

Contrôlabilité de systèmes paraboliques avec un couplage non linéaire

Lionel Rosier

Institut Élie Cartan, Université Nancy 1

Séminaire de Mathématiques Appliquées
Collège de France, le 11/12/2009

Problème étudié

On considère un système de deux équations paraboliques semilinéaires

$$\begin{aligned}u_t - \Delta u + F(u, v) &= 1_\omega h & (t, x) \in (0, T) \times \Omega \\v_t - \Delta v + G(u, v) &= 0 & (t, x) \in (0, T) \times \Omega \\u = v = 0 & & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega \\u(0, \cdot) = u_0, \quad v(0, \cdot) &= v_0.\end{aligned}$$

et on cherche s'il existe un contrôle $h = h(t, x)$ tel que

$$u(T, \cdot) = v(T, \cdot) = 0 \quad (\text{contrôlabilité à } 0).$$

On se focalise sur le cas où G est **non linéaire**.

Travail en collaboration avec

- ▶ **Sergio Guerrero** (Université Paris 6)
- ▶ **Jean-Michel Coron** (Université Paris 6)

Systèmes linéaires en dimension finie

On considère le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bh(t) \quad t \in (0, T)$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $h = h(t) \in \mathbb{R}^m$

On introduit la matrice de Kalman

$$K = [A|B] = [A^{n-1}B, A^{n-2}B, \dots, AB, B] \in \mathbb{R}^{n \times nm}.$$

Kalman [1963] La contrôlabilité à 0 en temps T est équivalente à la condition de rang :

$$\text{rank}(K) = n.$$

Contrôlabilité à 0 de systèmes paraboliques

$$w_t = (D\Delta + A)w + 1_\omega Bh \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega$$

$$w = 0 \quad (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega$$

$$w(0, \cdot) = w_0$$

$$w = w(t, x) \in \mathbb{R}^n, h = h(t, x) \in \mathbb{R}^m, \omega \subset\subset \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ D = \text{diag}(d_{ij} > 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Soit $(\lambda_p)_{p \geq 1}$ la suite des valeurs propres de $-\Delta$ avec cd. de Dirichlet, et soit $L_p = -\lambda_p D + A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Ammar-Khodja, Benabdallah, Dupaix, González-Burgos [2007]. La contrôlabilité à 0 est équivalente à

$$\text{rank}[L_p|B] = n \quad \forall p \geq 1.$$

Exemple : $D = Id, \text{rank}[A|B] = n$.

Contrôle de systèmes paraboliques semilinéaires

- ▶ Lorsque le système linéarisé en 0 est contrôlable à 0, un argument classique de perturbation permet de prouver la contrôlabilité (locale) à 0 du système semi-linéaire.
- ▶ Cependant, certains systèmes exhibent un couplage **non linéaire**.

Système de réaction-diffusion associé à une réaction chimique réversible

- ▶ **P. Érdi and J. Tóth, Mathematical Models of Chemical Reactions, 1989**

$$\begin{aligned}u_t &= d_1 \Delta u - \alpha(u^k - v^m) + 1_\omega h \\v_t &= d_2 \Delta v + \beta(u^k - v^m) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega\end{aligned}$$

- ▶ $d_1, d_2, \alpha, \beta > 0, k, m \in \mathbb{N}^*$.
- ▶ Réaction chimique réversible sous-jacente: $kA \rightleftharpoons mB$.
- ▶ On prouvera la contrôlabilité à 0 lorsque k est **impair**.

Équation de Ginzburg-Landau

$$\begin{aligned}w_t &= (1 + i\alpha)\Delta w + R w - (1 + i\beta)|w|^2 w + 1_\omega h \\w &= 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega\end{aligned}$$

- ▶ Modèle simple de turbulence.
- ▶ $w = w(t, x) \in \mathbb{C}$, $h = h(t, x) \in \mathbb{C}$. Coefficients $R, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- ▶ Contrôlabilité à 0 prouvée par **LR, B.-Y. Zhang [2009]; Fu [2009]**.
- ▶ Si le contrôle h est supposé prendre des valeurs **réelles**, écrivant $w = u + iv$, on arrive à

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u - \alpha \Delta v + R u - (u^2 + v^2)(u - \beta v) + 1_\omega h \\v_t &= \alpha \Delta u + \Delta v + R v - (u^2 + v^2)(\beta u + v) \\u = v &= 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega\end{aligned}$$

- ▶ Si $\alpha \neq 0$, la contrôlabilité à 0 s'obtient par **linéarisation**.

Équation de Ginzburg-Landau (2)

- ▶ Avec $\alpha = 0$ le système s'écrit

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u + Ru - (u^2 + v^2)(u - \beta v) + 1_\omega h \\v_t &= \Delta v + Rv - (u^2 + v^2)(\beta u + v) \\u = v &= 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega\end{aligned}$$

- ▶ Si $\beta = 0$, le système **n'est pas contrôlable à 0**, car pour $v_0 \geq 0$, si $|R - (u^2 + v^2)| \leq C$ pour $0 < t < T$, on a

$$v(t, \cdot) \geq e^{t(\Delta - C)} v_0.$$

- ▶ Si $\beta \neq 0$, la contrôlabilité à zéro sera **prouvée**.
Remarque : Le linéarisé ne présente plus de couplage donc n'est pas contrôlable.

Résultat principal

Considérons le système

$$(S) \begin{cases} u_t - \Delta u + F(u, v, \nabla u, \nabla v) = 1_\omega h & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ v_t - \Delta v + G(u, v) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

où $u = u(t, x) \in \mathbb{R}$, $v = v(t, x) \in \mathbb{R}$, $h = h(t, x) \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$
 $\omega \subset\subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+2}, \mathbb{R})$, $G \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,
 $F(0, 0, 0, 0) = G(0, 0) = 0$.

Si, pour un entier k , $\frac{\partial^i G}{\partial u^i}(0, 0) = 0$ pour $0 \leq i \leq 2k$, mais
 $\frac{\partial^{2k+1} G}{\partial u^{2k+1}}(0, 0) \neq 0$, alors (S) est localement contrôlable à zéro.

Estimation sur le contrôle

Pour tout $p \in (n + 2, \infty)$ et $T > 0$, il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour

$$|u_0|_{W^{1,\infty}(\Omega)} < \varepsilon, \quad |v_0|_{W^{1,\infty}(\Omega)} < \varepsilon,$$

il existe un contrôle $h \in L^p((0, T) \times \Omega)$ vérifiant

$$|h|_{L^p((0,T) \times \Omega)} \leq C \left(|u_0|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + |v_0|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^{\frac{1}{2k+1}} \right)$$

et tel que la solution (u, v) de (S) et $(u, v)_{t=0} = (u_0, v_0)$ vérifie $(u, v)_{t=T} = (0, 0)$.

Remarques

- ▶ Résultat déjà connu pour $k = 0$ (**linéarisation**)
- ▶ Résultat **faux** si $2k + 1$ est remplacé par $2k$: Considérer

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 1_\omega h & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ v_t - \Delta v = u^2 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } (0, T) \times \Omega \end{cases}$$

Par le **principe du maximum**, $v_0 \geq 0$ implique $v(t, \cdot) \geq e^{t\Delta} v_0$ pour $t \geq 0$, donc la contrôlabilité à 0 est en défaut.

Esquisse de la preuve pour un problème type

$$(S) \begin{cases} u_t - \Delta u = 1_\omega h & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ v_t - \Delta v = u^3 & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

La preuve est basée sur la **méthode du retour** introduite par **Jean-Michel Coron** pour les équations d'Euler des fluides parfaits incompressibles.

Nous linéarisons autour d'une trajectoire **régulière non nulle** (\bar{u}, \bar{v}) telle que

$$(\bar{u}, \bar{v})_{t=0} = (0, 0) = (\bar{u}, \bar{v})_{t=T}$$

Étapes de la preuve

- ▶ Étape 1 : Construction d'une trajectoire de référence
- ▶ Étape 2 : Contrôlabilité du linéarisé le long de cette trajectoire
- ▶ Étape 3 : Argument de point fixe

Étape 1 : Construction d'une trajectoire de référence

Proposition: Soit $\rho > 0$. Il existe une fonction $\bar{v} = \bar{v}(t, x)$, $\bar{v} \neq 0$ telle que

$$\begin{aligned} \bar{v} &\in C_c^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n), \quad \bar{v}(t, x) = 0 \text{ pour } |t| \geq \rho \text{ ou } |x| \geq \rho \\ \bar{v}_t &= \Delta \bar{v} + \bar{u}^3 \quad \text{avec } \bar{u} \in C_c^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n) \end{aligned}$$

- ▶ Le contrôle correspondant est $\bar{h} = \bar{u}_t - \Delta \bar{u} \in C_c^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$
- ▶ ρ arbitrairement petit. Translater pour avoir $\text{supp}(\bar{h}) \subset (0, T) \times \omega$.
- ▶ La principale difficulté est la **régularité** de $\bar{u} = (\bar{v}_t - \Delta \bar{v})^{1/3}$.

Développement de la solution

- ▶ Par un argument de scaling, on peut prendre $\rho = 1$
- ▶ Soit $r = |x|$. On cherche $\bar{v} = \bar{v}(t, r)$ avec $\bar{v} \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_r^+)$, $\bar{v}(t, r) = 0$ pour $|t| \geq 1$ ou $r \geq 1$, et

$$\bar{u} = (\bar{v}_t - \bar{v}_{rr} - \frac{n-1}{r} \bar{v}_r)^{\frac{1}{3}} \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_r^+).$$

- ▶ Cherchons \bar{v} sous la forme

$$\bar{v}(t, r) = \sum_{i=0}^3 f_i(t) g_i(z)$$

avec $z = r/\lambda(t)$, où

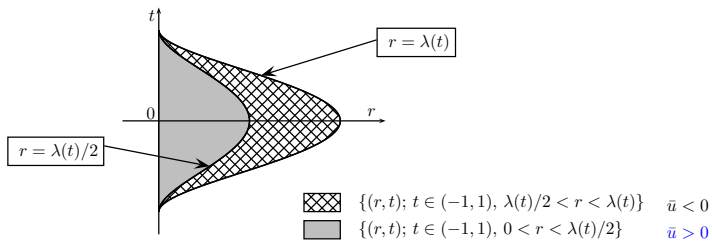
$$\lambda(t) = \varepsilon(1 - t^2)^m$$

$$f_0(t) = \mathbf{1}_{(-1,1)}(t) e^{-\frac{1}{1-t^2}}$$

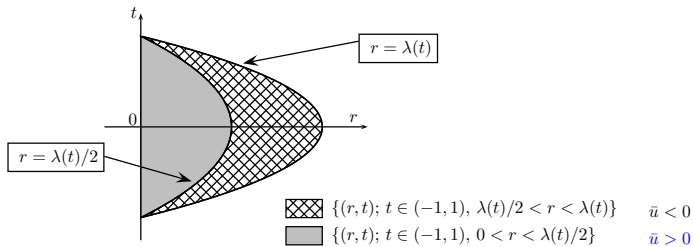
$$\text{supp}(f_i) \subset [-1, 1], \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$\text{supp}(g_i) \subset \left[\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}\right], \quad 1 \leq i \leq 3$$

Support de (\bar{u}, \bar{v}) pour $\lambda = \varepsilon(1 - t^2)^2$



Support de (\bar{u}, \bar{v}) pour $\lambda = \varepsilon(1 - t^2)$



Construction de g_0

Lemme: Il existe une fonction $G \in C^\infty(0, +\infty)$ telle que

$$\begin{aligned} G(z) &= \left(z - \frac{1}{2}\right)^3 && \text{pour } \frac{1}{2} - \delta < z < \frac{1}{2} + \delta \\ \left(z - \frac{1}{2}\right)G(z) &> 0 && \text{pour } 0 < z < 1, z \neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et telle que la solution g_0 du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} g_0''(z) + \frac{n-1}{z}g_0'(z) &= G(z), \quad z > 0 \\ g_0(1) &= g_0'(1) = 0 \end{aligned}$$

vérifie

$$g_0(z) = \begin{cases} 1 - z^2 & \text{si } 0 < z < \delta \\ e^{-\frac{1}{1-z^2}} & \text{si } 1 - \delta < z < 1 \\ 0 & \text{si } z \geq 1 \end{cases}$$

et $g_0(1/2) \neq 0$.

Signe de $\Delta \bar{v} - \bar{v}_t$

- ▶ Soit $Q = \lambda^2 [\bar{v}_{rr} + \frac{n-1}{r} \bar{v}_r - \bar{v}_t]$. On désire “contrôler” le comportement de Q lorsqu’il change de signe.
- ▶ On veut définir f_1, f_2, f_3 et g_1, g_2, g_3 de sorte qu’en $z = 1/2$

$$Q = Q_z = Q_{zz} = 0 \quad \text{et} \quad Q_{zzz} \geq \text{const.} f_0$$

(d’où $Q \sim (z - \frac{1}{2})^3$)

- ▶ On obtient

$$Q = \sum_{i=0}^3 [f_i (g_i^{(2)} + \frac{n-1}{z} g_i^{(1)}) + z \lambda \dot{\lambda} f_i g_i^{(1)} - \lambda^2 \dot{f}_i g_i]$$

Construction de f_i et g_i pour $1 \leq i \leq 3$

Pour $0 \leq k \leq 3$

$$\begin{aligned} \partial_z^k Q = & \sum_{i=0}^3 \{ f_i(t) (g_i^{(k+2)} + (n-1) \partial_z^k (g_i^{(1)}/z)) \\ & + \lambda \dot{\lambda} f_i(z g_i^{(k+1)} + k g_i^{(k)}) - \lambda^2 \dot{f}_i g_i^{(k)} \} \end{aligned}$$

► Pour $1 \leq i \leq 3$ et $0 \leq j \leq 4$ on impose

$$g_i^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

► Pour $0 \leq k \leq 2$ on définit $f_{k+1}(t)$ de sorte que $\partial_z^k Q(\cdot, \frac{1}{2}) = 0$

Conclusion

- ▶ Un calcul simple donne $Q_{zzz} = 6f_0 + R$ avec

$$|R| \leq \text{const } \varepsilon^2 f_0 \quad \text{pour } |z - \frac{1}{2}| < \frac{\delta}{2}$$

On choisit ε **assez petit** pour que $Q_{zzz} \geq f_0$ lorsque $|z - \frac{1}{2}| < \frac{\delta}{2}$ et $(z - \frac{1}{2})Q > 0$ pour tout $z \in (0, 1)$.

- ▶ On en déduit que $Q(t, z) = f_0(t)(z - \frac{1}{2})^3 \varphi(t, z)$ avec $\varphi \in C^\infty((-1, 1)_t \times (0, 1)_z)$ et $\varphi > 0$
- ▶ On peut montrer que v et u sont de classe C^∞ .

Étape 2 : contrôlabilité du linéarisé

Soit (\bar{u}, \bar{v}) la trajectoire de référence calculée à l'étape 1, et soit (u, v) la solution du problème de contrôle

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_t - \Delta \bar{u} = \bar{h} 1_\omega \\ \bar{v}_t - \Delta \bar{v} = \bar{u}^3 \\ (\bar{u}, \bar{v})_{t=0} = (0, 0) \\ (\bar{u}, \bar{v})_{t=T} = (0, 0) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u = h 1_\omega \\ v_t - \Delta v = u^3 \\ (u, v)_{t=0} = (u_0, v_0) \\ (u, v)_{t=T} = (0, 0) \end{array} \right.$$

Alors $w = (w_1, w_2) = (u - \bar{u}, v - \bar{v})$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{1,t} - \Delta w_1 = (h - \bar{h}) 1_\omega \\ w_{2,t} - \Delta w_2 = a(w_1, \bar{u}) w_1 := (3\bar{u}^2 + 3\bar{u}w_1 + w_1^2) w_1 \\ (w_1, w_2)_{t=0} = (u_0, v_0) \quad (w_1, w_2)_{t=T} = (0, 0). \end{array} \right.$$

- ▶ Notons que $a(0, \bar{u}) > 0$ quelque part, disons pour $t_1 < t < t_2$ et $x \in \omega_0 \subset\subset \omega$. On aura donc $a(z_1, \bar{u}) > \text{const} > 0$ pour $\|z_1\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \ll 1$.
- ▶ On impose que $k = h - \bar{h}$ soit nul pour $t < t_1$ et pour $t > t_2$. On souhaite mener le système à 0 dans l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.
- ▶ On se ramène à la situation où $[0, T] = [t_1, t_2]$, $a(z_1, \bar{u}) > \text{const} > 0$ pour $0 \leq t \leq T$, $x \in \bar{\omega}_0$

Le système adjoint de

$$w_{1,t} - \Delta w_1 = k1_\omega$$

$$w_{2,t} - \Delta w_2 = a(z_1, \bar{u})w_1$$

$$w_1 = w_2 = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega$$

$$(w_1, w_2)_{t=0} = (u_0, v_0) \quad (w_1, w_2)_{t=T} = (0, 0).$$

s'écrit

$$-\varphi_{1,t} - \Delta\varphi_1 = a(z_1, \bar{u})\varphi_2$$

$$-\varphi_{2,t} - \Delta\varphi_2 = 0$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega$$

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{t=T} = (\varphi_{1,T}, \varphi_{2,T}).$$

Inégalité d'observabilité à prouver pour $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2)$:

$$\int_{\Omega} |\varphi(0, x)|^2 dx \leq C \iint_{(0, T) \times \omega_0} |\varphi_1|^2 dx dt$$

Inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur

A.V. Fursikov - O. Yu Imanuvilov 1995

$$\begin{aligned} & \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-s\rho(x)\eta(t)} \left((s\eta)^3 |z|^2 + s\eta |\nabla z|^2 + (s\eta)^{-1} (|\Delta z|^2 + |z_t|^2) \right) \\ & \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-s\rho(x)\eta(t)} |z_t + \Delta z|^2 \right. \\ & \quad \left. + \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-s\rho(x)\eta(t)} (s\eta)^3 |z|^2 \right) \quad \text{si } z_{(0,T) \times \partial\Omega} = 0 \end{aligned}$$

pour une fonction régulière $\rho(x) \geq C > 0$ vérifiant

$$\nabla\rho(x) \neq 0 \text{ sur } \Omega \setminus \omega_0 \text{ et } \partial\rho/\partial\nu \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

et $\eta(t) = t^{-1}(T-t)^{-1}$.

L'inégalité d'observabilité sur φ résulte de l'inégalité de Carleman appliquée à chaque composante de φ après quelques manipulations.

Étape 3 : argument de point fixe

- ▶ Pour $\|z\|_{C([0,T] \times \bar{\Omega})} \ll 1$ et $(u_0, v_0) \in L^2(\Omega)^2$, le contrôle h conduisant le système à $(0, 0)$ vérifie

$$\|h\|_{L^\infty((0,T) \times \Omega)} \leq C \|(u_0, v_0)\|_{L^2(\Omega)^2}$$

- ▶ On peut montrer que l'application $z \mapsto w$ est continue et compacte pour la topologie $C^0([0, T] \times \bar{\Omega})$. Une application du théorème de Kakutani assure l'existence d'un point fixe, ce qui termine la preuve.

Retour au cas général

- ▶ La principale difficulté de la méthode réside dans la construction d'une trajectoire de référence pour

$$\bar{v}_t - \Delta \bar{v} + G(\bar{u}, \bar{v}) = 0$$

On sait traiter le cas $G = G_0 := c_1 u^{2k+1} + c_2 v$, mais la construction semble inaccessible pour un G quelconque.

- ▶ Pour $G = G_0$, on observe que

$$\bar{v} = O(\bar{u}^{2k+1}) \quad \text{lorsque } t \rightarrow T^-.$$

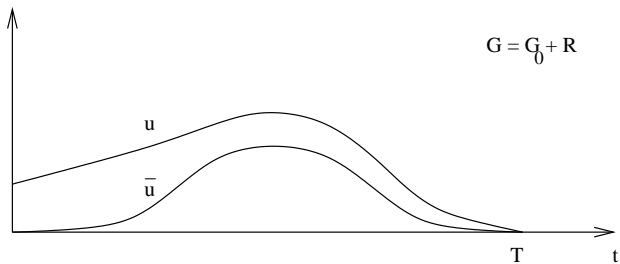
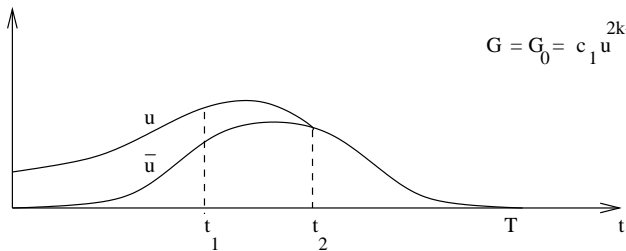
On est conduit à pondérer u et v différemment : on développe suivant la dilatation $d_\varepsilon(u, v) = (\varepsilon u, \varepsilon^{2k+1} v)$.

- ▶ Dans le cas général, le développement de Taylor de G

$$G(u, v) = G_0(u, v) + R(u, v)$$

conduit à garder la trajectoire de référence construite pour G_0 et à traiter le reste $R(u, v)$ comme un terme force à compenser sur l'intervalle $(0, T)$.

Comparaison des méthodes



On considère l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbb{R} \times W_0^{1,\infty}(\Omega)^2 \times \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{Y} \\ (\varepsilon, U^0, V^0, (U, V, H)) &\mapsto (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, U(0) - U^0, V(0) - V^0) \end{aligned}$$

définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}(u_t - \Delta u + F(u, v, \nabla u, \nabla v)) - h1_\omega & \text{si } \varepsilon \neq 0 \\ U_t - \Delta U + f_0 U + f_1 \cdot \nabla U - H1_\omega & \text{si } \varepsilon = 0 \end{cases} \\ \mathcal{A}_2 &= \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^{2k+1}}(v_t - \Delta v + G(u, v)) & \text{si } \varepsilon \neq 0 \\ V_t - \Delta V + \frac{1}{2k+1}g_0((U + \bar{u})^{2k+1} - \bar{u}^{2k+1}) + g_1 V & \text{si } \varepsilon = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

avec

$$u := \varepsilon(\bar{u} + U), \quad v := \varepsilon^{2k+1}(\bar{v} + V), \quad h := \varepsilon(\bar{h} + H)$$

$$\text{et } f_0 = \frac{\partial F}{\partial u}(0), \quad f_1 = \frac{\partial F}{\partial \nabla u}(0), \quad g_0 = \frac{1}{(2k)!} \frac{\partial^{2k+1} G}{\partial u^{2k+1}}(0), \quad g_1 = \frac{\partial G}{\partial v}(0).$$

Linéarisation

Si on note

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial (U, V, H)}(0)$$

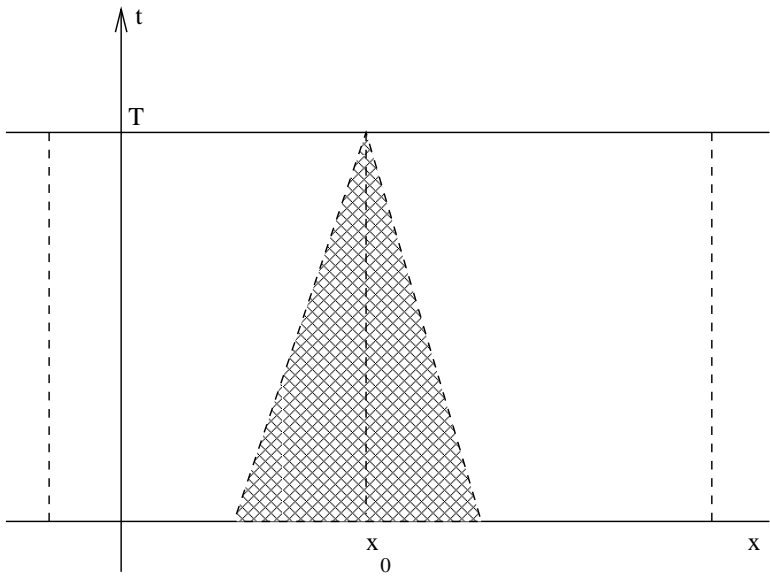
on trouve que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U, V, H) = & (U_t - \Delta U + f_0 U + f_1 \cdot \nabla U - H1_\omega, \\ & V_t - \Delta V + g_0 \bar{u}^{2k} U + g_1 V, U(0), V(0)) \end{aligned}$$

- ▶ Pour conclure avec le théorème des fonctions implicites, on doit montrer la surjectivité de \mathcal{L} .
- ▶ Avec la trajectoire de référence définie sur $(-T, T)$ on observe que pour $0 < t < T$ on a $\bar{u} > ce^{-\mu/(T-t)}$ sur la région

$$\{|x - x_0| < \lambda(t)/4\} \supset \{|x - x_0| < c|t - T|\}$$

- ▶ On peut étendre l'inégalité de Carleman pour une équation de la chaleur avec observation interne sur un cône $\{|x - x_0| < c|t - T|\}$



Observation sur un cône

$$\begin{aligned} & \iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-s\rho(t,x)\eta(t)} \left((s\eta)^3 |z|^2 + s\eta |\nabla z|^2 + (s\eta)^{-1} (|\Delta z|^2 + |z_t|^2) \right) \\ & \leq C \left(\iint_{(0,T) \times \Omega} e^{-s\rho(t,x)\eta(t)} |z_t + \Delta z|^2 \right. \\ & \quad \left. + \iint_{|x-x_0| < c|t-T|} e^{-s\rho(t,x)\eta(t)} s^3 \eta^5 |z|^2 \right) \end{aligned}$$

pour une fonction régulière $\rho(t, x) \geq \text{const} > 0$ vérifiant $|\nabla \rho(t, x)| > \text{const} > 0$ sur $|x - x_0| \geq c|t - T|$ et $\partial \rho / \partial \nu \geq 0$ sur $(0, T) \times \partial \Omega$, et $\eta(t) = (T - t)^{-1}$.

Perspectives

- ▶ L'extension à des systèmes d'au moins trois équations semble difficile. Le problème du contrôle frontière est ouvert.
- ▶ Les systèmes hyperboliques ou dispersifs avec des couplages non linéaires sont nombreux : système de Boussinesq (pour les ondes de surface), système de Zakharov:

$$\begin{aligned}iu_t + \Delta u &= uv \\v_{tt} - \Delta v &= \Delta |u|^2.\end{aligned}$$

On peut penser que la **réversibilité** des équations facilite la construction de la trajectoire de référence.