Équations aux dérivées partielles et applications

M. Pierre-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

COURS : ÉQUATIONS ET SYSTÈMES PARABOLIQUES :
QUELQUES QUESTIONS NOUVELLES

1. Introduction

Le cours, cette année, a porté sur les équations linéaires paraboliques éventuellement dégénérées du second ordre (ainsi que les processus de diffusion associés). L'objectif était de résoudre de telles équations avec des hypothèses « minimales » sur la régularité des coefficients. D'une certaine manière, la théorie développée concerne l'extension de la théorie introduite par R. Di Perna et l'auteur au cas d'équations du second ordre.

Plus précisément, nous considérons des équations du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \partial_i(a_{ij}\partial_j u) - b_i\partial_i u = 0\,,\ x \in \mathbb{R}^d,\ t \geqslant 0 \tag{1}$$

(cas sous forme divergence), ou du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_{ij}\partial_{ij} u - b_i\partial_i u = 0\,,\ x \in \mathbb{R}^d,\ t \geqslant 0 \tag{2}$$

(cas non sous forme divergence). Dans ce qui précède, la fonction inconnue $u = u(x, t)$ est à valeurs réelles, $d \geqslant 2$ (le cas de la dimension $d = 1$ étant très particulier et plus simple n'est pas abordé ici), $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ et nous utilisons la convention de sommation implicite sur les indices répétés. De façon à simplifier la présentation et les notations, nous supposons ici que les coefficients a et b ne dépendent que de x et que toutes les fonctions considérées ($a, b, u\ldots$) sont périodiques en x (de période fixée $T \in]0, \infty[^d$). De multiples variantes sont possibles : coefficients dépendant du temps, équations avec second membre et terme d'ordre 0, autres conditions aux limites comme par exemple le cas de croissance possible modérée quand $|x|$ tend vers l'infini...

Le caractère parabolique (éventuellement dégénéré) des équations (1) et (2) correspond à l'hypothèse fondamentale suivante :

$$(a_{ij}(x))_{ij} \geqslant \qquad p.p.x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

(et nous supposerons pour simplifier que $(a_{ij})_{ij}$ est symétrique p.p. en x).

Enfin, nous considérons le problème de Cauchy associé aux équations (1) ou (2) c'est-à-dire le problème de la résolution de ces équations quand on prescrit les valeurs initiales

$$u|_{t=0} = u_0 \text{ sur } \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

Dans le cas où $a \equiv 0$ (équations du premier ordre) la théorie de R. Di Perna et l'auteur assure que le problème de Cauchy admet une unique solution (en un sens que nous ne rappellerons pas ici) dès que $u_0 \in L^1$, $b \in W^{1,1}$ et div $b \in L^\infty$. Nous supposons que $a = \frac{1}{2}\sigma\sigma^T$ où $\sigma(x)$ prend ses valeurs dans l'espace des matrices $d \times k$ (où $k \geqslant 1$) : cette hypothèse est naturelle du point de vue de l'interprétation probabiliste de ces équations. Un de nos principaux résultat implique que le résultat rappelé ci-dessus pour les équations du premier ordre reste vrai pour l'équation (1) sous les mêmes hypothèses sur b et en supposant que $\sigma \in W^{1,2}$. Et, dans le cas d'équations non sous forme divergence (2), le même résultat a lieu si on rajoute l'hypothèse

$$(Tr(D\sigma)^2)_+ \in L^\infty, \text{ div } \sigma \in L^\infty \tag{5}$$

2. Résultats essentiels dans le cas d'équations sous forme divergence

Nous considérons donc le cas des équations (1) et nous supposons que

$$a = \frac{1}{2}\sigma A \sigma^T \tag{6}$$

où σ et A prennent leurs valeurs dans l'espace des matrices respectivement $d \times k$ et $k \times k$, et vérifient

$$\sigma \in W^{1,2},\ A \in L^\infty \tag{7}$$

$$\exists C_0 \geqslant 1, \quad I \leqslant A \leqslant C_0 I \quad p.p.x \tag{8}$$

Nous supposons également que b vérifie

$$b \in W^{1,1} + \sigma L^2 \tag{9}$$

c'est-à-dire qu'il existe $b^1 \in W^{1,2}$, $\Theta_1,\ldots,\Theta_2 \in L^2$ tels que

$$b_i = b_i^1 + \sum_{j=1}^{k} \Theta_j \sigma_{ij}$$

De plus, nous introduisons l'espace (dont on peut démontrer qu'il s'agit d'un espace de Hilbert et que les fonctions régulières sont denses dans cet espace) $H = \{u \in L^2,\ \sigma^T \cdot \nabla u \in L^2\}$ muni de la norme $(\int |u|^2 + |\sigma^T \nabla u|^2\, dx)^{1/2}$ et nous introduisons le plus grand $s \geqslant 1$ tel que $H \subset L^{2s}$. Bien sûr, $s = 1$ est toujours possible et les injections de Sobolev (pour $d \geqslant 3$) donnent $s = \frac{d}{d-2}$ si σ est non dégénérée (i.e. si a est uniformément définie positive). Les valeurs de s comprises strictement entre 1 et $d/d-2$ correspondent à des situations hypoelliptiques (dont nous avons donné des exemples généraux dans le cours).

Enfin, nous supposons que b vérifie en outre (6) $b = b_1 + b_2, (-\operatorname{div} b_1)_+ \in L^{\frac{s}{s-1}}$, $b_2 \in \sigma \cdot L^{\frac{2s}{s-1}}$ (en fait des extensions sont possibles en remplaçant $L^{\frac{s}{s-1}}$ et $L^{\frac{2s}{s-1}}$ par $L^\infty + L^{\frac{s}{s-1},\infty}$ et $L^\infty + L^{\frac{2s}{s-1},\infty}$ respectivement, avec des conditions de taille sur « les parties dans les espaces de Marcinkiewicz »).

Sous ces hypothèses, dans le cas où $d \geqslant 3$ (le cas $d = 2$ nécessite quelques adaptations que ne mentionnerons pas ici), les principaux résultats sont les suivants :

i) Si $u_0 \in L^\infty$, il existe une unique solution $u \in L_t^2(H) \cap L_{x,t}^\infty \cap C_t(L_x^r)(\forall r < \infty)$ (définissant donc un semi-groupe) ;

ii) cette solution vérifie pour tout $1 < p < \infty$

$$\| u(t) \|_{L^P} \leqslant e^{Ct} \| u_0 \|_{L^P} \tag{10}$$

où $C = C(p)$ ne dépend pas de u_0 ;

iii) le semi-groupe construit ci-dessus s'étend donc par continuité de manière unique à L^P et, pour tout $u_0 \in L^P$, il existe une unique solution $u \in C_t(L^P)$ telle que $u^{p/2} \in L_t^2(H)$ et u vérifie l'équation (1) au sens des solutions renormalisées.

iv) L'estimation (7) n'est vraie pour $p = 1$ que si $(-\operatorname{div} b)_+ \in L^\infty$.

v) Si $u_0 \in L^1$, on suppose que b vérifie (6) en remplaçant les espaces $L^{\frac{s}{s-1}}$ et $L^{\frac{2s}{s-1}}$ par $L^{\frac{s}{s-1},1}$ $L^{\frac{2s}{s-1},1}$ respectivement. Alors, l'estimation (7) est vraie avec e^{Ct} remplacée par Ce^{Ct}. Et, à nouveau, le semi-groupe se prolonge par continuité de manière unique à L^1. Enfin, il existe une unique solution $u \in C_t(L^1)$ telle que u vérifie (1) au sens des solutions renormalisées ainsi que

$$\sup_{R>0} \frac{1}{R} \int_0^T \int |\sigma^T \cdot \nabla u|^2 \, 1_{(|u| \leqslant R)} dx\, dt \leqslant C(T) \| u_0 \|_{L^1} \tag{11}$$

et

$$\frac{1}{R} \int_0^T \int |\sigma^T \cdot \nabla u|^2 \, 1_{(R \leqslant |u| \leqslant 2R)} \, dx\, dt \to 0 \text{ si } R \to \infty \text{ pour tout } T \in]0, \infty[\,. \tag{12}$$

Remarque : Il est possible de donner de nombreux exemples et contre-exemples qui montrent qu'en général les résultats précédents sont optimaux.

3. Le cas non sous forme divergence

Dans le cas de l'équation (2), disons, de manière un peu grossière, que les résultats précédents restent vrais à condition toutefois de supposer que $c = \frac{1}{2}\sigma\sigma^T$ (au lieu de (6)) et que σ vérifie en outre (5).

Comme on doit s'y attendre, de tels résultats conduisent à des résultats nouveaux (et essentiellement optimaux) sur l'existence et l'unicité de flots stochastiques (processus de diffusion et équations différentielles stochastiques). Nous ne détaillerons pas ici cet aspect de la théorie. Signalons uniquement que de tels flots sont définis pour presque toute condition initiale et « transportent en moyenne la mesure de Lebesgue » au sens où l'on a, pour tout ensemble mesurable A,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int dx E_x[1_A(X_t)] \leqslant C\,|A| \tag{13}$$

(pour tout $T \in]0, \infty[$).

Cours

Le cours a eu lieu du 19 octobre 2012 au 18 janvier 2013[a].

Séminaire de mathématique appliquées

– 11 janvier 2012 : Fabrice Bethuel (Laboratoire J.-L. Lions, Université Paris 6), Mouvements lents des fronts pour des équations de réaction-diffusion à puits multiples dégénérés.

– 18 janvier : Étienne Sandier (Université Paris Est Créteil), Une énergie d'interaction pour une infinité de points dans le plan : propriétés et applications.

– 25 janvier : Peter Markowich (Cambridge University), *On Wigner and Bohmian Measures.*

– 1er février : Miguel Escobedo (University of the Basque Country), *Finite time blow-up and condensation in the Nordheim equation for bosons.*

– 8 février : Nikolaos Bournaveas (University of Edinburgh), *Existence and blow-up for some kinetic and hyperbolic models of chemotaxis.*

– 15 février : Francesco Salvarani (University of Pavia), *On the long-time asymptotics for degenerate kinetic equations.*

– 22 février : Franck Sueur (Laboratoire J.-L. Lions, Université Paris 6), Sur le mouvement de solides immergés dans un fluide incompressible.

– 22 mars : Pavel Plotnikov (Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk), *Kinetic equation method for compressible Navier-Stokes problems.*

– 29 mars : Jean-David Benamou (INRIA-Rocquencourt), Une méthode de résolution numérique du « deuxième » problème aux limites associé à l'équation de Monge-Ampère.

– 5 avril : Yvon Maday (Laboratoire J.-L. Lions, Université Paris 6), Quelques résultats d'analyse numérique (*a priori* et *a posteriori*) pour le calcul de structures électroniques et applications.

– 12 avril : Francis Nier (Université de Rennes 1), À propos de la méthode des caractéristiques (extrait d'un travail en commun avec Z. Ammari).

– 19 avril : M. Vanninathan (Tata Institute of Fundamental Research, Bangalore), *A fluid-structure model coupling Navier-Stokes and Lame systems.*

– 17 mai : Andrea Moiola (Universtiy of Reading), *Trefftz-Discontinuous Galerkin Methodes for Helmholtz and Maxwell's equations.*

– 24 mai : Jean-Yves Chemin (Laboratoire J.-L. Lions, Université Paris 6), Sur le caractère isotrope de l'apparition éventuelle de singularités pour l'équation de Navier-Stokes incompressible homogène.

---

a. Les enregistrements vidéo des cours sont disponibles sur le site Internet du Collège de France : http://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/course-2012-2013.htm [Ndlr].

– 31 mai : Bard Ermentrout (University of Pittsburgh), All the Way with Gaston Floquet : A mathematical Model for Flicker-induced Visual Hallucintations.

– 7 juin : Gabriel Peyré (Ceremade, Université Paris-Dauphine), Régularisation parcimonieuse pour les problèmes inverses en imagerie.

– 14 juin : Henri Berestycki (CAMS, EHESS-Paris), L'effet d'une ligne avec diffusion rapide sur les invasions biologiques.

– 21 juin : Pierre Cardaliaguet (Ceremade, Université Paris-Dauphine), Quelques aspects des jeux à champ moyen.

Publications

Viscosity solutions and stochastic partial differential equations. Livre en préparation, en collaboration avec P.E. Souganidis.

Scalar conservation laws with rough (stochastic) fluxes. En collaboration avec B. Perthame et P.E. Souganidis.

Sur l'unicité des solutions des équations MFG. En collaboration avec J.-M. Lasry.

Stochastic averaging lemmas for kinetic equations. En collaboration avec B. Perthame et P.E. Souganidis.

Homogenization approach for the numerical simulation of periodic microstructures with defects : proof of concept. En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris.

A long time average of mean field games. En collaboration avec P. Cardaliaguet, J.-M. Lasry et A. Poretta. Networks and Heterogeneous Media, **7** (2012), p. 279-301.

Jeux à champ moyen (suite). (Résumé du Cours au Collège de France), Annuaire du Collège de France (2011-2012), Paris, 2013.

Long time average of mean field games with a nonlocal coupling. En collaboration avec P. Cardaliaguet, J.-M. Lasry et A. Poretta.

$C^{1,\alpha}$ regularity for variational problems with a convexity constraint and related issues. En collaboration avec L. Caffarelli et G. Carlier.

Efficiency fo the price formation process in presence of high frequency participants : a Mean Field Game analysis. En collaboration avec A. Lachappelle, J.-M. Lasry et Ch.-A. Lehalle.

Heterogeneous Agent Models in Continuous Time. En collaboration avec Y. Achdou, J.-M. Lasry et B. Moll.

Eikonal equations and pathwise solutions to fully non-linear SPDEs. En collaboration avec P.K. Friz, P. Gassiat et P.E. Souganidis.

Missions, invitations, conférences

Conférence plénière au SIAM annuel meeting, Minneapolis (États-Unis), 12 juillet 2012.

Conférence à l'UNAM, Mexico (Mexique), 7 août 2012.

Conférence au Congrès franco-roumain de mathématiques, Bucarest (Roumanie), 24 août 2012.

Doctorat honoris causa, Université de Bucarest, Bucarest (Roumanie), 28 août 2012.

Conférence à l'université nationale de Séoul, Séoul (Corée du Sud), 4 septembre 2012.

Conférence à l'université KAIST, Daejeon (Corée du Sud), 5 septembre 2012.

Conférence à l'université Postech, Pohang (Corée du Sud), 5 septembre 2012.

Conférence à la journée scientifique d'inauguration de PGMO, ENSTA, Palaiseau, 19 septembre 2012.

Mini-cours à l'université de Chicago (3 h), Chicago (États-Unis), 24 septembre-3 octobre 2012.

Mini-cours à l'IMA (3 h), colloque sur les jeux à champ moyen, Minneapolis (États-Unis), 12-13 novembre 2012.

Conférence à l'Institut Pauli, Vienne (Autriche), 26 novembre 2012.

Conférence au Congrès « Market Microstructure - Confronting Many View points », Paris, 10 décembre 2012.

Conférence à l'université de Valparaiso, (Chili), 18 décembre 2012.

Conférence à l'Académie des Sciences du Chili, Santiago (Chili), 19 décembre 2012.

Conférence à l'université de Santiago du Chili, (Chili), 20 décembre 2012.

Doctorat honoris causa, université de Santiago du Chili, Santiago (Chili), 20 décembre 2012.

Mini-cours à l'université de Chicago (3 h), Chicago (États-Unis), 21-30 janvier 2013.

Conférence au colloque en l'honneur d'E. Pardoux, CIRM, Luminy, 20 février 2013.

Conférence au Congrès « EDP et probabilités, université de Rennes 1, Rennes, 8 avril 2013.

Conférence au Congrès en l'honneur de B. Dacorogna, EPFL, Lausanne (Suisse), 10 juin 2013.

Conférence à l'université de Besançon, 25 juin 2013.

Responsabilités collectives et fonctions diverses

Membre de l'Académie des sciences ; de l'Académie des technologies ; de l'Académie des sciences d'Italie, d'Argentine, du Brésil et du Chili ; de l'Istituto Lombardo et de l'Académie de Naples, de la TWAS, de l'Academia Europea.

Professeur à temps partiel à l'École polytechnique.

Conseiller scientifique à l'INRIA.

Président du conseil d'administration de l'ENS.

Président du conseil scientifique de l'Institut Louis Bachelier.

Président du conseil scientifique de France Telecom jusqu'en décembre 2012.

Président du conseil scientifique de la chaire de Finance et développement durable de l'université Paris-Dauphine.

Président du conseil scientifique de ParisTech.

Président du conseil scientifique du projet EMMA.

Président du jury du prix « Science et défense ».

Membre du Haut Conseil de la science et de la technologie.

Membre du conseil scientifique de l'Institut Europlace de finance.

Membre du Scientific Advisory Panel de l'European Mathematical Society.

Membre fondateur du comité international de l'« International Summer School of Applied Mathematics », Morningside Institute, Chinese Academy of Sciences.

Membre de l'International Advisory Board de l'Institute of Mathematical Sciences de l'Imperial College.

Membre du conseil scientifique de la Fondation du Risque.

Membre du conseil d'administration de la Fondation d'entreprise Natixis.

Membre de la Société des amis du Palais de la Découverte.

Membre de l'International Advisory Board of the Scuola di Dottorato in Scienze Astronomiche, Chimiche, Fisiche e Mathematiche « Vito Volterra ».

Membre du conseil scientifique du BCAM (Basque Centre for Applied Mathematics).

Conseiller scientifique auprès de BNP PARIBAS, EADS-ST et IEF.

Fondateur de MFG R&D.

Éditeur-en-chef du *Journal de mathématiques pures et appliquées*.

Éditeur de plus de 45 revues internationales.