

Systeme de couplage à 3 ondes.

Analyse asymptotique, application à l'interaction laser-plasma

R. Sentis

CEA, Bruyères-le-Châtel.

===

Merci à G. Metivier (Bordeaux), P. Loiseau, M. Casanova, Ph. Ballereau, F. Duboc, F. Boucher (CEA), D. Pesme, S. Hüller (X) ...

===

Collège de France 21 janvier

Système de Boyd-Kadmonstev

$$(\varepsilon \partial_t + \partial_x)u = -wv,$$

$$(\varepsilon \partial_t - \partial_x)v = \bar{w}u,$$

$$(\partial_t + \partial_x)w + \eta w = u\bar{v}$$

+ Cond. bords

$$u(t, x) \in \mathbb{C}, \quad v(t, x) \in \mathbb{C}, \quad w(t, x) \in \mathbb{C}$$

$$\varepsilon > 0, \quad \eta \geq 0$$

Motivations

Fusion Confinement Inertiel

Propagation laser + interaction/plasma \Rightarrow instabilités Brillouin (et Raman)

Simulations numériques 2D ou 3D \Rightarrow hydrodynamique du plasma + propagation laser

Echelles. $\lambda_0 = 1$ ou $\frac{1}{3}\mu m$; speckle (point chaud) $\sim 8\lambda_0$; $L_{\text{plasma}} \sim 4000 \mu m$

Pour mémoire : niveau macroscopique (Geom. Optics L_{plasma})

Niveau microscopique $L_{\text{simul}} \sim 10 \rightarrow 100 \mu m$. (éq. des ondes $\Rightarrow \delta x = \lambda_0/8$) .

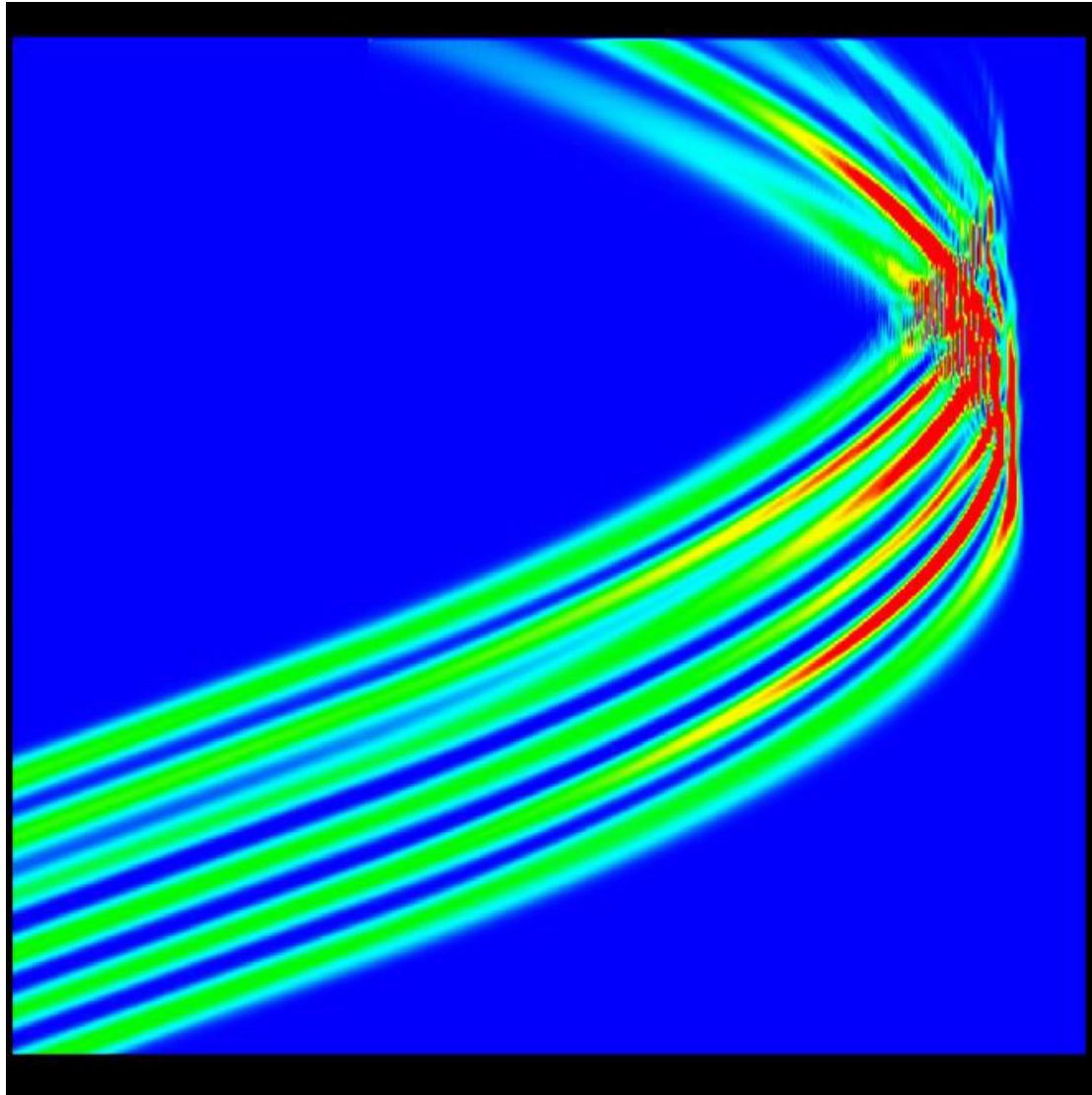


Figure 1: Intensité du laser. Modèle eq. ondes avec enveloppe temporelle (microscopique sauf pour hydrodynamique) [S. Desroziers, F. Nataf, R.S., J.C.P. '08] ==>très cher en 2D.

Niveau mésoscopique $L_{\text{simul}} \sim 100 \longrightarrow 2000 \mu\text{m}$ ($\delta x \sim \lambda_0$)

Calcul avec HERA-3D sur TERA-100 à Bruyères (6^{eme} architecture mondiale) avec 1000
coeurs sur 10 h

Maillage $700 \cdot 10^6$ mailles, pour 100 ps [P. Loiseau].

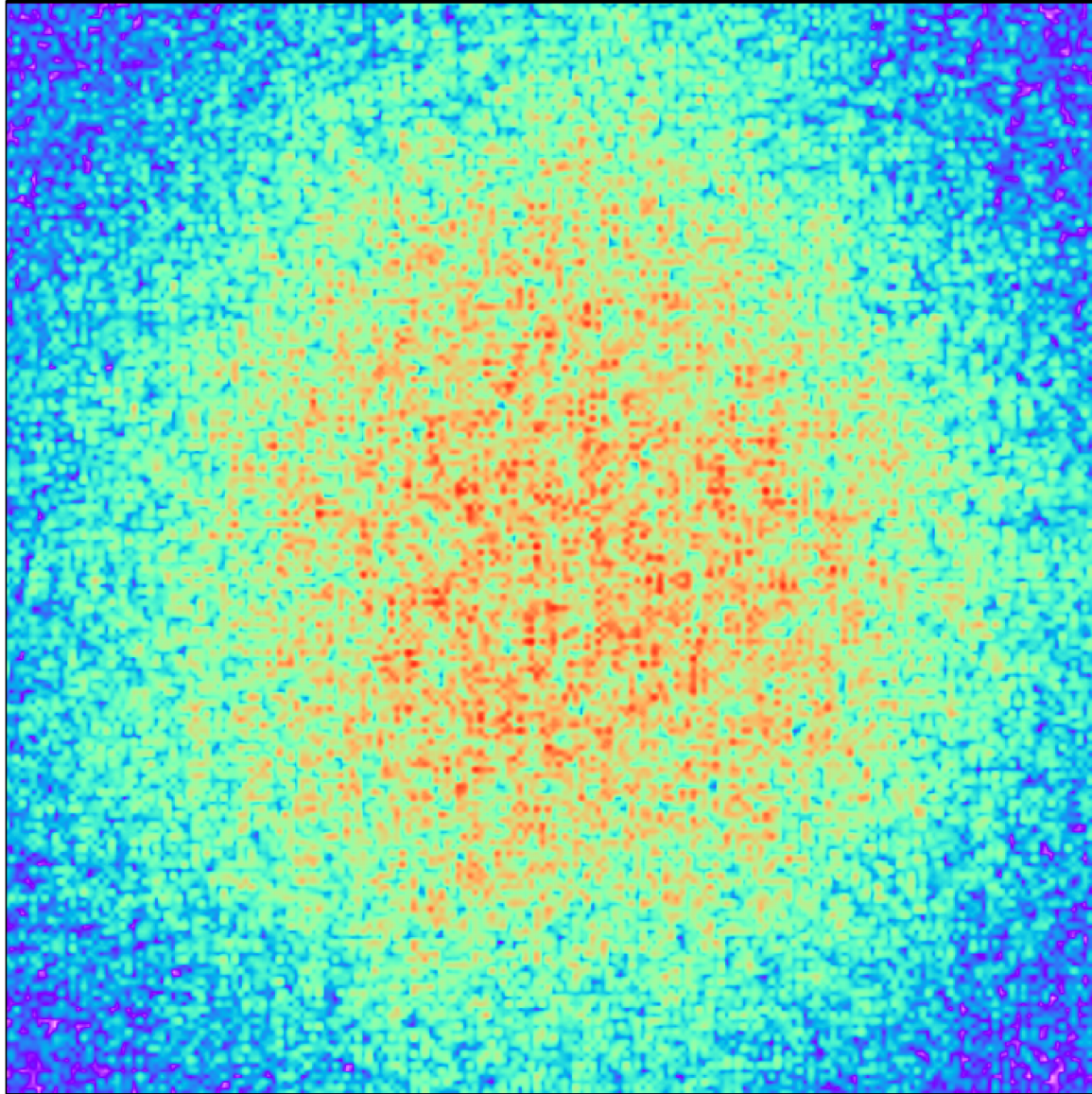


Figure 2: Intensité laser sur bord entrant de la boîte de simulation.

Mais $\delta t = \delta x / c_{\text{lumière}}$ [= 1/170 ps , ici] très petit par rapport au temps caractéristique

+++++

Plan

1. Dérivation du modèle: couplage onde acoustique plasma avec champ laser
2. Analyse du système de couplage à 3 ondes
3. Analyse asymptotique
4. Numérique, application à l'interaction laser-plasma

1. Dérivation du modèle

■ Modèle Brillouin à 4 ondes

- **Plasma.** Densité $(1 + n)N_{\text{ref}}$ avec $n \ll 1$. Vitesse : q

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}n + \nabla q &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}q + c_s^2 \nabla n + 2\eta q &= -\gamma_p \nabla |\Psi|^2, \quad \text{force pondéromotrice} \end{aligned}$$

Ψ champ (électrique) laser ; c_s vitesse du son, η coef. ammort. Landau, γ_p c^{te}

- **Approximation paraxiale du champ $\Psi(\mathbf{x})$**

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi - c^2 \Delta \Psi + \omega_0^2 N_{\text{ref}}(1 + n)\Psi = 0$$

Fréq. laser $\omega_0 \gg T_{\text{char}}^{-1}$. Env. temp^{le} + Approximation WKB

Direction pro^{on} $x = \mathbf{x}_1 \Rightarrow$ nombre d'onde $k_p = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{1 - N_{\text{ref}}}$, vitesse de groupe $c_g = \frac{c}{\sqrt{1 - N_{\text{ref}}}}$

Champ $\Psi \Rightarrow$ 2 ondes. $\Psi(t, \mathbf{x}) = \left[E(t, \mathbf{x})e^{ik_p x - i\omega_0 t} + c.c. \right] + \left[V(t, \mathbf{x})e^{-ik_p x - i\omega_0 t} + c.c. \right]$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_g \frac{\partial}{\partial x} \right) E - \frac{ic^2}{2\omega_0} \Delta_{\perp} E = -i \frac{\omega_0 N_{\text{ref}}}{2} [n e^{-i2k_p x} V + n E] \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_g \frac{\partial}{\partial x} \right) V - \frac{ic^2}{2\omega_0} \Delta_{\perp} V = -i \frac{\omega_0 N_{\text{ref}}}{2} [n e^{i2k_p x} E + n V] \quad (2)$$

$$\nabla|\Psi|^2 = \partial_x \left[e^{i2k_p x} E\bar{V} + c.c. \right] + \nabla_{\perp}|E|^2 + \dots \simeq 2ik_p E\bar{V} e^{i2k_p x} + c.c. \Rightarrow \text{onde ionique } 2k_p$$

■ Du modèle à 4 ondes au modèle à 3 ondes

$$ICI \text{ 1D+ adimensionnement} \quad c_s \mapsto 1, \quad \varepsilon = c_s/c_g \simeq .002$$

$$E \mapsto iu, \quad V \mapsto v, \quad n \mapsto n \quad q \mapsto q.$$

Couplage de (1,2) avec les ondes acoustiques ioniques

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n + \frac{\partial}{\partial x} q &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} q + \frac{\partial}{\partial x} n + 2\eta q &= u\bar{v}e^{2ik_p x} + c.c. \end{aligned}$$

$$\text{On pose : } \frac{n+q}{2} = we^{-2ik_p x} + c.c., \quad \frac{n-q}{2} = se^{-2ik_p x} + c.c.$$

Analyse de stabilité $\{v, w, s\}$ (avec u constant) $\implies s$ négligeable alors que w croît exp.

Modèle initial $\{u, v, w, s\} \implies$ *Modèle Boyd-K* $\{u, v, w\}$

Grands codes paralleles 3D (HERA , PF3D)

$$(\varepsilon\partial_t + \partial_x)u + i\alpha\Delta_{\perp}u = -\Gamma wv + \dots$$

$$(\varepsilon\partial_t - \partial_x)v + i\alpha\Delta_{\perp}v = \Gamma\bar{w}u + \dots$$

$$(\partial_t + \partial_x)w + ik_s w + \eta w = \Gamma u\bar{v} - w\partial_x \log \Gamma + \dots$$

$\Gamma = N_e/N_{\text{ref}} + \text{hydrodynamique macroscopique.}$

Longueur char. = $0.4 \mu\text{m}$. Phys. char. time = 0.7 ps .

Boite de simulation $[0, L] \times D$. Cond. au bords

$$u(t, 0) = u^{\text{in}}, \quad v(t, L) = 0, \quad w(t, 0) = 0$$

Difficultés Numériques : Diffraction, u dans un sens (vitesse ε^{-1}), v dans l'autre.

Dans HERA pour le moment, on prend $\delta t = \varepsilon \cdot \delta x \ll$ temps caractéristique du système qui est en $\sqrt{\varepsilon} L_{\text{cara}} \dots$

2. Analyse du système de couplage à 3 ondes

Ce système 1D est utilisé en physique des plasmas depuis :

Kadomtsev, 1964

Boyd-Turner, 1972

Novikov-Zakharov, 1984 (étude s. c. i. sur \mathbf{R} entier)

Eliseev et al. PoP (1995) ; Mounaix et al. Phys Rev. (1997); Huller, (2000), (2006)...; Loiseau et al. (2008)

Berger-Still et al. PoP (1998), .. ColinM, Colin T, 2006 (for Raman), ..

Ce système de couplage intervient en turbulence-plasma (aussi, cordes vibrantes)...

$$(\varepsilon \partial_t + \partial_x)u = -vw$$

$$(\varepsilon \partial_t - \partial_x)v = u\bar{w}$$

$$(\partial_t + \partial_x)w + \eta w = u\bar{v}$$

En 1D, sur l'intervalle $[0, L]$, on peut voir les principales difficultés

cond. bords	$u(t, 0) = u^{\text{in}},$	$v(t, L) = 0,$	$w(t, 0) = 0$
-------------	----------------------------	----------------	---------------

cond. init.	$u _{t=0} = u_0,$	$v _{t=0} = 0,$	$w _{t=0} = w_0.$
-------------	-------------------	-----------------	-------------------

Si $w_0 = 0$, solution triviale instable. Relations de bilan

$$\begin{aligned}\varepsilon \partial_t (|u|^2 + |v|^2) + \partial_x (|u|^2 - |v|^2) &= 0; \\ \partial_t (|w|^2 + \varepsilon |u|^2) + 2\eta |w|^2 + \partial_x (|w|^2 + |u|^2) &= 0.\end{aligned}$$

$|u|^2 + |v|^2 =$ energie laser totale ; $|w|^2 + \varepsilon |u|^2$ reliée à la conservation d'implusion.

Prop. 1. Si u_0, w_0 sont dans L_x^2 , il existe une unique solution $(u^\varepsilon, v^\varepsilon, w^\varepsilon)$ in $[L_{t,x}^2]^3$.

{Intégrabilité Compen^{on}: $\exists C_0$ t.q. si $u|_{\partial\mathcal{D}}, v|_{\partial\mathcal{D}}$ sont dans L_t^2 ; $(\varepsilon \partial_t + \partial_x)u, (\varepsilon \partial_t - \partial_x)v \in L_{t,x}^2$

$$\|uv\|_{L_{t,x}^2} \leq C_0 \left[\|u|_{\partial\mathcal{D}}\|_{L^2}^2 + \|(\varepsilon \partial_t + \partial_x)u\|_{L_{t,x}^2}^2 \right] \left[\|v|_{\partial\mathcal{D}}\|_{L^2}^2 + \|(\varepsilon \partial_t - \partial_x)v\|_{L_{t,x}^2}^2 \right]. \quad \}$$

Hypothèse $u_0, w_0 \in L_x^\infty$; alors la solution $(u^\varepsilon, v^\varepsilon, w^\varepsilon)$ est dans $[L_{t,x}^\infty]^3$.

3. Analyse Asymptotique

3 échelles de temps $\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}, 1$. Système du type relaxation

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U} + \mathcal{L}_0(\mathcal{U}) + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_1(\mathcal{U}) = 0$$

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_0(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x w + \eta w - u\bar{v} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_1(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \partial_x u + wv \\ -\partial_x v - \bar{w}u \\ 0 \end{pmatrix}$$

La limite doit être dans le noyau de \mathcal{L}_1 .

De fait, le système limite s'écrit

$$\partial_x u_* = -w_* v_*, \quad u_*(t, 0) = u^{in} \quad (3)$$

$$-\partial_x v_* = \bar{w}_* u_*, \quad v_*(t, L) = 0, \quad (4)$$

$$(\partial_t + \partial_x) w_* + \eta w_* = u_* \bar{v}_*, \quad w_*(t, 0) = 0 \quad (5)$$

Une seule condition initiale : $w_*(t = 0, \cdot) = w_0(\cdot)$.

$\forall w$, notons $\Lambda(w) = u_* \overline{v_*}$ où u_*, v_* solution de (3,4). Écriture $(\partial_t + \partial_x)w_* + \eta w_* = \Lambda(w_*)$

Prop 2. Si w, \tilde{w} bornés dans L_x^∞ , on a $\|\Lambda(w) - \Lambda(\tilde{w})\|_{L^\infty} \leq C \|w - \tilde{w}\|_{L^2}$.

$\exists!$ solution dans L_x^∞ ; de plus, on a

$$2 \operatorname{Re} \int \Lambda(w_*) \overline{w_*} dx \leq |u^{in}|^2, \quad \partial_x |u_*|^2 = \partial_x |v_*|^2. \quad (6)$$

Corol. Pour tout t , on a $|v_*(t, 0)| < |U^{in}|$.

Théorème (G. Metivier, R. S.) Supposons u_0, w_0 réguliers, alors si $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(u^\varepsilon, v^\varepsilon, w^\varepsilon) \rightarrow (u_*, v_*, w_*) \quad \text{in } [L_{t,x}^2]^3$$

Pas évident physiquement : vitesse lumière infinie; l'échelle de temps en $\varepsilon^{1/2}$ n'existe plus
 \Rightarrow Couche Initiale. Difficultés : passage à la limite dans termes non-linéaires.

Lemme. Pour tout ε , on a

$$\begin{aligned} \|w\|_{L_{t,x}^\infty} &\leq C, & \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{L_{t,x}^\infty} &\leq C, & \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{L_{t,x}^\infty} &\leq C. \\ \|\partial_x u\|_{L_{t,x}^2} &\leq C, & \|\partial_x v\|_{L_{t,x}^2} &\leq C, & \|\partial_x w\|_{L_{t,x}^2} &\leq C, & \varepsilon \|\partial_t u\|_{L_{t,x}^2} &\leq C. \end{aligned}$$

[Comm. Math. Physics, 2011.]

4. Numérique: with $\delta t \sim \delta x \sqrt{\varepsilon}$

Principle: According to the previous theo, time derivative $\partial_t u, \partial_t v$ are perturbative terms.

At each time step, implicit solver

$$\text{Find } u, v \quad \text{tq} \quad \partial_x u + vW = \frac{\varepsilon}{\delta t} u^{(n)} - \frac{\varepsilon}{\delta t} u, \quad -\partial_x v - u\overline{W} = \frac{\varepsilon}{\delta t} u^{(n)} - \frac{\varepsilon}{\delta t} u.$$

Remark. Discretization with space marching technique

$$\partial_x u = \frac{\varepsilon}{\delta t} u^{(n)} - \frac{\varepsilon}{\delta t} u, \quad u(0) = u^{in}$$

Set $\beta = \varepsilon \delta x / \delta t$ (reverse CFL number, small) \Rightarrow Start with $u_{j=0}$, then

$$u_{j+1} = u_j(1-\beta)\omega(u_j) + \beta u_j^{(n)} \chi(u_j); \quad \omega(u_j) = \frac{1 + \beta \psi_j}{|1 + \beta \psi_j|}, \quad \chi(u_j) = \frac{\beta + \overline{\psi_j}}{|\beta + \psi_j|}, \quad \psi_j = \frac{\overline{u_j} u_j^{(n)}}{|u_j u_j^{(n)}|}$$

First idea. Solve the two ODEs: $\phi_{j+1/2} = \frac{\delta x}{2} W_{j+1/2}$

$$\begin{aligned} u_{j+1} - \omega(u_j)u_j + (v_j + v_{j+1})\phi_{j+1/2} &= \beta[u_j^{(n)}\chi(u_j) - u_j\omega(u_j)], \\ v_j - \Omega(v_{j+1})v_{j+1} - (u_j + u_{j+1})\overline{\phi_{j+1/2}} &= \beta[v_{j+1}^{(n)}\Xi(v_{j+1}) - v_{j+1}\Omega(v_{j+1})]. \end{aligned}$$

Better coupling. We want that (6) holds if β is set to 0.

Downstream step from $j = 1$ to $j = j_{\max}$ (accounting for diffraction \mathcal{D} in 2 or 3D)

$$u_{j+1}^1 = \omega_j u_j^1 - \phi_{j+\frac{1}{2}}(v_j^0 + \Omega_{j+1}^0 v_{j+1}^0) + \beta f_j^1 + \dots \mathcal{D}_j^{u,1}, \quad f_j^1 = u_j^{(n)}\chi(u_j^1) - \omega_j u_j^1$$

Upstream step from $j = j_{\max}$ to $j = 1$;

$$v_j^1 = \Omega_{j+1} v_{j+1}^1 + \overline{\phi_{j+\frac{1}{2}}}(u_{j+1}^1 + \omega_j u_j^1) + \beta g_{j+1}^1 + \dots \mathcal{D}_{j+1}^{v,2}$$

$$u_{j+1}^q = \omega_j u_j^q - \phi_{j+\frac{1}{2}}(v_j^{q-1} + \Omega_{j+1} v_{j+1}^{q-1}) + \beta f_j^q + \dots \mathcal{D}_j^{u,q}$$

$$v_j^q = \Omega_{j+1} v_{j+1}^q + \lambda \overline{\phi_{j+\frac{1}{2}}}(u_{j+1}^q + \omega_j u_j^q) + \beta g_{j+1}^q + \dots \mathcal{D}_{j+1}^{v,q}$$

where λ is a corrector in order to satisfy (6).

Résultats Numériques.

Caractéristiques physiques. $T_{\text{char}} \sim 1 \text{ ps}$, $c_s = .002c \simeq 6 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$, $L_{\text{char}} \sim 0.6 \mu\text{m}$.

* Calcul cas d'école en 1D

Profils de $|u|^2$ à différents temps. Rétrodiffusion $r(t) = |v(t, 0)|^2$ Sensibilité à η .

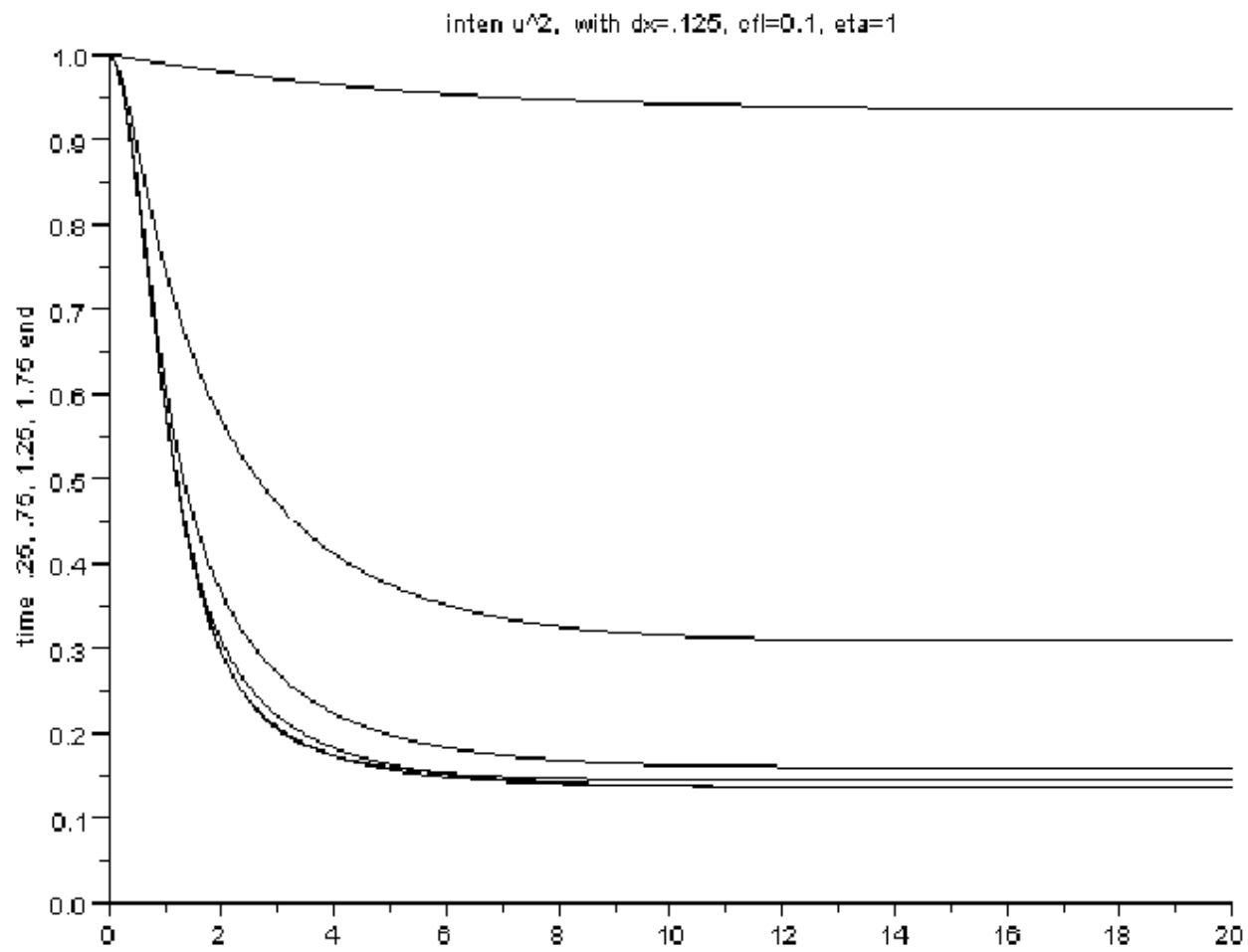


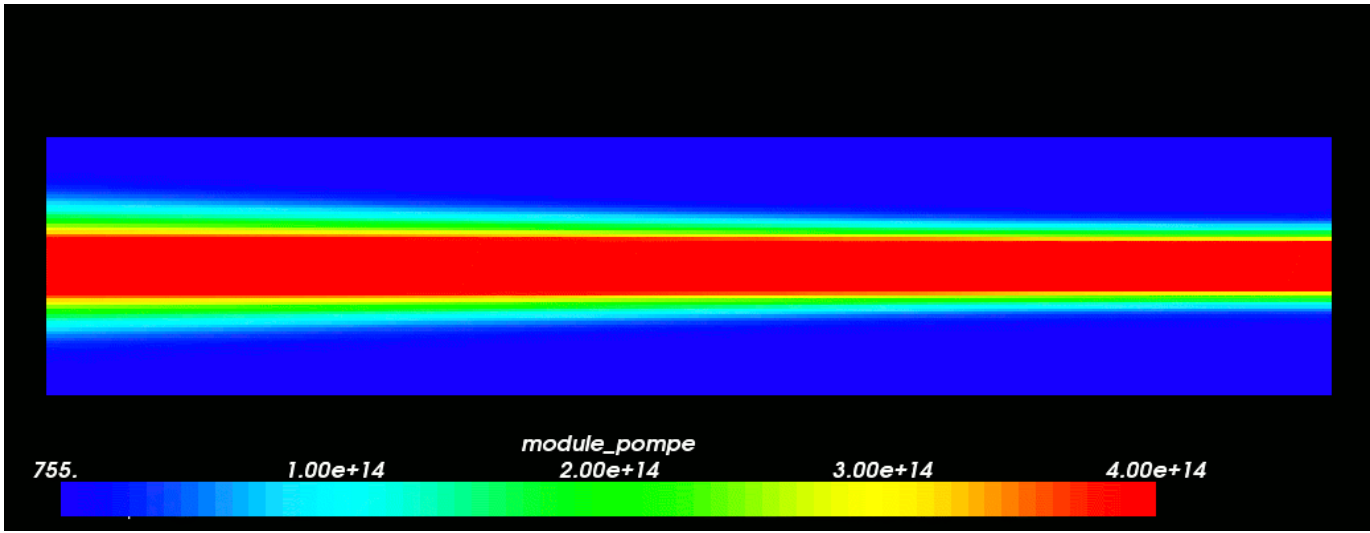
Figure 3: Profiles of $|u|^2$, versus x -variable for $\eta = 1$ at different time values

* Calcul mono-spekile en 2D ($L_{\text{tot}} \simeq 100 \mu\text{m}$).

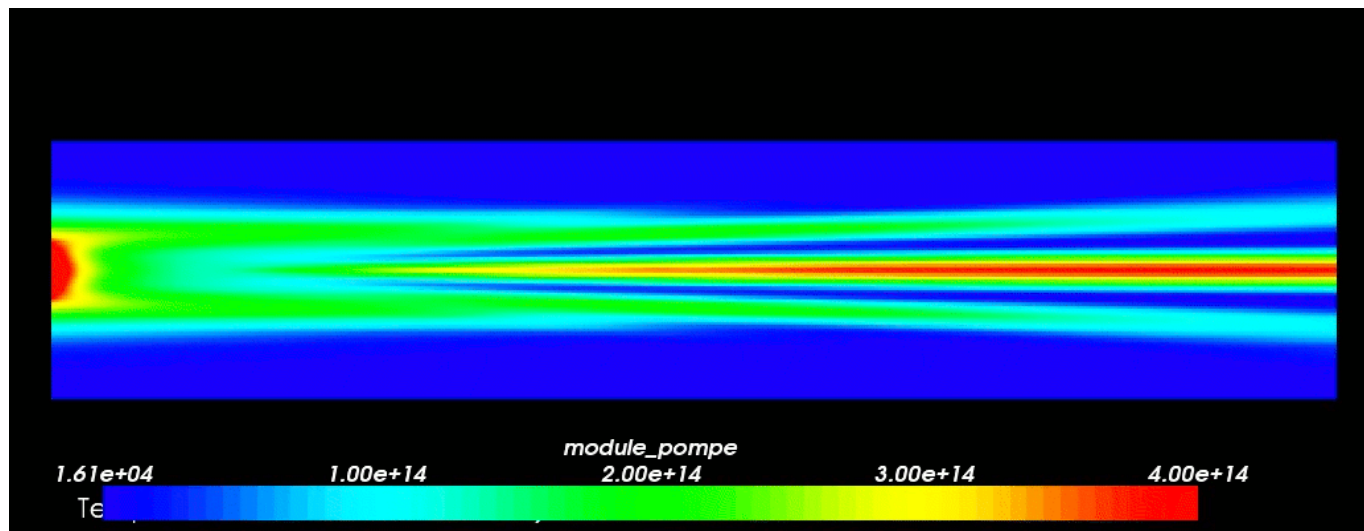
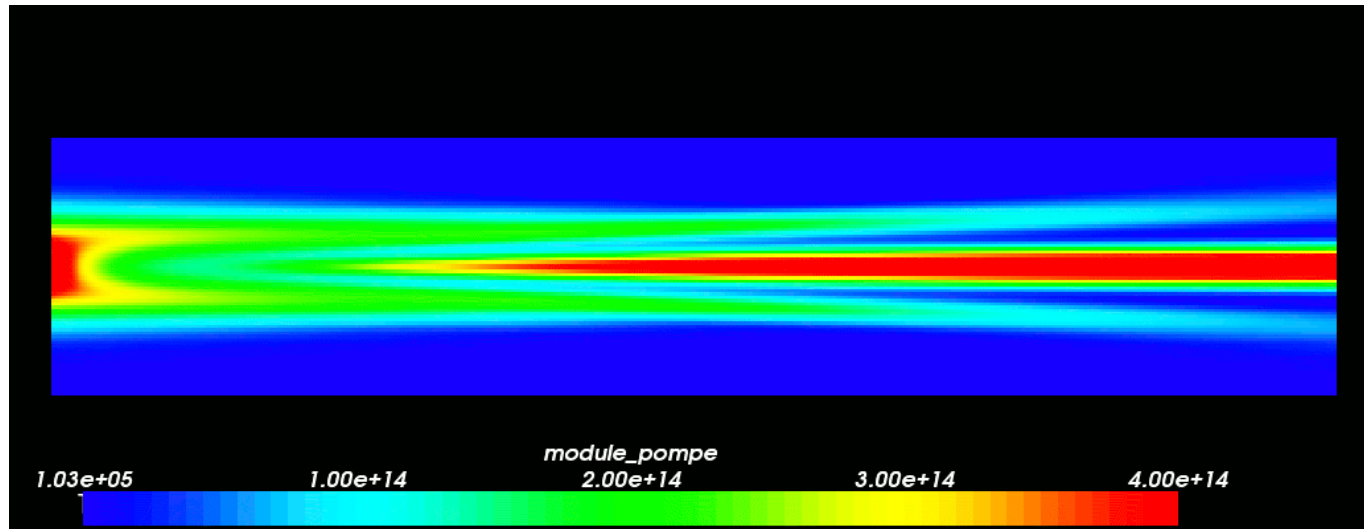
$\delta x = 0.2 \mu\text{m}$. On prend $\delta t \simeq 0.012 \text{ ps}$. $\Rightarrow \text{CFL}_{\text{hydro}} = .035$ (15 fois plus grand que $\varepsilon = .0024$)

Au lieu de $15 * 3 = 45$ marches en espace, seulement $1 + 2 * 3 = 7$ marches en espace.

Images de l'intensité $|u|^2$ aux instants 5, 9, 11 ps et $|v|^2$ à l'instant 11 ps



+



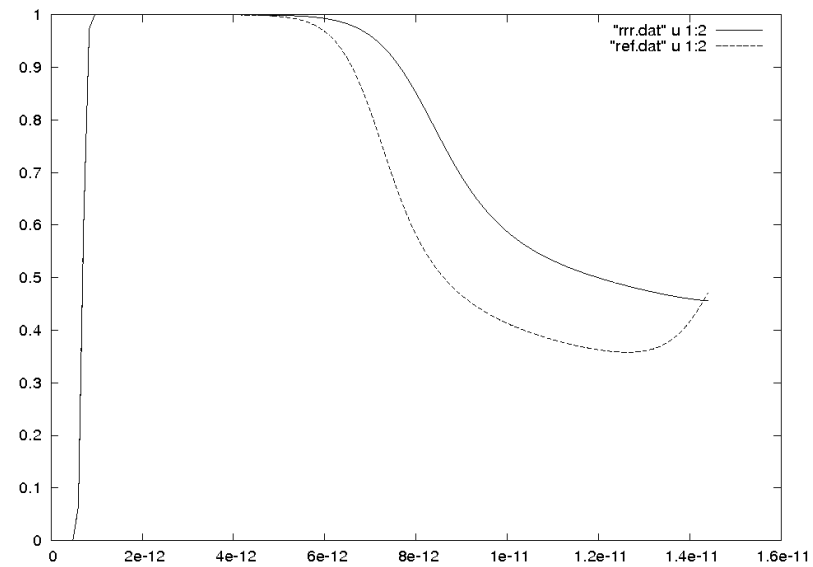
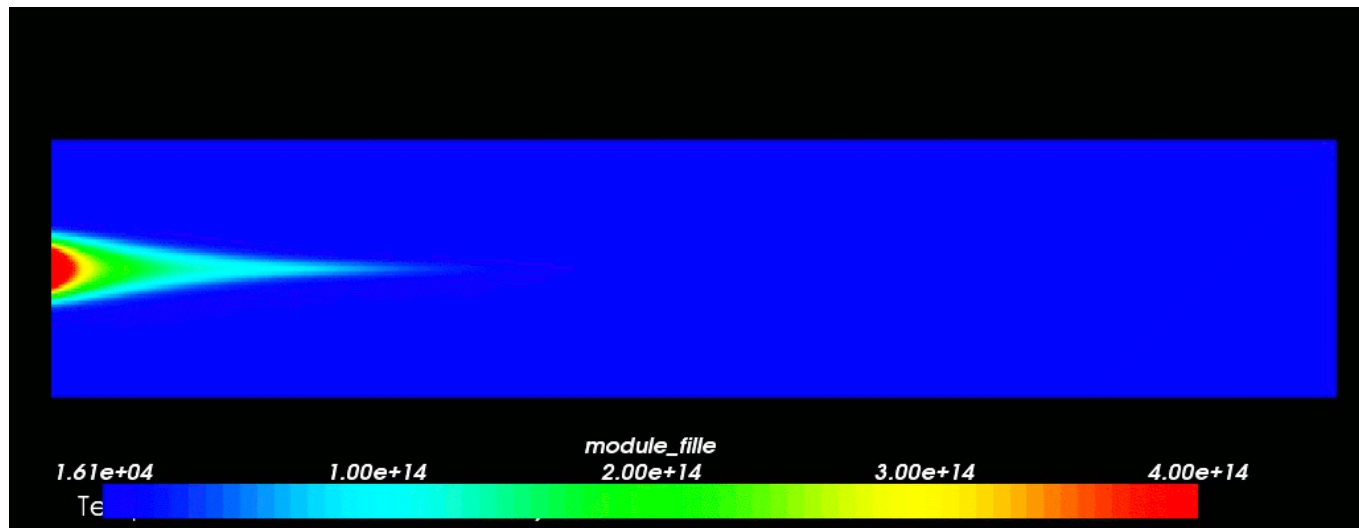


Figure 4: Intensité transmise avec deux valeurs de η .

Conclusions.

- Intérêt du système de Boyd-K. : Γ variable, données aléatoires, autre modèle pour Landau
- Instabilité Raman : w onde plasma électronique, $\varepsilon = v_{th,e}/c$ (plus grand).

$$(\varepsilon\partial_t + \partial_x)u = -wv\Gamma e^{-i\rho t} - i\alpha\Delta_{\perp}u + \dots$$

$$(\varepsilon\partial_t - \partial_x)v = \bar{w}u\Gamma e^{i\rho t} - i\alpha\Delta_{\perp}u + \dots$$

$$(\partial_t + \partial_x)w + \eta w = \Gamma \left\{ \frac{\partial\omega}{\partial\chi}(u, k\lambda_D, \dots) \right\} u\bar{v} + \dots$$

-Numérique : Dérivée en temps vue comme perturbation. Implantation 3D

Réf.

R.S. : Note C. R. Acad. Sci., Paris, Mathématique, Ser I, 347, p. 933 (2009).

G. Metivier, R.S. : Comm. Mathematical Physics (2011) //hal.archives-ouvertes.fr

R.S. : Mathematical Models and Methods for Plasma Physics. Fluid Models (livre en cours)