Ensemble des **données numériques** concernant l'état ou l'évolution d'un **groupe** ou d'un phénomène

# Analyse statistique de formes anatomiques

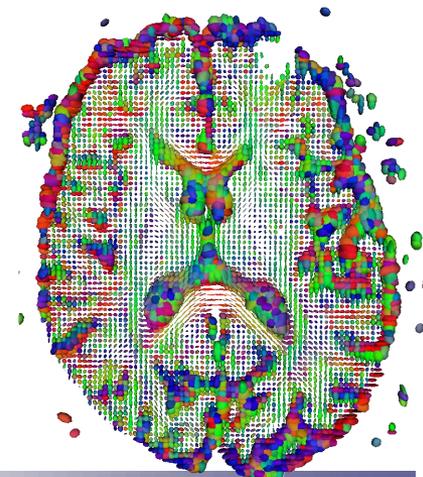
## Les primitives géométriques

- Courbes, faisceaux de fibres
  - Surfaces, images et leur quotient
  - **Tenseurs, matrices de covariance**
  - **Transformations / déformations**
- Points dans des espaces **non-linéaires**
  - **Modéliser la variabilité de la population**



## Algorithmes pour des statistiques dans des variétés

- Définir rigoureusement des statistiques sur des variétés
- Algorithmes pour les calculer



# *Plan*

**Calcul statistique sur des variétés riemanniennes**

Traitement d'image à valeur dans des variétés

Géométrie non métrique sur les groupes de transformations

# Variétés différentielles

## Définition :

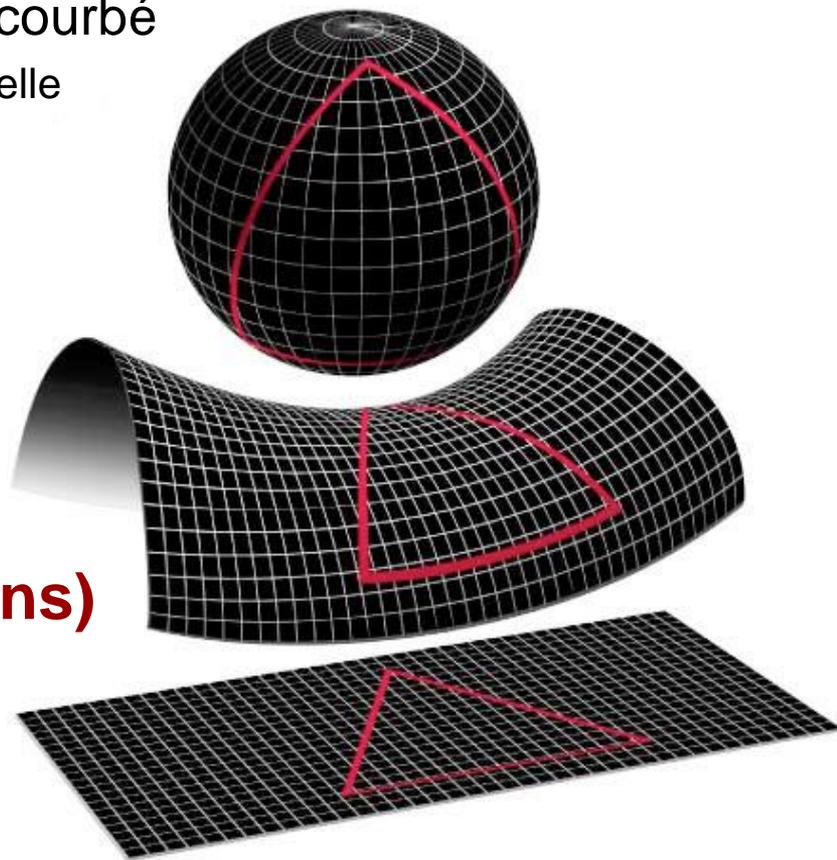
- Espace (topologique) localement Euclidien mais potentiellement globalement courbé
  - Même dimension + régularité différentielle

## Exemples simples

- Sphère
- Selle de cheval (hyperbolique)
- Surface dans l'espace 3D

## et moins simples (transformations)

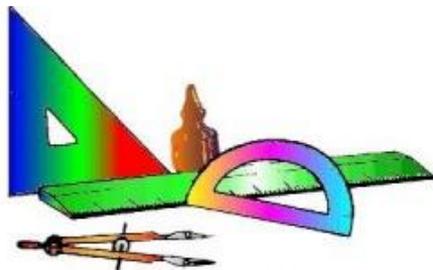
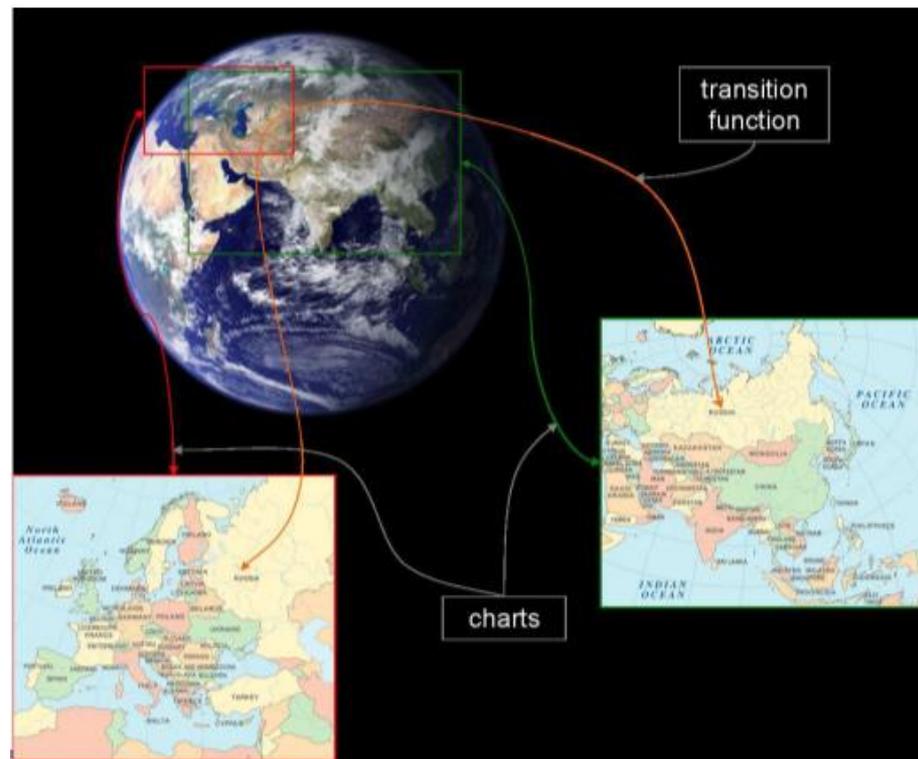
- Espaces projectifs (directions)
- Rotations de  $\mathbb{R}^3$  :  $SO_3 \sim P_3$
- Transformation rigides, affines
- Difféomorphismes



# Variétés différentielles

## Calculer dans une variété

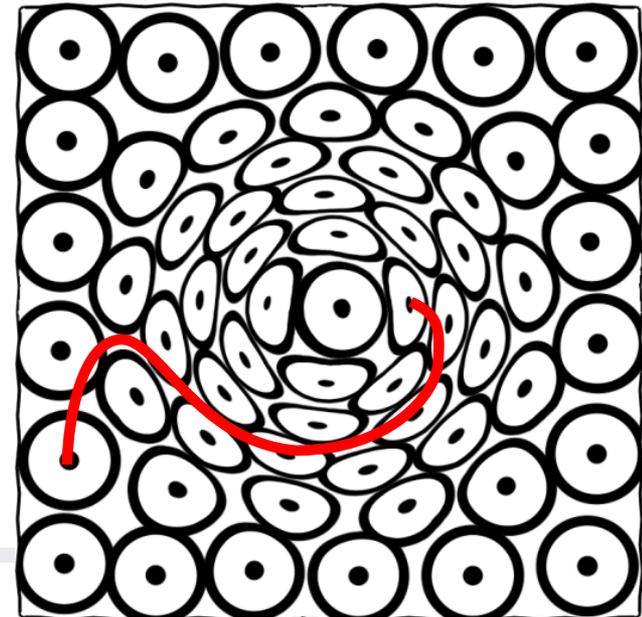
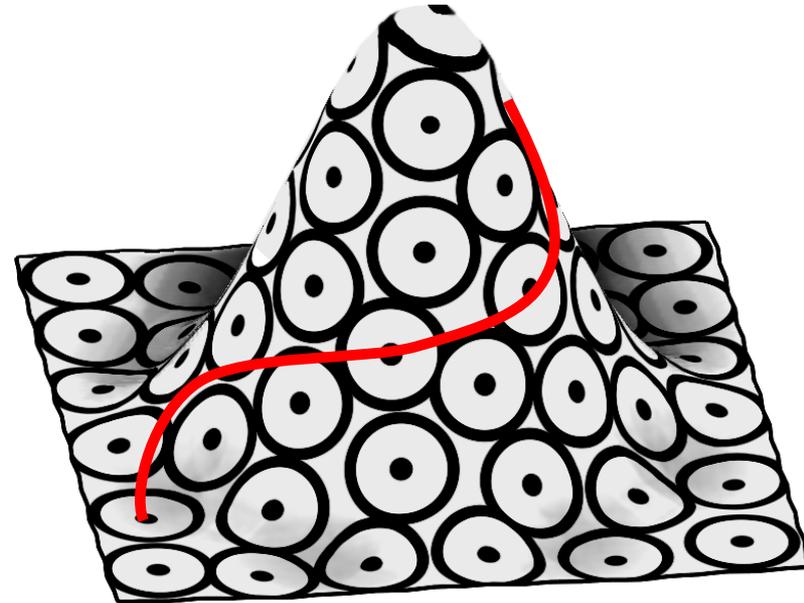
- Extrinsèque
  - Plongement dans  $\mathbb{R}^n$
- Intrinsèque
  - Coordonnées : cartes
  - Atlas = ensemble consistant de cartes



# Variétés différentielles

## Calculer dans une variété

- Extrinsèque
  - Plongement dans  $\mathbb{R}^n$
- Intrinsèque
  - Coordonnées : cartes
  - Atlas = ensemble consistant de cartes
- Comment mesurer ?
  - Volumes (surfaces)
  - Longueurs
  - Lignes droites



# Mesurer des distances extrinsèques

## Outil de base: le produit scalaire

$$\langle v, w \rangle = v^t w$$

- Norme d'un vecteur

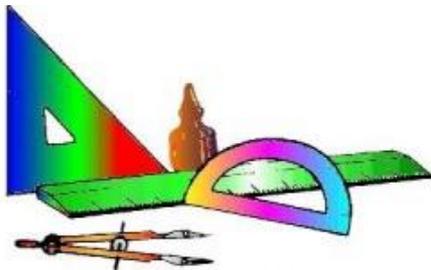
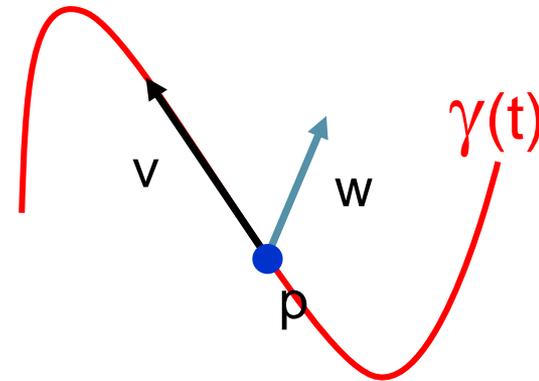
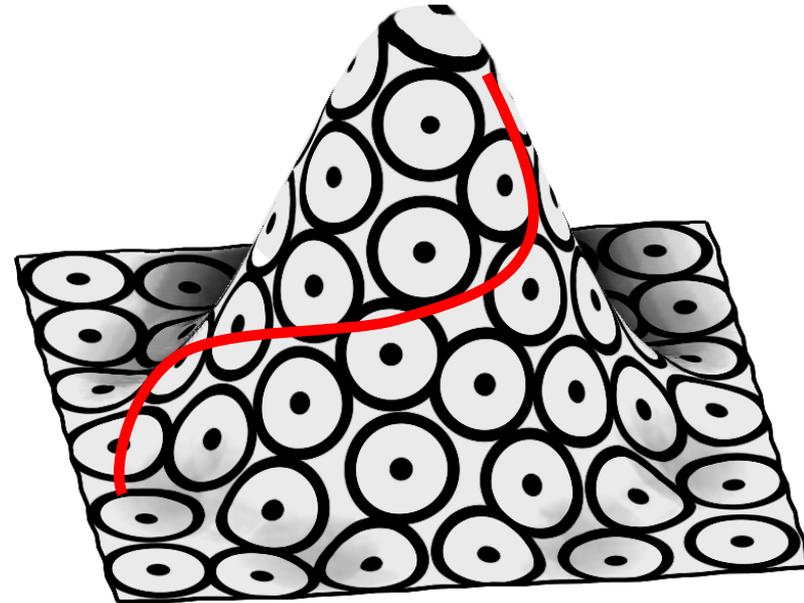
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

- Angle entre deux vecteurs

$$\langle v, w \rangle = \cos(\alpha) \|v\| \|w\|$$

- Longueur d'une courbe

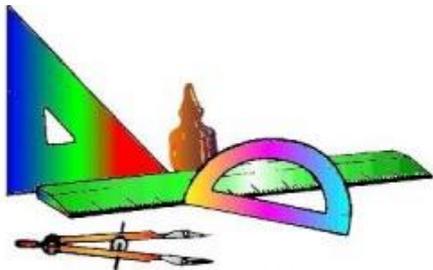
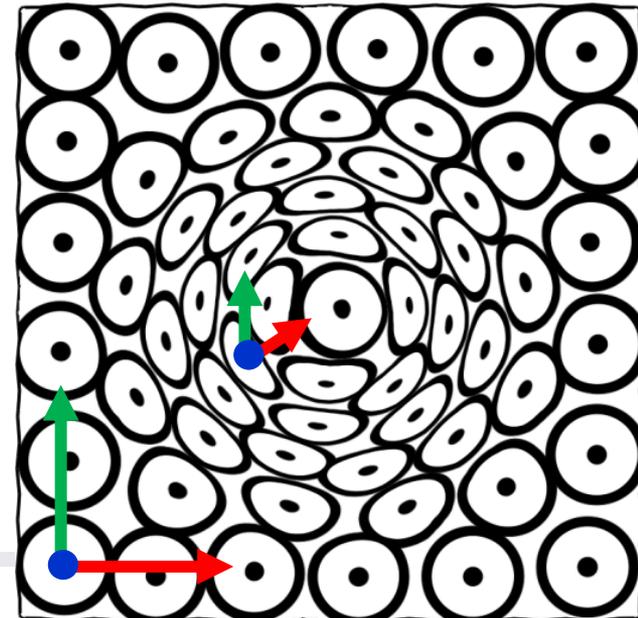
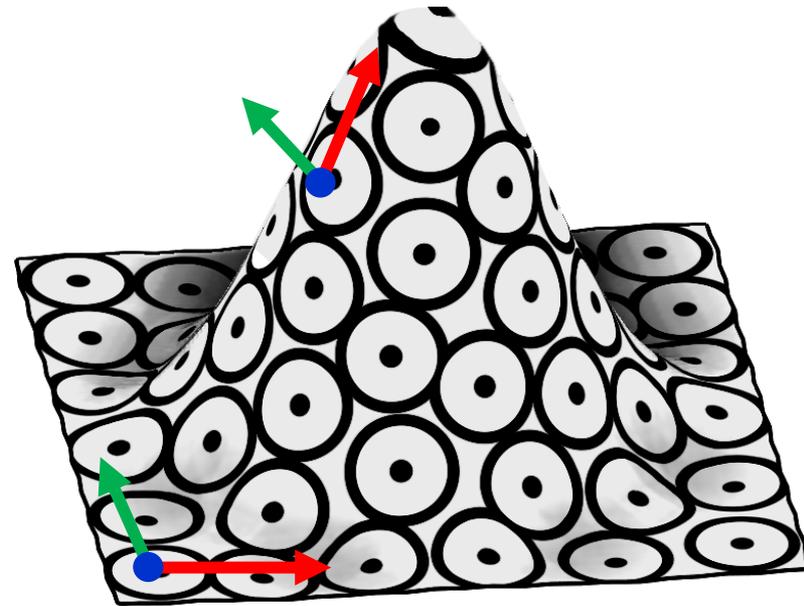
$$L(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$



# Mesurer des distances intrinsèques

Outil de base: le produit scalaire

$$\langle v, w \rangle = v^t w$$



# Mesurer des distances intrinsèques

## Outil de base: le produit scalaire

$$\langle v, w \rangle_p = v^t G(p) w$$

- Norme d'un vecteur

$$\|v\|_p = \sqrt{\langle v, v \rangle_p}$$

- Angle entre deux vecteurs

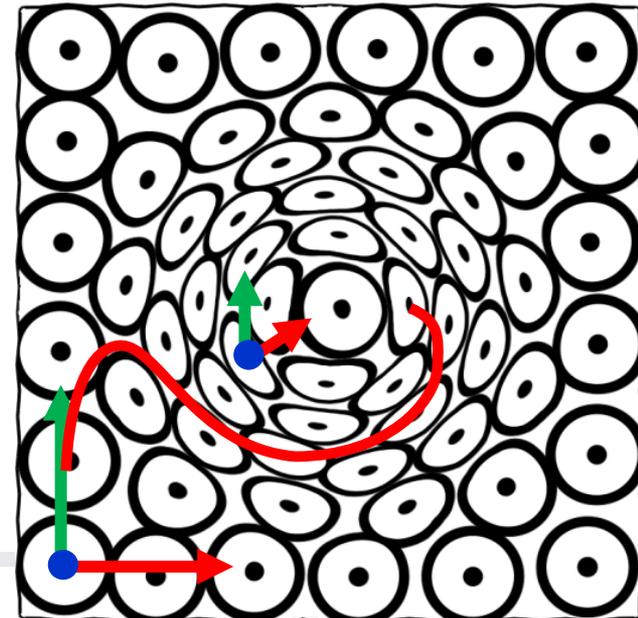
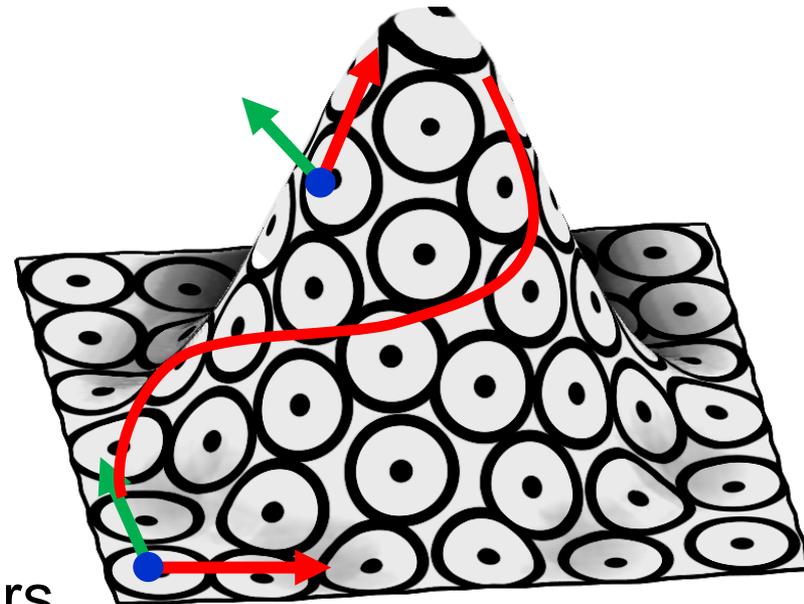
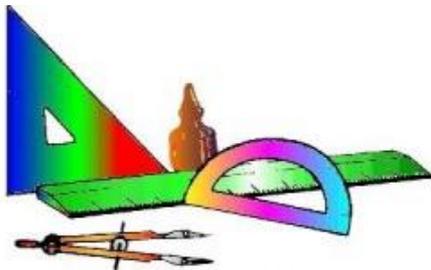
$$\langle v, w \rangle_p = \cos(\alpha) \|v\|_p \|w\|_p$$

- Longueur d'une courbe

$$L(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt$$



Bernhard Riemann  
1826-1866



# Variétés riemanniennes

## Outil de base: le produit scalaire

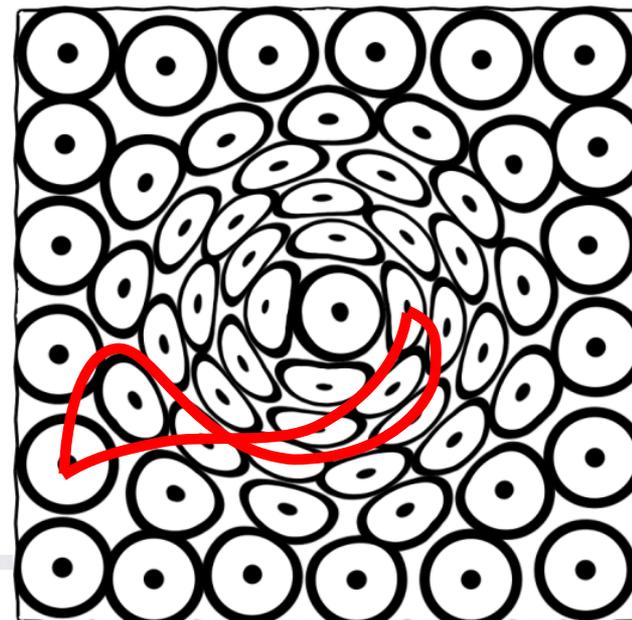
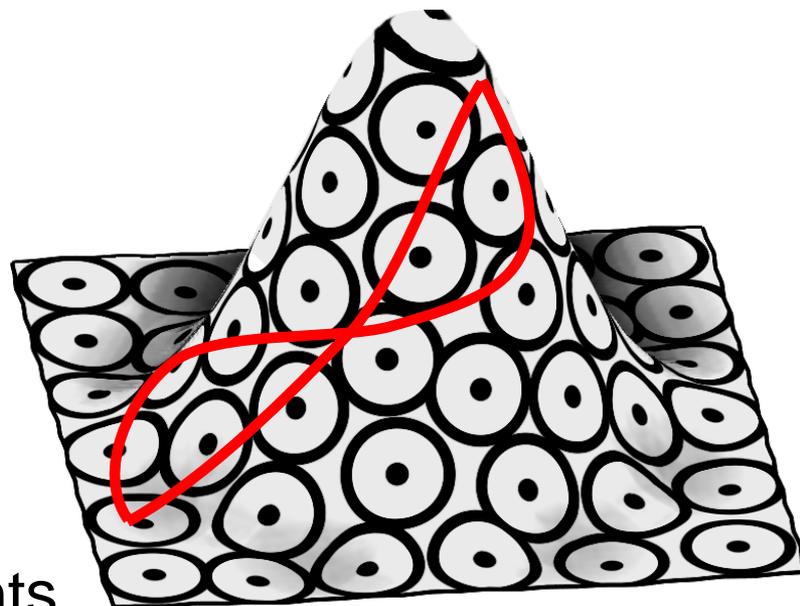
$$\langle v, w \rangle_p = v^t G(p) w$$

- Longueur d'une courbe

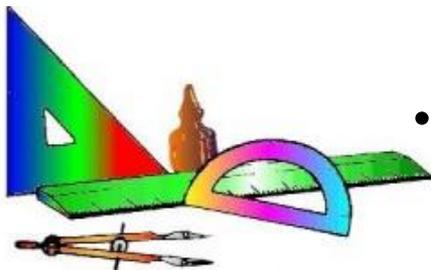
$$L(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt$$

- Géodésique entre 2 points

- Réalise le plus court chemin
- Calcul variationnel (E.L.) :  
Eq. différentielle d'ordre 2  
(spécifie l'accélération)
- Paramètres libres : Vitesse  
initiale et point de départ



Bernhard Riemann  
1826-1866



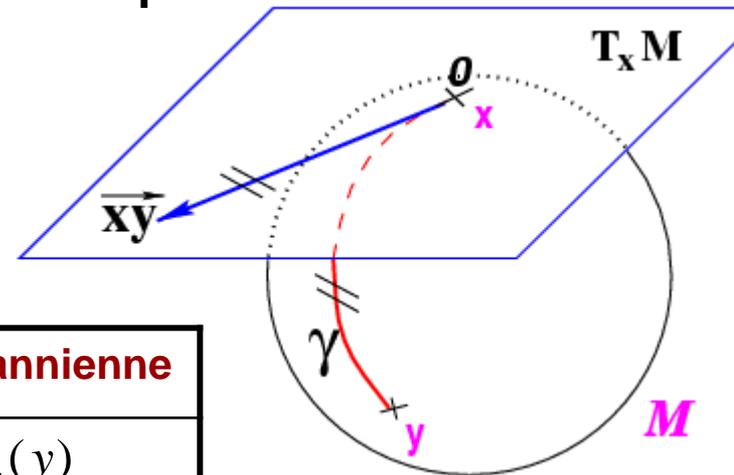
# Bases algorithmiques des variétés riemanniennes

## Carte exponentielle en $x$ (système de coordonnées normales)

- $\text{Exp}_x$  = tir géodésique paramétré par le vecteur tangent initial
- $\text{Log}_x$  = développement dans l'espace tangent le long des géodésiques
  - Géodésiques = lignes droites et distance euclidienne
  - Domaine local  $\rightarrow$  global : étoilé limité par le lieu de coupure
  - Couvre toute la variété si **complétude géodésique**

## Reformuler les algorithmes avec $\text{exp}_x$ et $\text{log}_x$

Vecteur  $\rightarrow$  Bipoint (plus de classes d'équivalence)



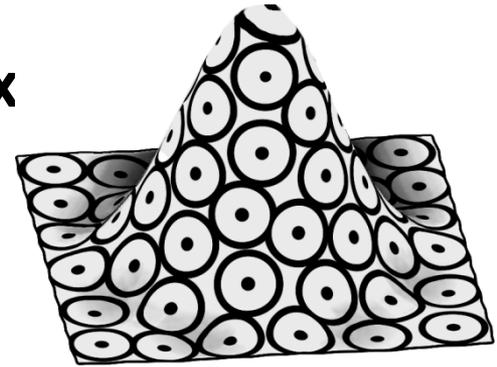
Opération	Espace euclidien	Variété riemannienne
Soustraction	$\vec{xy} = y - x$	$\vec{xy} = \text{log}_x(y)$
Addition	$y = x + \vec{xy}$	$y = \text{exp}_x(\vec{xy})$
Distance	$\text{dist}(x, y) = \ y - x\ $	$\text{dist}(x, y) = \ \vec{xy}\ _x$
Descente de gradient	$x_{t+\varepsilon} = x_t - \varepsilon \nabla C(x_t)$	$x_{t+\varepsilon} = \text{exp}_{x_t}(-\varepsilon \nabla C(x_t))$

# Variationnelles aléatoires sur une variété riemannienne

## Densité de probabilité intrinsèque de $\mathbf{x}$

- Pour tout ensemble  $H$

$$P(\mathbf{x} \in H) = \int_H p(y) dM(y)$$



- ~~□ Mesure de Lebesgue~~

→ Mesure riemannienne uniforme  $dM(y) = \sqrt{\det(G(y))} dy$

## Espérance d'une fonction scalaire ou vectorielle sur $M$

- $E_{\mathbf{x}}[\phi] = \int_M \phi(y) p(y) dM(y)$
- $\phi = \text{dist}^2$  (variance) :  $E_{\mathbf{x}}[\text{dist}(\cdot, y)^2] = \int_M \text{dist}(y, z)^2 p(z) dM(z)$
- ~~□  $\phi = x$  (moyenne) :  $E_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}] = \int_M y p(y) dM(y)$~~

# Premiers outils statistiques : les moments

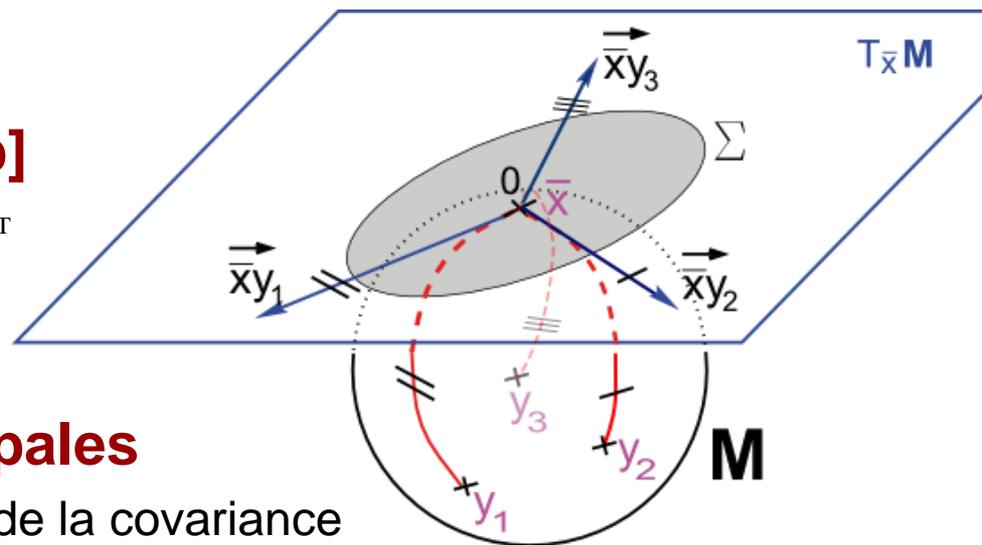
## Définition : la moyenne de Fréchet minimise la variance

$$\bar{x} \in \operatorname{argmin}_{y \in M} \left( E \left[ \operatorname{dist}(y, \mathbf{x})^2 \right] \right) \Rightarrow E \left[ \overrightarrow{\bar{x}\mathbf{x}} \right] = \int_M \overrightarrow{\bar{x}z} \cdot p(z) \cdot dM(z) = 0 \quad [\text{si } P(C(\bar{x})) = 0]$$

- Caractérisation variationnelle : barycentre exponentiel
- Restrictions pour l'unicité en général (distributions) : Karcher, Kendall, Le, Afsari
- Moyenne empirique : unicité presque sûre [Arnaudon & Miclo 2013]

## Covariance [moments ordre sup]

$$\Sigma_{\mathbf{xx}} = E \left[ \left( \overrightarrow{\bar{x}\mathbf{x}} \right) \left( \overrightarrow{\bar{x}\mathbf{x}} \right)^T \right] = \frac{1}{n} \sum_i \left( \overrightarrow{\bar{x}\mathbf{x}_i} \right) \left( \overrightarrow{\bar{x}\mathbf{x}_i} \right)^T$$



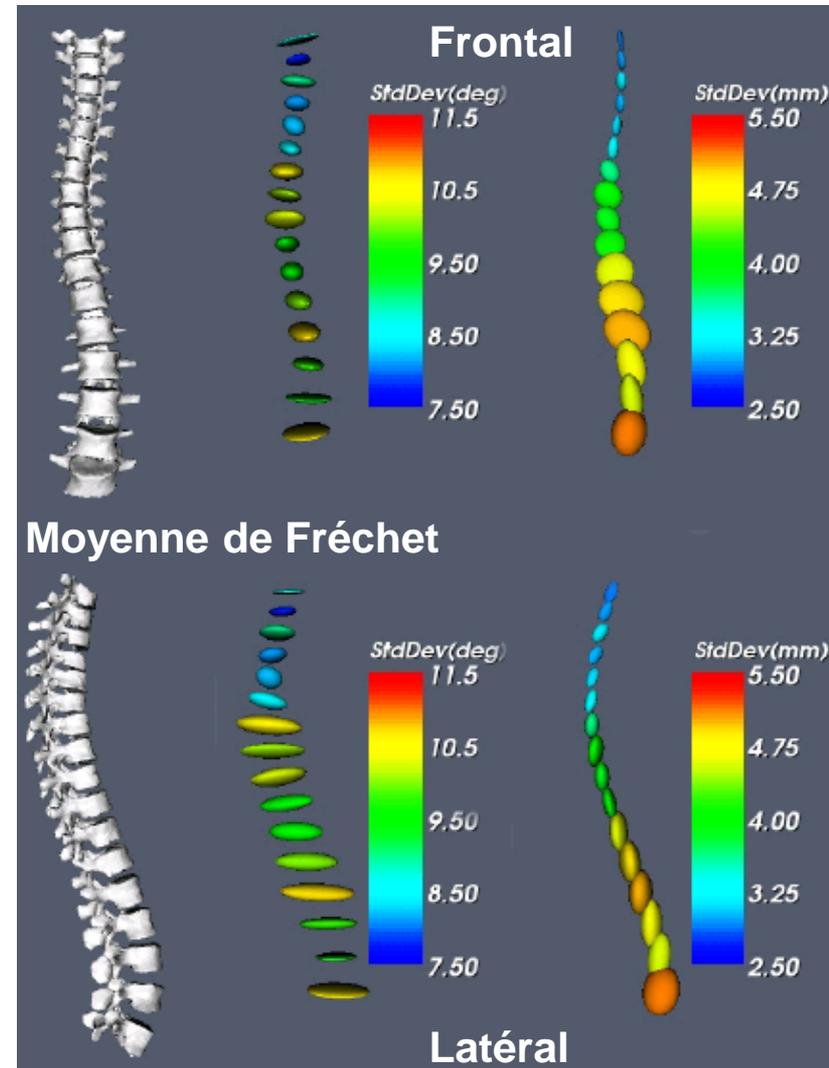
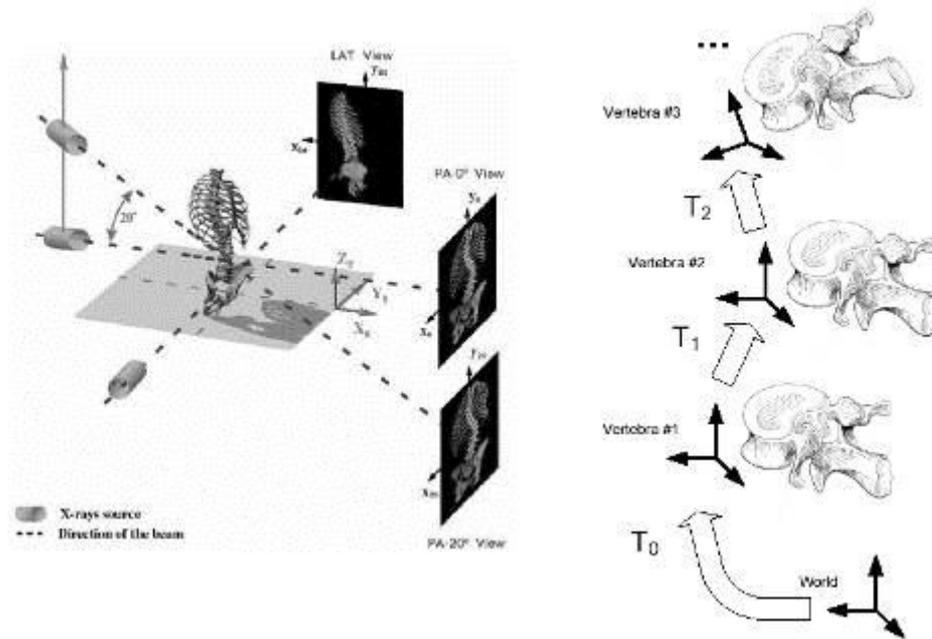
## Analyse en composantes principales

- ACP tangente : modes principaux de la covariance
- Analyse en composantes géodésiques (PGA) [Fletcher 2004]

[Oller & Corcuera 95, Battacharya & Patrangenaru 02, Pennec 96, NSIP'99, JMIV06]

# Analyse statistique de la scoliose

[ J. Boisvert et al. ISBI'06, AMDO'06 and IEEE TMI 27(4), 2008 ]

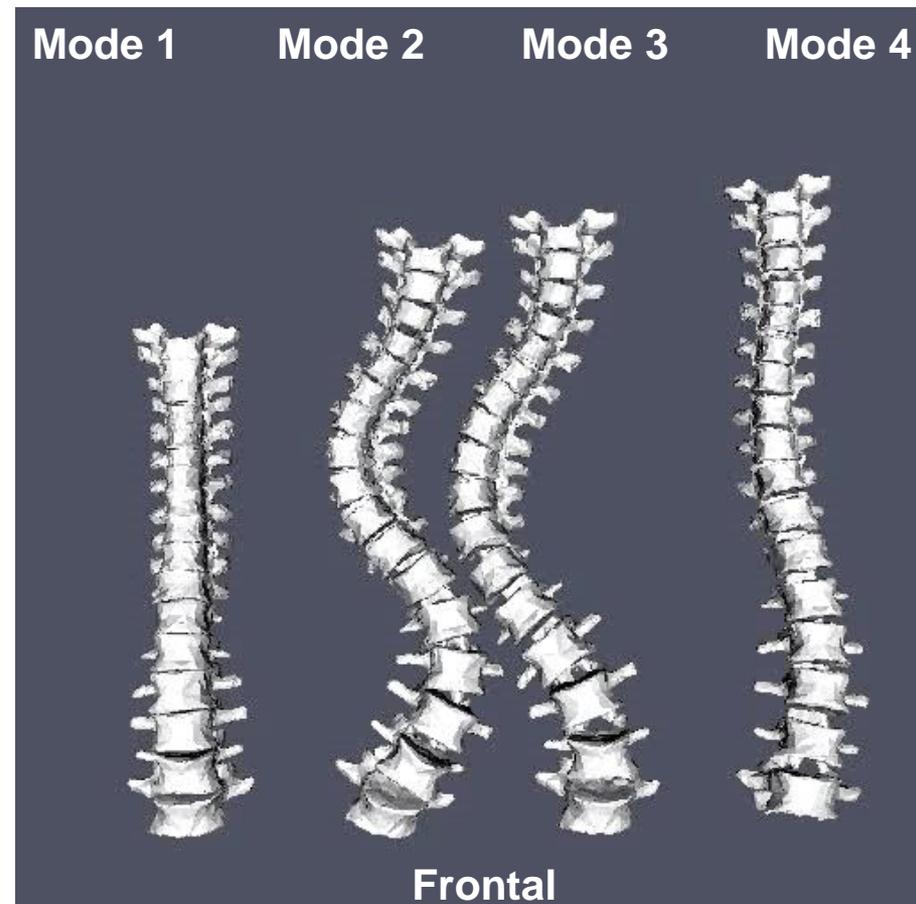
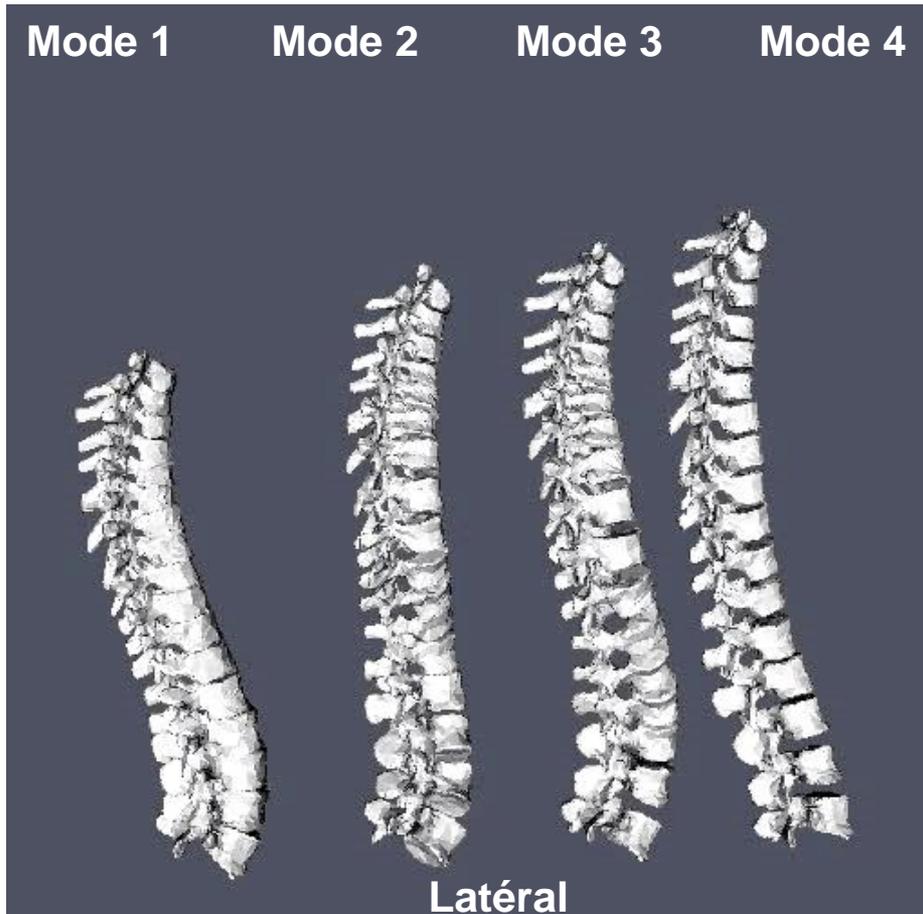


## Données

- 307 patients scoliotiques de l'hôpital Sainte-Justine (Montréal, CA)
- Forme : 17 articulations (rotation / translation)

# Analyse statistique de la scoliose

[ J. Boisvert et al. ISBI'06, AMDO'06 and IEEE TMI 27(4), 2008 ]



## ACP-tangente de la covariance

5 modes expliquent 50% de la variance

## Signification clinique des modes (King)

- Mode 1 : classe I ou III
- Mode 2 : classe I, II, III
- Mode 3 : classe IV + V
- Mode 4 : classe V (+II)

# *Plan*

Calcul statistique sur des variétés riemanniennes

**Traitement d'image à valeur dans des variétés**

Géométrie non métrique sur les groupes de transformations

# Imagerie du tenseur de diffusion

## Covariance du mouvement brownien de l'eau

- Architecture des faisceaux d'axones

## Traitement d'image de tenseurs

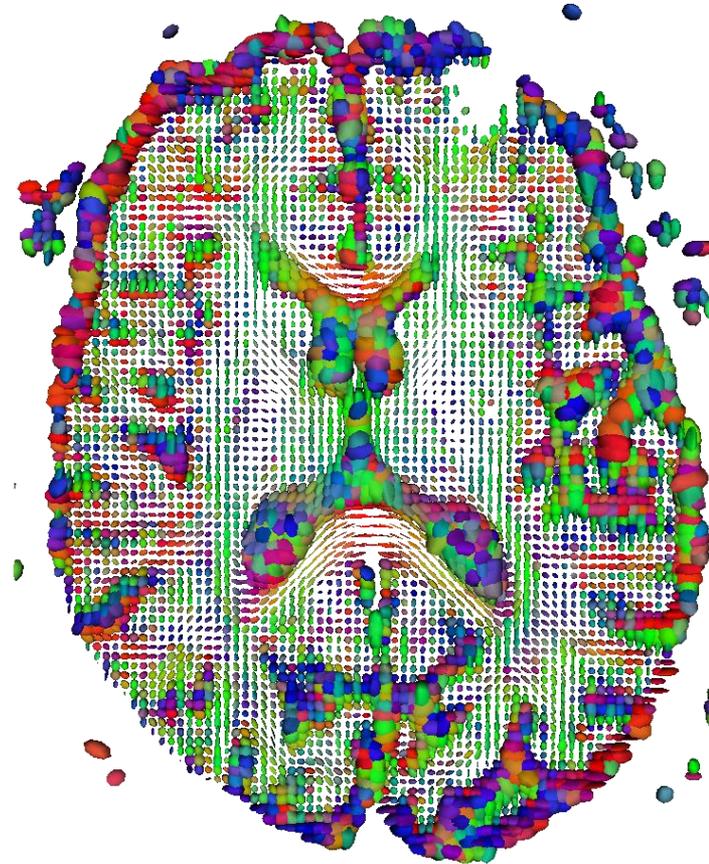
- Estimation robuste,
- Filtrage, régularisation

## Matrice symétrique définie positive

- **Cône (variété à bord non complète)**
- Opérations convexes stables
  - Moyenne, interpolation
- **Opérations non convexes mal posées**
  - EDP, descentes de gradient

⇒ **Choisir une métrique complète ?**

⇒ **Algorithmique consistante sur les variétés ?**



Champ de tenseur de diffusion  
(coupe d'un volume 3D)

# Métriques complètes sur les tenseurs

## Métrique affine invariante (espace courbe – Hadamard)

- Métrique :  $\langle V|W \rangle_{\Sigma} = \text{Tr}(V\Sigma^{-1}W\Sigma^{-1})$
- Exponentielle :  $\exp_{\Sigma}(W) = \Sigma^{1/2} \exp(\Sigma^{-1/2}W\Sigma^{-1/2})\Sigma^{1/2}$
- Logarithme :  $\overrightarrow{\Sigma\Lambda} = \log_{\Sigma}(\Lambda) = \Sigma^{-1/2} \log(\Sigma^{1/2}\Lambda\Sigma^{1/2}) \Sigma^{-1/2}$

[Pennec et al IJCV 2006, Fletcher et al SigPro 2007, Lenglet et al JMIV 2006, ...]

## Métrique log-euclidienne (espace euclidien)

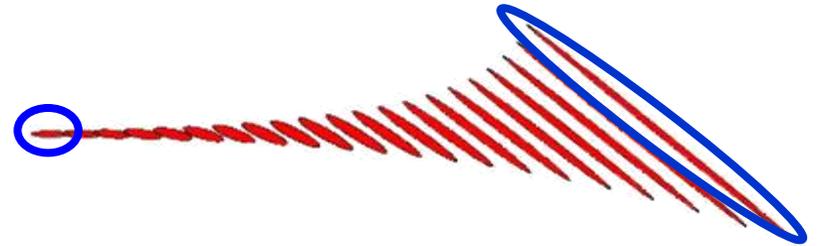
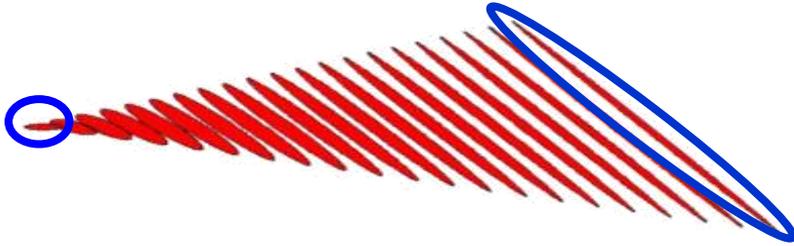
- Métrique :  $\langle V|W \rangle_{\Sigma} = \text{Tr}(\partial_V \log(\Sigma) \partial_W \log(\Sigma))$
- Exponentielle :  $\exp_{\Sigma}(W) = \exp(\log(\Sigma) + W)$
- Logarithme :  $\overrightarrow{\Sigma\Lambda} = \log_{\Sigma}(\Lambda) = \log(\Lambda) - \log(\Sigma)$

[Arsigny, Pennec, Fillard, Ayache SIAM'06, MRM'06]

# Interpolation de tenseurs

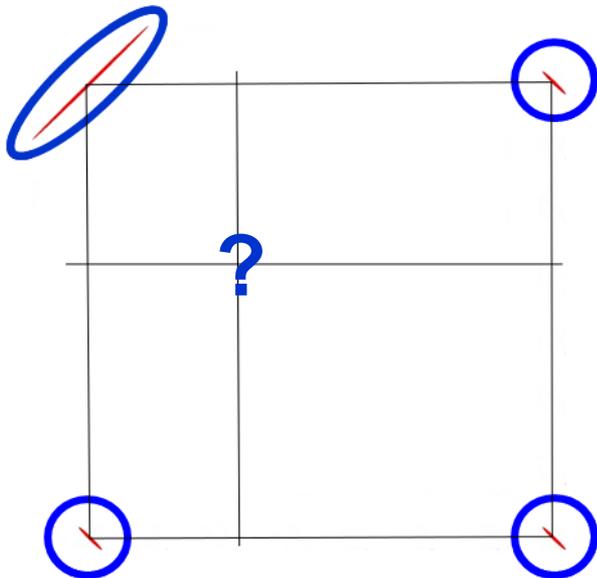
## Marche géodésique en 1D

$$\Sigma(t) = \exp_{\Sigma_1}(\overrightarrow{t\Sigma_1\Sigma_2})$$



## Interpolation bi- ou tri-linéaire ?

$$\Sigma(x) = \sum w_i(x) \Sigma_i$$

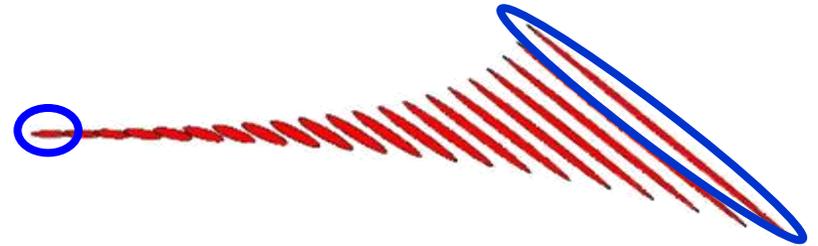
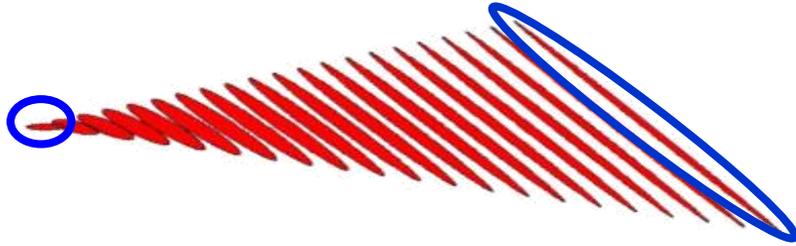


Eucliden  $\rightarrow$  Riemmanien ?

# Interpolation de tenseurs

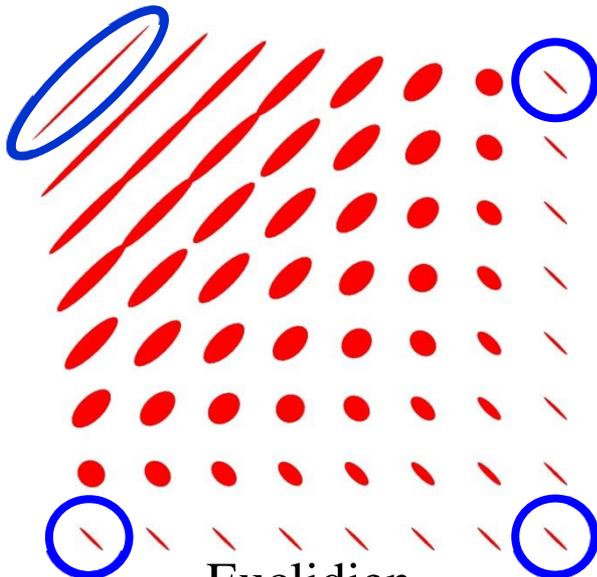
## Marche géodésique en 1D

$$\Sigma(t) = \exp_{\Sigma_1}(\overrightarrow{t\Sigma_1\Sigma_2})$$

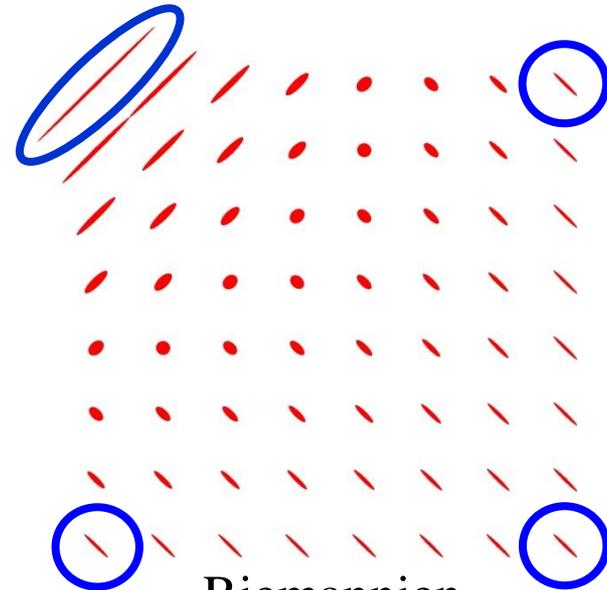


## Moyenne de Fréchet pondérée

$$\Sigma(x) = \min_{\Sigma} \sum w_i(x) \text{dist}(\Sigma, \Sigma_i)^2$$



Euclidien



Riemannien

# Filtrage gaussien et convolutions

$$\Sigma(x) = \arg \min_{\Sigma} \sum_{i=1}^n G_{\sigma}(x - x_i) \text{dist}(\Sigma, \Sigma_i)^2$$

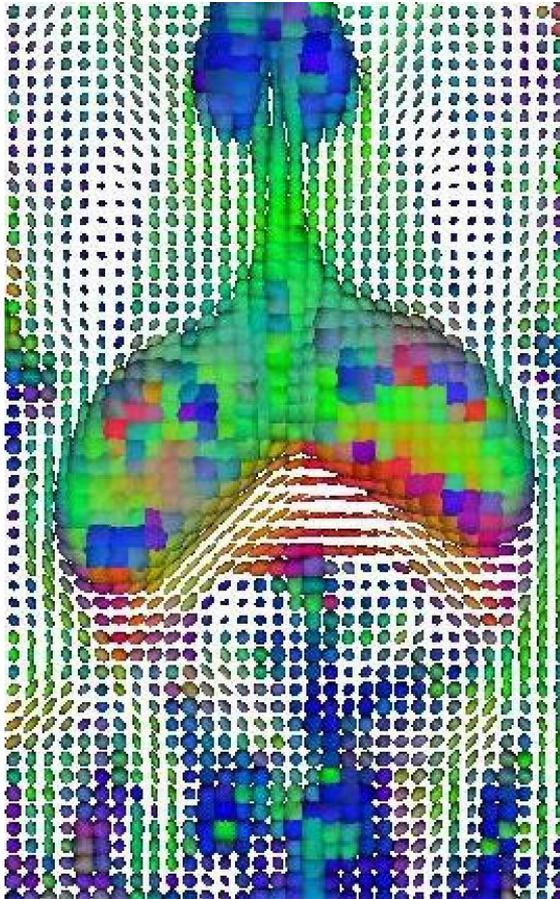
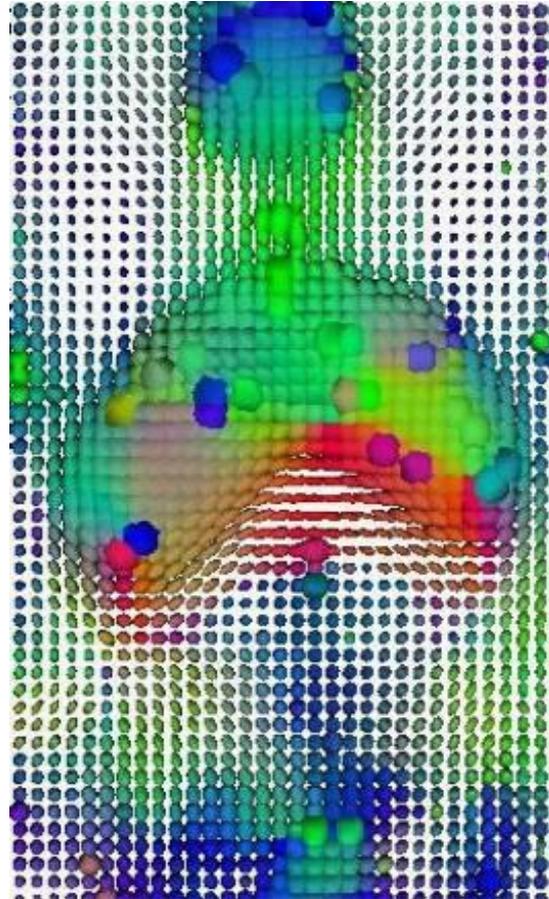
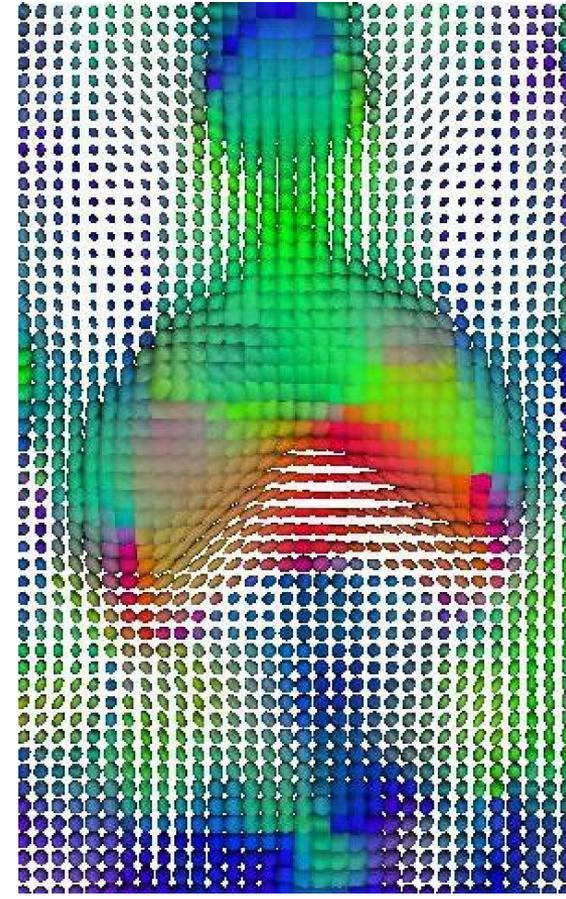


Image originale



Euclidien  $\sigma=2$



Riemannien  $\sigma=2$

# Filtrage anisotrope

$$\text{Reg}(\Sigma) = \int \Phi\left(\|\nabla\Sigma(x)\|_{\Sigma(x)}^2\right) dx$$

Schéma numérique intrinsèque pour l'opérateur de Laplace-Beltrami grâce à  $\text{Exp}_x / \text{Log}_x$

$$\Delta\Sigma(x) \cong \frac{1}{\varepsilon} \sum_{u \in V(x)} \overrightarrow{\Sigma(x)\Sigma(x + \varepsilon u)}$$

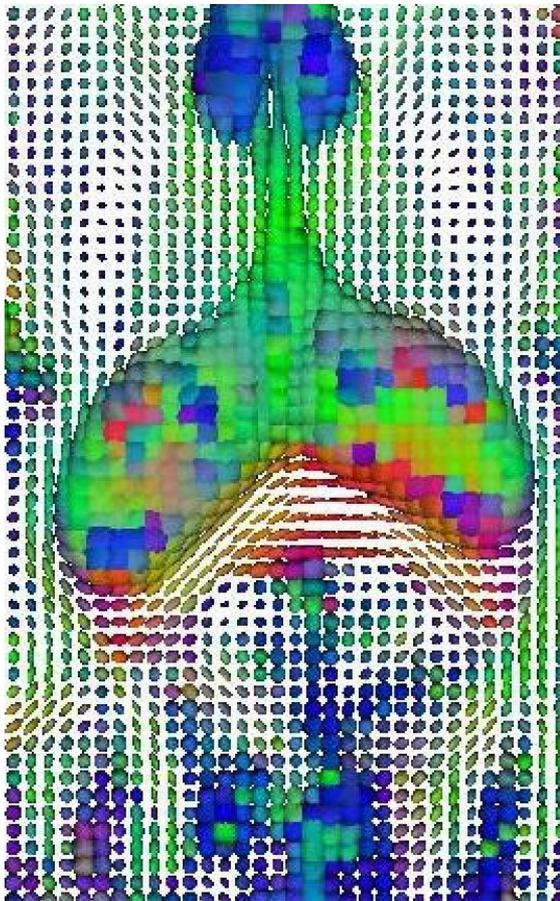
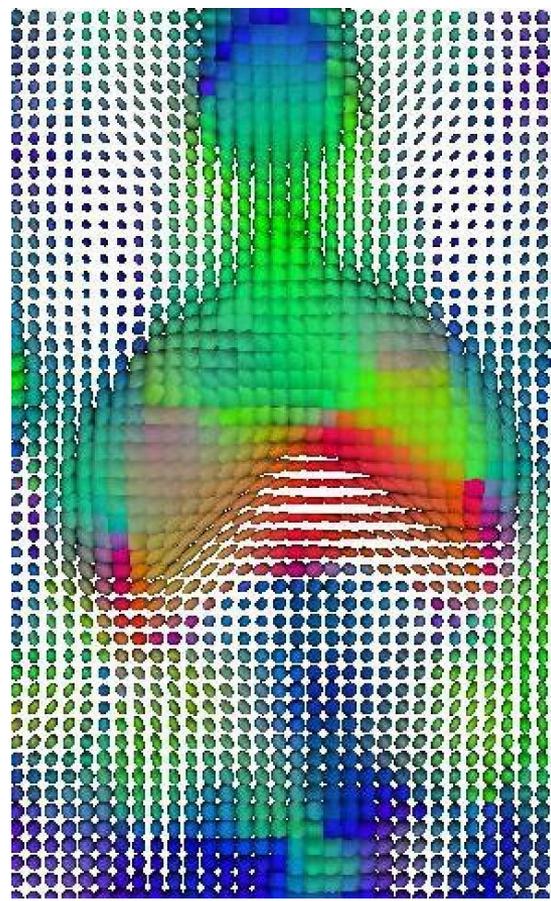
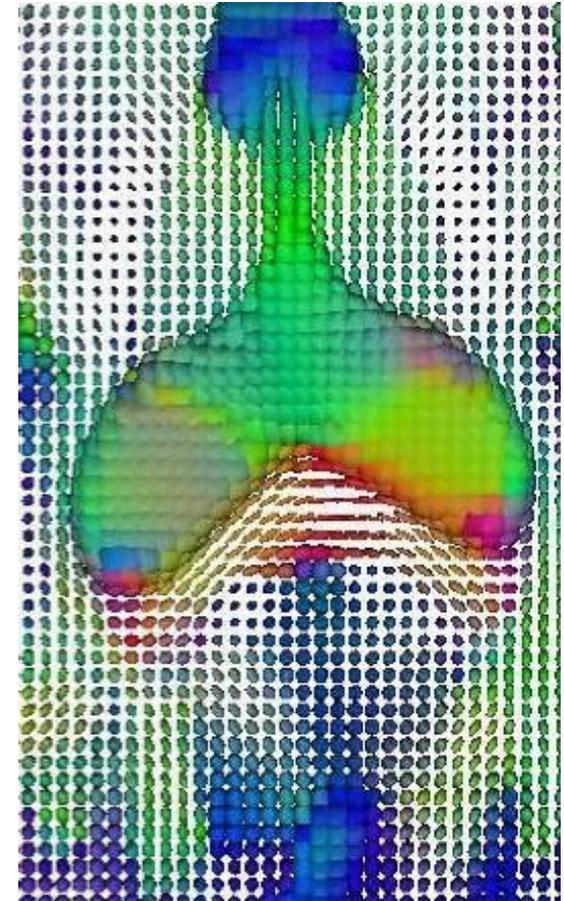


Image originale



Riemannien  $\sigma=2$



Anisotrope  $\sigma=2$

# Images de diffusion cliniques de la moelle épinière

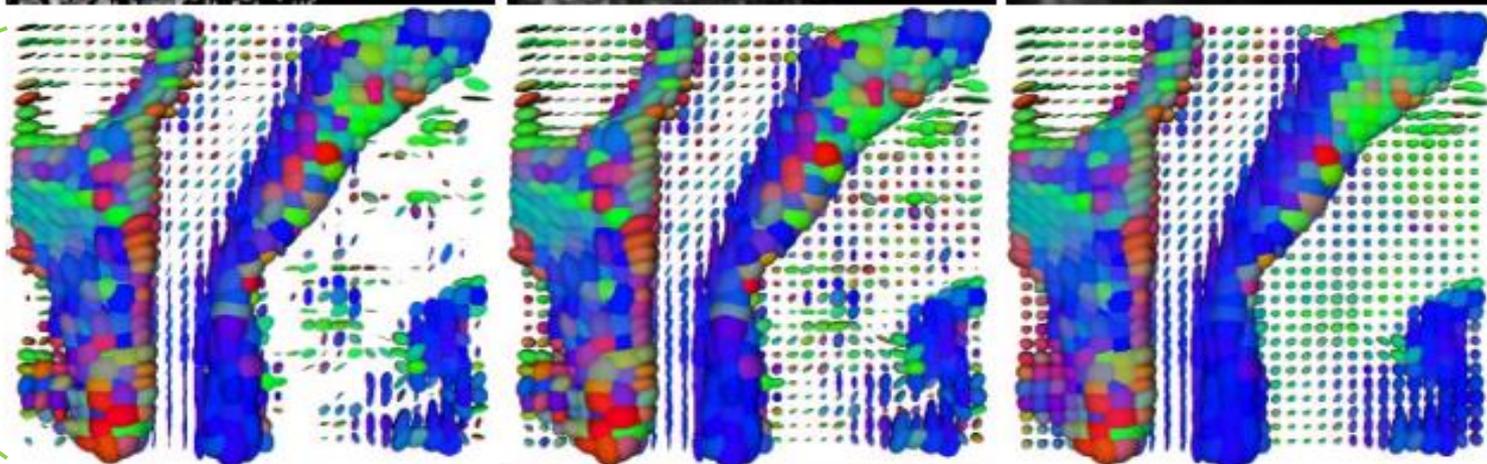
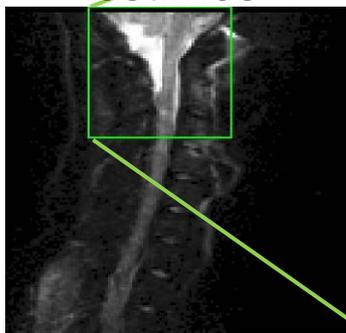
$$MAP(\Sigma) = -\sum_{i=1}^N \int \log \left( \frac{\hat{S}_i}{\sigma^2} \exp \left( -\frac{\hat{S}_i^2 + S_i(\Sigma)^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left( \frac{S_i(\Sigma)\hat{S}_i}{\sigma^2} \right) \right) dx + \int \Phi \left( \|\nabla \Sigma(x)\|_{\Sigma(x)}^2 \right) dx$$

Modèle d'imagerie + Apriori spatial

Anisotropie  
fractionnelle



Tenseurs  
estimés



Standard

ML ricien

MAP ricien

[ Fillard, Arsigny, Pennec, Ayache ISBI'06, TMI 26(11) 2007 ]

# *Plan*

Calcul statistique sur des variétés riemanniennes

Traitement d'image à valeur dans des variétés

**Géométrie non métrique sur les groupes de transformations**

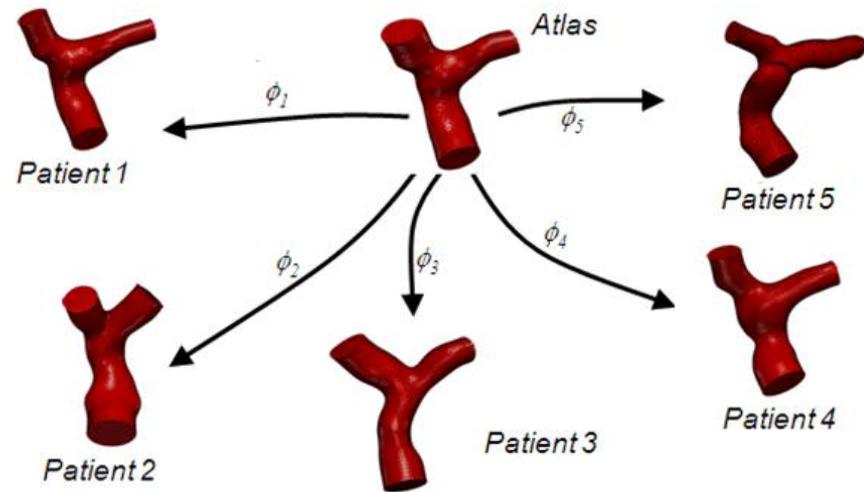
# La variété est un groupe de transformation

## Variabilité anatomique encodée par des transformations

- Transformations rigides (colonne vertébrale)
- Difféomorphismes [D'Arcy Thompson 1917, Grenander & Miller]

## Groupe de Lie

- a la fois une variété différentielle
- et un groupe
  - Identité
  - Composition  $g \circ h$  lisse
  - Inversion  $g^{-1}$  lisse



## Métriques riemanniennes naturelles (groupes connexes)

- Choisir une métrique à l'identité :  $\langle x, y \rangle_{Id}$
- Propager en chaque point en translatant à gauche (ou à droite)  
 $\langle x, y \rangle_g = \langle DL_g^{(-1)} \cdot x, DL_g^{(-1)} \cdot y \rangle_{Id}$

# Métriques riemanniennes sur les difféomorphismes

## Groupe des difféomorphismes de l'espace

- Transformations lisses de l'espace  $y=\phi(x)$  (décroissant exponentiellement à l'infini)
- Courbes dans l'espace des transformations\* :  $\phi_t(x) = \phi(x, t)$
- Vecteur tangent = champ de vecteur vitesse\*  $v_t(x) = \frac{d\phi(x, t)}{dt}$

## Métrique invariante à droite

$$\|v_t\|_{\phi_t} = \|v_t \circ \phi_t^{-1}\|_{Id}$$

- Description lagrangienne
- Norme de Sobolev  $H_k$  or  $H_\infty$  (RKHS) dans LDDMM  $\rightarrow$  difféomorphismes **[Miller, Trounev, Younes, Dupuis 1998 – 2009]**

## Mécanique géométrique

- Arnold, Smale, Souriau... Marsden, Ratiu, Holmes... Michor...

\* Moyennant des conditions au bord, e.g. identité / zéro à l'infini

# *Les limites du cadre riemannien*

## **Pas de métrique bi-invariante en général**

- **Incompatibilité de la moyenne avec la structure de groupe**
  - Métrique gauche ou droite : moyennes de Fréchet différentes !
  - L'inverse de la moyenne n'est pas la moyenne des inverses
- Exemples avec des transformations très simples (rigides 2D)
  - Groupes non commutatifs ou non compacts

## **Moyenne bi-invariante sans métrique ?**

- **Structure bi-invariante autre que riemannienne**

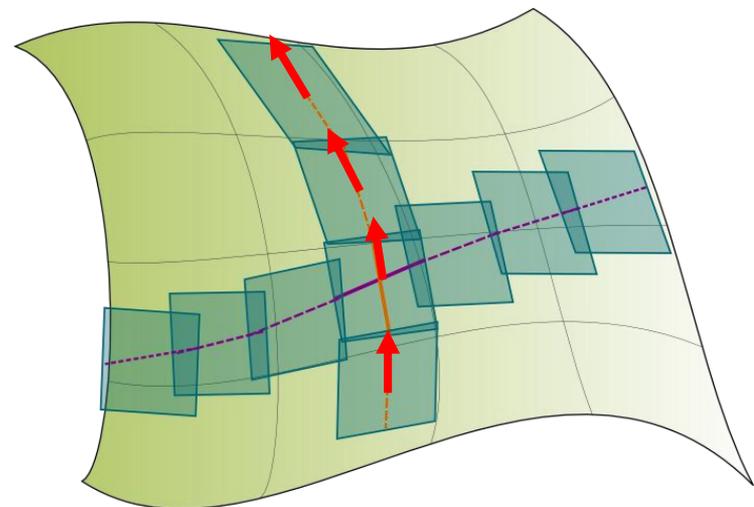
# Espaces à connexion affine

## Connexion affine (transport parallèle infinitésimal)

- Accélération = dérivée d'un champ de vecteur
- Projection d'un espace tangent sur un espace tangent voisin

## Géodésiques = lignes droites

- Accélération nulle :  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$
- Equation différentielle d'ordre 2 : système de coordonnées normal
- Applications exponentielle et logarithmiques **locale**



D'après Lê Nguyễn Hoàng, science4all.org

# Connexion de Cartan-Schouten sur les groupes de Lie

## Une unique connexion

- Symétrique (sans torsion) et bi-invariante
- dont les géodésiques sont l'exponentielle de groupe
  - Matrices :  $M(t) = A \cdot \exp(t.V)$
  - Difféos : translations de **champs de vecteurs stationnaires** (SVFs)

## Si métrique bi-invariante : connexion de Levi-Civita

- Existe même en l'absence d'une métrique bi-invariante

## Deux connexions plates (gauches et droites)

- **Parallélisme absolu** : pas de courbure, mais de la torsion (Cartan/Einstein)

# Statistiques sur un espace à connexion affine

## ~~Moyenne de Fréchet~~ : barycentres exponentiels

- $\sum_i \text{Log}_x(y_i) = 0$  [Emery, Mokobodzki 91, Corcuera, Kendall 99]
- Existence et **unicité locale** si convexité locale [Arnaudon & Li, 2005]

## Pour les connexions de Cartan-Schouten [Pennec & Arsigny, 2012]

- Lieu des points  $x$  tels que  $\sum \text{Log}(x^{-1} \cdot y_i) = 0$
- Algorithme de calcul : itération de point fixe (**convergence locale**)

$$x_{t+1} = x_t \circ \text{Exp} \left( \frac{1}{n} \sum \text{Log}(x_t^{-1} \cdot y_i) \right)$$

- **Moyenne stable par composition gauche / droite et inversion**
- Groupes de Heisenberg, rigide, linéaire : **unicité globale** (p.s.)
- Matrice de covariance définie comme pour le riemannien

# Connexion de Cartan vs riemannien invariant

## Ce qui est similaire

- Structure de variété différentielle avec courbure [sans torsion]
- $\text{Exp}_x$  et  $\text{Log}_x$  réalisent des systèmes de coordonnées normaux [dimension finie]

## Les limitations du cadre affine

- Pas de métrique (mais pas de choix de métrique à justifier)
- L'exponentielle ne couvre pas toujours le groupe entier
  - Exemples pathologiques proches de l'identité en dimension infinie
  - Limitations similaires en pratique pour le cadre riemannien invariant discrétisé

## Ce qu'on gagne

- Une structure globalement invariante par composition et inversion
- Géodésiques simples, calcul efficace (stationnarité, exponentielle de groupe)
- La linéarisation la plus simple des transformations pour les statistiques ?

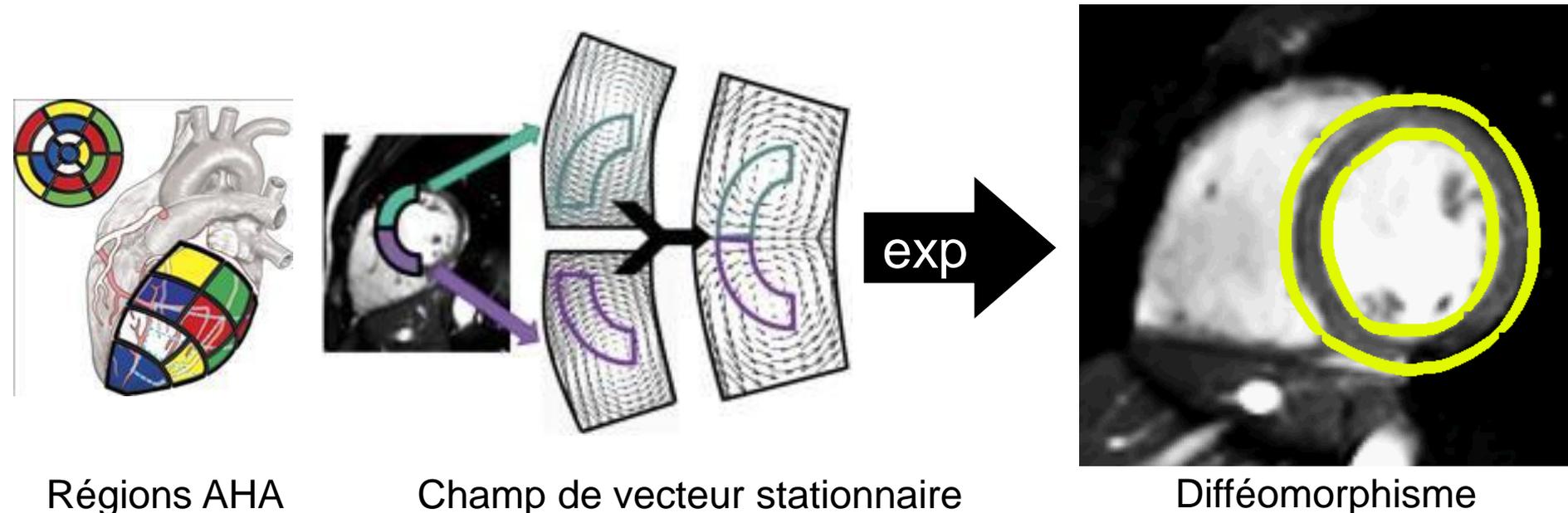
# Un formalisme puissant pour les statistiques

Recalage log-démons inter-sujet + longitudinal (cf cours 3+4)

## Difféomorphismes paramétriques [Arsigny et al., MICCAI 06, JMIV 09]

- Une transformation affine par région (transformations polyaffines)
- Suivi du mouvement cardiaque pour **chaque sujet** [McLeod, Miccai 2013]

204 paramètres au lieu de quelques millions



Régions AHA

Champ de vecteur stationnaire

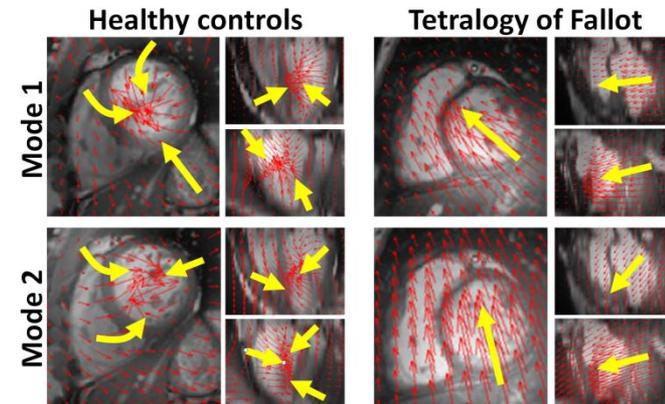
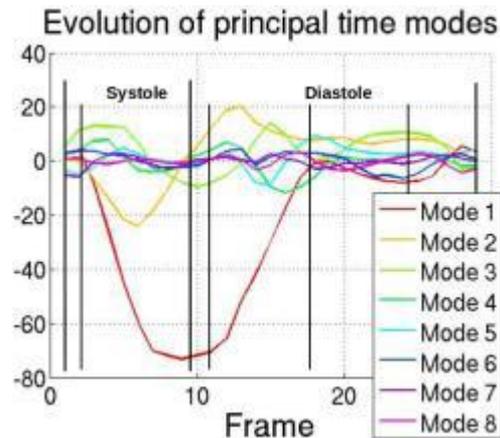
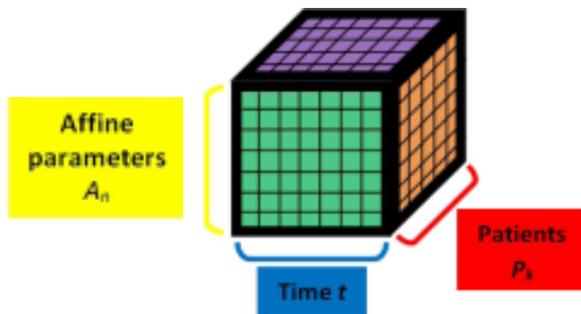
Difféomorphisme

# Un formalisme puissant pour les statistiques

## Recalage log-démons inter-sujet + longitudinal (cf cours 3+4)

## Difféomorphismes paramétriques [Arsigny et al., MICCAI 06, JMIV 09]

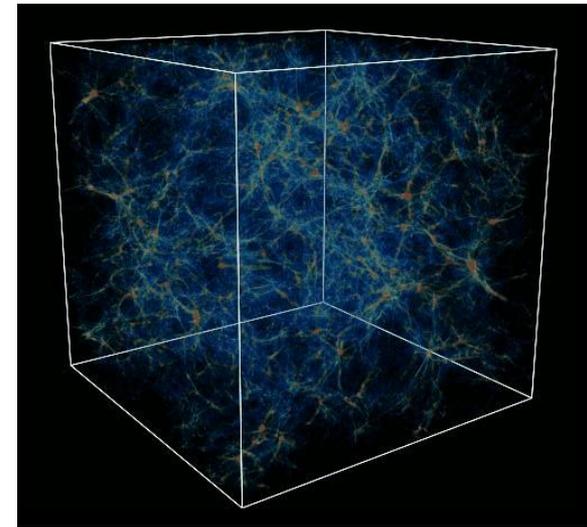
- Une transformation affine par région (transformations polyaffines)
- Suivi du mouvement cardiaque pour **chaque sujet** [McLeod, Miccai 2013]
- **Analyse de groupe** par réduction de tenseur : modèle réduit  
8 modes temporels x 3 modes spatiaux soit 24 paramètres (au lieu de 204)



# Quel espace pour les formes anatomiques ?

## Physique

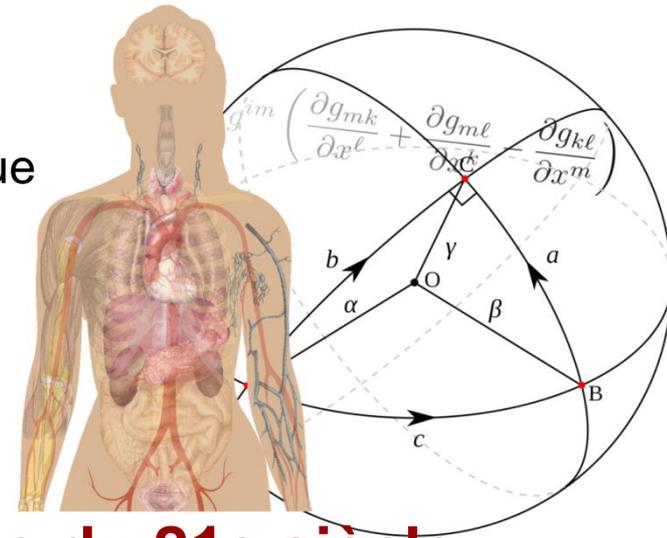
- Structure homogène et isotrope de l'espace-temps (universalité des lois) à grande échelle [Einstein, Weil, Cartan...]
- Structure hétérogène à une échelle plus fine : sous-variétés imbriquées (filaments, amas...)



Modélisation de la structure de l'Univers. NASA

## L'univers des formes anatomiques ?

- Une structure affine, riemannienne, de fibré ?
- Apprendre localement la topologie et la métrique
  - Très grande dimension et peu de données
  - Apriori géométrique très important



## Statistiques et géométrie :

## les bases algorithmiques de l'anatomie du 21e siècle