

DYNAMIQUES DE RANG MULTIDIMENSIONNELLES

Yann Brenier

CNRS-Centre de Mathématiques Laurent SCHWARTZ

Ecole Polytechnique FR 91128 Palaiseau

SELMINAIRE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES,
COLLEGE DE FRANCE, 4 décembre 2015

DYNAMIQUES DE RANG MULTIDIMENSIONNELLES

Rappel sur les dynamiques de rang unidimensionnelles.

DYNAMIQUES DE RANG MULTIDIMENSIONNELLES

Rappel sur les dynamiques de rang unidimensionnelles.

Dynamiques de rang multidimensionnelles: modèle de Zeldovich en cosmologie, convection des fluides, géométrie kählérienne...

DYNAMIQUES DE RANG MULTIDIMENSIONNELLES

Rappel sur les dynamiques de rang unidimensionnelles.
Dynamiques de rang multidimensionnelles: modèle de Zeldovich en cosmologie, convection des fluides, géométrie kählérienne...
Concept de rang multidimensionnel: interprétation stochastique.

DYNAMIQUES DE RANG MULTIDIMENSIONNELLES

Rappel sur les dynamiques de rang unidimensionnelles.

Dynamiques de rang multidimensionnelles: modèle de Zeldovich en cosmologie, convection des fluides, géométrie kählérienne...

Concept de rang multidimensionnel: interprétation stochastique.

Dynamiques du second ordre, obtenues à partir du premier ordre par principes de grandes déviations et de moindre action.

DYNAMIQUES DE RANG MULTIDIMENSIONNELLES

Rappel sur les dynamiques de rang unidimensionnelles.

Dynamiques de rang multidimensionnelles: modèle de Zeldovich en cosmologie, convection des fluides, géométrie kählérienne...

Concept de rang multidimensionnel: interprétation stochastique.

Dynamiques du second ordre, obtenues à partir du premier ordre par principes de grandes déviations et de moindre action.

Obtention du système de Vlasov-Monge-Ampère, dont on peut dériver celui de Vlasov-Poisson de la gravitation newtonienne.

DYNAMIQUES DE RANG MULTIDIMENSIONNELLES

Rappel sur les dynamiques de rang unidimensionnelles.

Dynamiques de rang multidimensionnelles: modèle de Zeldovich en cosmologie, convection des fluides, géométrie kählérienne...

Concept de rang multidimensionnel: interprétation stochastique.

Dynamiques du second ordre, obtenues à partir du premier ordre par principes de grandes déviations et de moindre action.

Obtention du système de Vlasov-Monge-Ampère, dont on peut dériver celui de Vlasov-Poisson de la gravitation newtonienne.

Preuves par le concept d'onde pilote à la de Broglie.

I. DYNAMIQUES DE RANG UNIDIMENSIONNELLES: un exemple élémentaire

Pour N contribuables $\alpha \in \{1, \dots, N\}$, on note $Z_n(\alpha) \geq 0$ le revenu imposable de l'année n et $\sigma_n(\alpha) \in \{1, \dots, N\}$ son rang.

I. DYNAMIQUES DE RANG UNIDIMENSIONNELLES: un exemple élémentaire

Pour N contribuables $\alpha \in \{1, \dots, N\}$, on note $Z_n(\alpha) \geq 0$ le revenu imposable de l'année n et $\sigma_n(\alpha) \in \{1, \dots, N\}$ son rang. On suppose

$$Z_{n+1}(\alpha) = Z_n(\alpha) \exp(r\tau) \exp(-\mathcal{G}(\sigma_n)\tau)$$

I. DYNAMIQUES DE RANG UNIDIMENSIONNELLES: un exemple élémentaire

Pour N contribuables $\alpha \in \{1, \dots, N\}$, on note $Z_n(\alpha) \geq 0$ le revenu imposable de l'année n et $\sigma_n(\alpha) \in \{1, \dots, N\}$ son rang. On suppose $Z_{n+1}(\alpha) = Z_n(\alpha) \exp(r\tau) \exp(-\mathcal{G}(\sigma_n)\tau)$ avec un taux de croissance (supposé uniforme) r des revenus et des taux d'imposition dépendant du rang via la fonction \mathcal{G} .

I. DYNAMIQUES DE RANG UNIDIMENSIONNELLES: un exemple élémentaire

Pour N contribuables $\alpha \in \{1, \dots, N\}$, on note $Z_n(\alpha) \geq 0$ le revenu imposable de l'année n et $\sigma_n(\alpha) \in \{1, \dots, N\}$ son rang. On suppose $Z_{n+1}(\alpha) = Z_n(\alpha) \exp(r\tau) \exp(-\mathcal{G}(\sigma_n)\tau)$ avec un taux de croissance (supposé uniforme) r des revenus et des taux d'imposition dépendant du rang via la fonction \mathcal{G} .

On trouve $X_{n+1}(\alpha) = X_n(\alpha) + (r - \mathcal{G}(\sigma_n))\tau$ pour $X_n = \log Z_n$

QUELQUES RESULTATS (anciens)

Un modèle plus général (avec pseudo-bruit en option)

$$X_{n+1}(\alpha) = X_n(\alpha) + \tau F(w) + (-1)^{\sigma_n(\alpha)} \sqrt{2\eta\tau} R(w), \quad w = \frac{\sigma_n(\alpha) - 1}{N - 1}$$

QUELQUES RESULTATS (anciens)

Un modèle plus général (avec pseudo-bruit en option)

$$X_{n+1}(\alpha) = X_n(\alpha) + \tau F(w) + (-1)^{\sigma_n(\alpha)} \sqrt{2\eta\tau} R(w), \quad w = \frac{\sigma_n(\alpha) - 1}{N - 1}$$

1) Limite macroscopique $N \gg 1$ pour $u_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{1}_{\{x > X_n(\alpha)\}}$:

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = \sqrt{\eta} \partial_{xx}(r(u)), \quad F(u) = f'(u), \quad R(u) = r'(u) \geq 0$$

QUELQUES RESULTATS (anciens)

Un modèle plus général (avec pseudo-bruit en option)

$$X_{n+1}(\alpha) = X_n(\alpha) + \tau F(w) + (-1)^{\sigma_n(\alpha)} \sqrt{2\eta\tau} R(w), \quad w = \frac{\sigma_n(\alpha) - 1}{N - 1}$$

1) Limite macroscopique $N \gg 1$ pour $u_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{1}_{\{x > X_n(\alpha)\}}$:

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = \sqrt{\eta} \partial_{xx}(r(u)), \quad F(u) = f'(u), \quad R(u) = r'(u) \geq 0$$

2) Si $\forall u \in]0, 1[, f(u) > f(0) = f(1)$, il se forme une "classe" unique.

QUELQUES RESULTATS (anciens)

Un modèle plus général (avec pseudo-bruit en option)

$$X_{n+1}(\alpha) = X_n(\alpha) + \tau F(w) + (-1)^{\sigma_n(\alpha)} \sqrt{2\eta\tau} R(w), \quad w = \frac{\sigma_n(\alpha) - 1}{N - 1}$$

1) Limite macroscopique $N \gg 1$ pour $u_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{1}_{\{x > X_n(\alpha)\}}$:

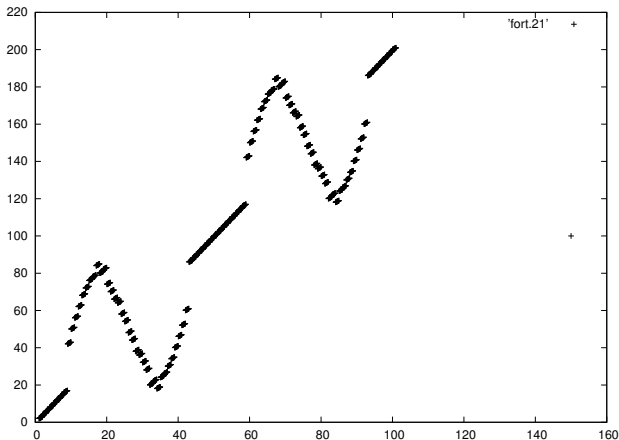
$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = \sqrt{\eta} \partial_{xx}(r(u)), \quad F(u) = f'(u), \quad R(u) = r'(u) \geq 0$$

2) Si $\forall u \in]0, 1[, f(u) > f(0) = f(1)$, il se forme une "classe" unique. Pour N fixé et sans bruit, on a alors, génériquement, une unique permutation d'équilibre des rangs et elle n'a qu'un cycle.

Formation de classes

Permutation des rangs, d'une année à l'autre, à l'équilibre (avec deux cycles).

(Données: $N = 100$, $\tau = 0,01$, $F(u) = u + \frac{\sin(4\pi u)}{4}$, $u \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$, $\tau = 0,01$.)



Commentaires

Voir Y.B. CRAS 1981-1982, SINUM 1984 (méthode de "transport-écroulement"), thèse d'état 1986, pour interprétation "économique" et version pseudo-bruitée.

Des versions bruitées ont été analysées en théorie des probabilités ("mouvement brownien réfléchi", Harrison-Reiman/Williams 1981-1987) puis en finance (modèle "Atlas", Fernholz 2002, "rank dependent drifts", Pal-Pitman 2008).

Voir Ichiba-Papathanakos-Banner-Karatzas-Fernholz 2011, pour ces références qui m'ont été récemment communiquées (merci à Max-Olivier Hongler, EPFL, Juin 2015).

Ces modèles (comme ceux qui vont suivre) peuvent s'interpréter comme des MFG en liaison avec le concept de transport optimal, comme on va le voir dans la suite.

II. GENERALISATION MULTIDIMENSIONNELLE

On fixe $\{A(\alpha) \in \mathbb{R}^d, \alpha = 1, \dots, N\}$.

II. GENERALISATION MULTIDIMENSIONNELLE

On fixe $\{A(\alpha) \in \mathbb{R}^d, \alpha = 1, \dots, N\}$. On cherche $X_t \in (\mathbb{R}^d)^N$ solution de:

$$\frac{dX_t}{dt} = F(X_t, A_{\sigma_{opt}}) + \sqrt{2\eta} \frac{dB_t}{dt}, \quad \sigma_{opt} = \operatorname{Arg\,sup}_{\sigma \in S_N} ((X_t, A_\sigma))$$

II. GENERALISATION MULTIDIMENSIONNELLE

On fixe $\{A(\alpha) \in \mathbb{R}^d, \alpha = 1, \dots, N\}$. On cherche $X_t \in (\mathbb{R}^d)^N$ solution de:

$$\frac{dX_t}{dt} = F(X_t, A_{\sigma_{opt}}) + \sqrt{2\eta} \frac{dB_t}{dt}, \quad \sigma_{opt} = \operatorname{Arg\,sup}_{\sigma \in S_N} ((X_t, A_\sigma))$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho F(x, \nabla_x \varphi)) = \eta \Delta \rho, \quad \det(D_x^2 \varphi) = \rho \sim \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \delta(x - X_t(\alpha))$$

II. GENERALISATION MULTIDIMENSIONNELLE

On fixe $\{A(\alpha) \in \mathbb{R}^d, \alpha = 1, \dots, N\}$. On cherche $X_t \in (\mathbb{R}^d)^N$ solution de:

$$\frac{dX_t}{dt} = F(X_t, A_{\sigma_{opt}}) + \sqrt{2\eta} \frac{dB_t}{dt}, \quad \sigma_{opt} = \operatorname{Arg\,sup}_{\sigma \in S_N} ((X_t, A_\sigma))$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho F(x, \nabla_x \varphi)) = \eta \Delta \rho, \quad \det(D_x^2 \varphi) = \rho \sim \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \delta(x - X_t(\alpha))$$

1) Modèle de Zeldovich en cosmologie.

II. GENERALISATION MULTIDIMENSIONNELLE

On fixe $\{A(\alpha) \in \mathbb{R}^d, \alpha = 1, \dots, N\}$. On cherche $X_t \in (\mathbb{R}^d)^N$ solution de:

$$\frac{dX_t}{dt} = F(X_t, A_{\sigma_{opt}}) + \sqrt{2\eta} \frac{dB_t}{dt}, \quad \sigma_{opt} = \operatorname{Arg\,sup}_{\sigma \in S_N} ((X_t, A_\sigma))$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho F(x, \nabla_x \varphi)) = \eta \Delta \rho, \quad \det(D_x^2 \varphi) = \rho \sim \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \delta(x - X_t(\alpha))$$

1) Modèle de Zeldovich en cosmologie.

2) Fluides géophysiques (cf. Mike Cullen, modèle semigéostrophique).

II. GENERALISATION MULTIDIMENSIONNELLE

On fixe $\{A(\alpha) \in \mathbb{R}^d, \alpha = 1, \dots, N\}$. On cherche $X_t \in (\mathbb{R}^d)^N$ solution de:

$$\frac{dX_t}{dt} = F(X_t, A_{\sigma_{opt}}) + \sqrt{2\eta} \frac{dB_t}{dt}, \quad \sigma_{opt} = \operatorname{Arg\,sup}_{\sigma \in S_N} ((X_t, A_\sigma))$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho F(x, \nabla_x \varphi)) = \eta \Delta \rho, \quad \det(D_x^2 \varphi) = \rho \sim \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \delta(x - X_t(\alpha))$$

1) Modèle de Zeldovich en cosmologie.

2) Fluides géophysiques (cf. Mike Cullen, modèle semigéostrophique).

3) Géométrie de Kähler des variétés toriques (cf. Robert Berman).

II. GENERALISATION MULTIDIMENSIONNELLE

On fixe $\{A(\alpha) \in \mathbb{R}^d, \alpha = 1, \dots, N\}$. On cherche $X_t \in (\mathbb{R}^d)^N$ solution de:

$$\frac{dX_t}{dt} = F(X_t, A_{\sigma_{opt}}) + \sqrt{2\eta} \frac{dB_t}{dt}, \quad \sigma_{opt} = \operatorname{Arg\,sup}_{\sigma \in S_N} ((X_t, A_\sigma))$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho F(x, \nabla_x \varphi)) = \eta \Delta \rho, \quad \det(D_x^2 \varphi) = \rho \sim \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \delta(x - X_t(\alpha))$$

1) Modèle de Zeldovich en cosmologie.

2) Fluides géophysiques (cf. Mike Cullen, modèle semigéostrophique).

3) Géométrie de Kähler des variétés toriques (cf. Robert Berman).

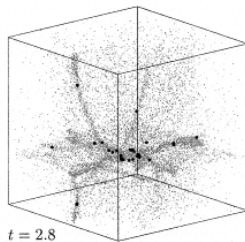
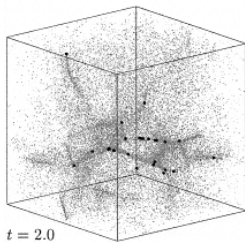
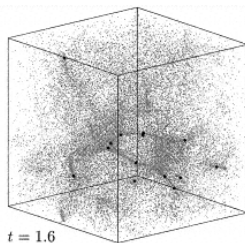
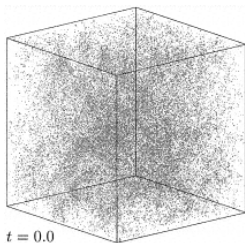
4) Version complètement non-linéaire du modèle de Keller-Segel.

III. UNE INTERPRETATION STOCHASTIQUE DES MODELES DE RANG MULTIDIMENSIONNELS

Soit un nuage brownien, i.e. N trajectoires browniennes indépendantes dans \mathbb{R}^d issues de $\{A(\alpha) \in \mathbb{R}^d, \alpha = 1, \dots, N\}$

$$Y_t(\alpha) = A(\alpha) + \sqrt{\epsilon} B_t(\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, N$$

Errance d'un nuage dans \mathbb{R}^3



OBSERVATION DU NUAGE A L'INSTANT T

Probabilité que le nuage $Y_t(\alpha) = A(\alpha) + \sqrt{\epsilon}B_t(\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, N$
soit observé, à l'instant fixé $t = T > 0$, **à la position** X_T
 $X_T = (X_T(\alpha), \alpha = 1, \dots, N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ **(à permutation près des α)**

OBSERVATION DU NUAGE A L'INSTANT T

Probabilité que le nuage $Y_t(\alpha) = A(\alpha) + \sqrt{\epsilon}B_t(\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, N$
soit observé, à l'instant fixé $t = T > 0$, à la position X_T

$X_T = (X_T(\alpha), \alpha = 1, \dots, N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ (à permutation près des α)

$$\frac{1}{Z} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \prod_{\alpha=1}^N \exp\left(-\frac{|X_T(\alpha) - A(\sigma(\alpha))|^2}{2\epsilon T}\right)$$

OBSERVATION DU NUAGE A L'INSTANT T

Probabilité que le nuage $Y_t(\alpha) = A(\alpha) + \sqrt{\epsilon}B_t(\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, N$
soit observé, à l'instant fixé $t = T > 0$, à la position X_T

$X_T = (X_T(\alpha), \alpha = 1, \dots, N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ (à permutation près des α)

$$\frac{1}{Z} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \prod_{\alpha=1}^N \exp\left(-\frac{|X_T(\alpha) - A(\sigma(\alpha))|^2}{2\epsilon T}\right) = \frac{1}{Z} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \exp\left(-\frac{\|X_T - A_\sigma\|^2}{2\epsilon T}\right)$$

$|\cdot|$ et $\|\cdot\| =$ normes euclidiennes dans \mathbb{R}^d et $(\mathbb{R}^d)^N$

MOUVEMENT EN RANG MULTIDIMENSIONNEL

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \frac{1}{Z} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \exp\left(-\frac{\|X_T - A_\sigma\|^2}{2\epsilon T}\right) = \frac{1}{2T} \inf_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \|X_T - A_\sigma\|^2$$

MOUVEMENT EN RANG MULTIDIMENSIONNEL

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \frac{1}{Z} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \exp\left(-\frac{\|X_T - A_\sigma\|^2}{2\epsilon T}\right) = \frac{1}{2T} \inf_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \|X_T - A_\sigma\|^2$$

Ainsi, dans la limite de bruit nul, connaissant X_T , on voit que, de $t = 0$ à $t = T$, les points du nuage brownien se sont déplacés en ligne droite et en rang multidimensionnel, par "transport optimal"

MOUVEMENT EN RANG MULTIDIMENSIONNEL

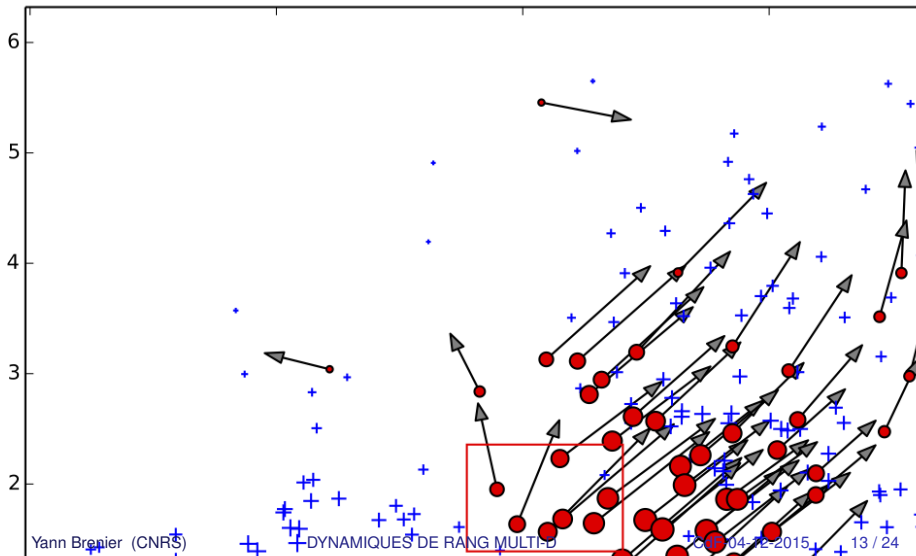
$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \frac{1}{Z} \sum_{\sigma \in S_N} \exp\left(-\frac{\|X_T - A_\sigma\|^2}{2\epsilon T}\right) = \frac{1}{2T} \inf_{\sigma \in S_N} \|X_T - A_\sigma\|^2$$

Ainsi, dans la limite de bruit nul, connaissant X_T , on voit que, de $t = 0$ à $t = T$, les points du nuage brownien se sont déplacés en ligne droite et en rang multidimensionnel, par "transport optimal"

$$X_t = \left(1 - \frac{t}{T}\right) A_{\sigma_{opt}} + \frac{t}{T} X_T, \quad \sigma_{opt} = \operatorname{Arg} \inf_{\sigma \in S_N} \|X_T - A_\sigma\|^2$$

$$= \operatorname{Arg} \sup_{\sigma \in S_N} ((X_t, A_\sigma)), \quad \text{avec } ((\cdot, \cdot)) = \text{produit scalaire dans } (\mathbb{R}^d)^N$$

Mouvement en rang "multidimensionnel"



LAW AND DISORDER!

Le mouvement résultant du nuage jusqu'au temps T

$$X_t = \left(1 - \frac{t}{T}\right)A_{\sigma_{opt}} + \frac{t}{T} X_T, \quad \sigma_{opt} = \operatorname{Arg\,sup}_{\sigma \in \mathcal{S}_N} ((X_T, A_\sigma))$$

s'exprime par la "loi" (fictive) de "rang multidimensionnel"

$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{X_t - A_{\sigma_{opt}}}{t}, \quad \sigma_{opt} = \operatorname{Arg\,sup}_{\sigma \in \mathcal{S}_N} ((X_t, A_\sigma)), \quad t \in [0, T]$$

qui résulte de l'observation en T de mouvements erratiques.

LAW AND DISORDER!

Le mouvement résultant du nuage jusqu'au temps T

$$X_t = \left(1 - \frac{t}{T}\right)A_{\sigma_{opt}} + \frac{t}{T} X_T, \quad \sigma_{opt} = \operatorname{Arg\,sup}_{\sigma \in S_N} ((X_T, A_\sigma))$$

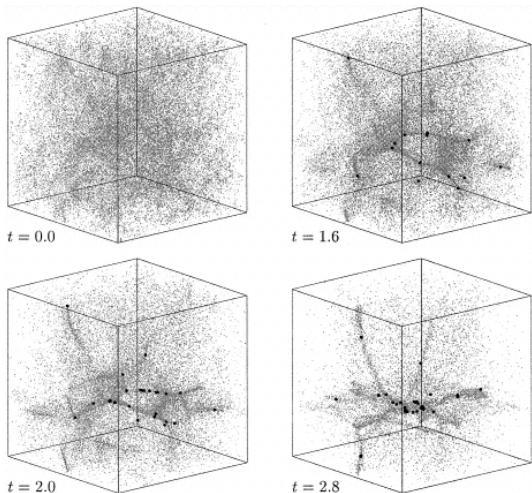
s'exprime par la "loi" (fictive) de "rang multidimensionnel"

$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{X_t - A_{\sigma_{opt}}}{t}, \quad \sigma_{opt} = \operatorname{Arg\,sup}_{\sigma \in S_N} ((X_t, A_\sigma)), \quad t \in [0, T]$$

qui résulte de l'observation en T de mouvements erratiques.

CELA EQUIVAUT AU MODELE DE ZELDOVICH EN COSMOLOGIE!

Une simulation du modèle de Zeldovich en cosmologie



Commentaires

Le modèle de Zeldovich en cosmologie a été relié au problème de Monge de transport optimal avec coût quadratique par Uriel Frisch (et coll. Nature 2002).

Commentaires

Le modèle de Zeldovich en cosmologie a été relié au problème de Monge de transport optimal avec coût quadratique par Uriel Frisch (et coll. Nature 2002).

L'interprétation stochastique est donnée dans Y.B. arXiv 2015. Elle est reliée

i) au "problème de Schrödinger" (remis au goût du jour, en particulier par Christian Léonard et, sur le plan numérique, par Jean-David Benamou, Gabriel Peyré et coll.), qu'on peut voir comme version stochastique du problème de Monge.

Commentaires

Le modèle de Zeldovich en cosmologie a été relié au problème de Monge de transport optimal avec coût quadratique par Uriel Frisch (et coll. Nature 2002).

L'interprétation stochastique est donnée dans Y.B. arXiv 2015. Elle est reliée

i) au "problème de Schrödinger" (remis au goût du jour, en particulier par Christian Léonard et, sur le plan numérique, par Jean-David Benamou, Gabriel Peyré et coll.), qu'on peut voir comme version stochastique du problème de Monge.

ii) aux travaux de Robert Berman (arXiv 2008...2013) qui a établi des liens remarquables entre géométrie kählérienne, mécanique statistique, transport optimal, processus stochastiques (permanents et déterminants) et matrices aléatoires.

IV. PREUVES PAR LE CONCEPT D'ONDE PILOTE

On part de l'équation de la chaleur dans l'espace produit $(\mathbb{R}^d)^N$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, X) = \frac{\epsilon}{2} \Delta \rho(t, X), \quad \rho(t=0, X) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \delta(X - A_\sigma)$$

IV. PREUVES PAR LE CONCEPT D'ONDE PILOTE

On part de l'équation de la chaleur dans l'espace produit $(\mathbb{R}^d)^N$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, X) = \frac{\epsilon}{2} \Delta \rho(t, X), \quad \rho(t=0, X) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \delta(X - A_\sigma)$$

et on suit les trajectoires de "l'onde pilote":

$$\frac{dX_t}{dt} = v(t, X_t), \quad v(t, X) = -\frac{\epsilon}{2} \nabla_X \log \rho(t, X)$$

IV. PREUVES PAR LE CONCEPT D'ONDE PILOTE

On part de l'équation de la chaleur dans l'espace produit $(\mathbb{R}^d)^N$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, X) = \frac{\epsilon}{2} \Delta \rho(t, X), \quad \rho(t=0, X) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \delta(X - A_\sigma)$$

et on suit les trajectoires de "l'onde pilote":

$$\frac{dX_t}{dt} = v(t, X_t), \quad v(t, X) = -\frac{\epsilon}{2} \nabla_X \log \rho(t, X)$$

On adapte ici le concept d'onde pilote de Louis de Broglie. D'ailleurs, on peut faire un calcul similaire avec l'équation de Schrödinger libre:

$$(i\partial_t + \Delta)\psi = 0, \quad \psi(0, X) = \sum_{\sigma} \exp(-\|X - A_{\sigma}\|^2/a^2), \quad v = \nabla \text{Im} \log \psi$$

OBTENTION DU SYSTEME DE ZELDOVICH

On obtient explicitement

$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{X_t - \langle A \rangle}{2t}, \quad \langle A \rangle = \frac{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} A_\sigma \exp\left(\frac{-\|X_t - A_\sigma\|^2}{2\epsilon t}\right)}{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \exp\left(\frac{-\|X_t - A_\sigma\|^2}{2\epsilon t}\right)}$$

OBTENTION DU SYSTEME DE ZELDOVICH

On obtient explicitement

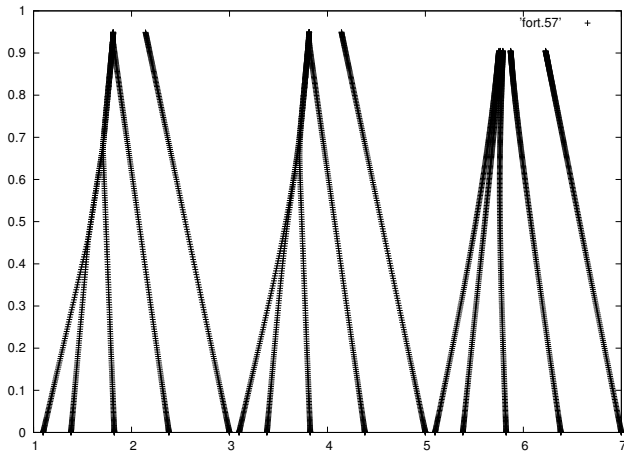
$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{X_t - \langle A \rangle}{2t}, \quad \langle A \rangle = \frac{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} A_\sigma \exp\left(\frac{-\|X_t - A_\sigma\|^2}{2\epsilon t}\right)}{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \exp\left(\frac{-\|X_t - A_\sigma\|^2}{2\epsilon t}\right)}$$

La limite $\epsilon \rightarrow 0$ se justifie, comme opérateur max. monotone

$$t = e^{2\theta}, \quad \frac{d_+ X_\theta}{d\theta} = -\bar{\nabla} \Phi(X_\theta), \quad \Phi(X) = - \inf_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \|X - A_\sigma\|^2 / 2$$

et conduit (quand $d = 1$) à des collisions "collantes".

From free (Bosonic) Schrödinger to sticky particles



V. GRANDES DEVIATIONS DU SYSTEME PILOTE

On ajoute du bruit η au système piloté

$$\frac{dX_{\theta}^{\epsilon}}{d\theta} = X_{\theta}^{\epsilon} - \langle A \rangle + \eta \frac{dB_{\theta}}{d\theta}, \quad \langle A \rangle = \frac{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} A_{\sigma} \exp\left(\frac{-\|X_{\theta}^{\epsilon} - A_{\sigma}\|^2}{2\epsilon \exp(2\theta)}\right)}{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \exp\left(\frac{-\|X_{\theta}^{\epsilon} - A_{\sigma}\|^2}{2\epsilon \exp(2\theta)}\right)}$$

V. GRANDES DEVIATIONS DU SYSTEME PILOTE

On ajoute du bruit η au système piloté

$$\frac{dX_\theta^\epsilon}{d\theta} = X_\theta^\epsilon - \langle A \rangle + \eta \frac{dB_\theta}{d\theta}, \quad \langle A \rangle = \frac{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} A_\sigma \exp\left(\frac{-\|X_\theta^\epsilon - A_\sigma\|^2}{2\epsilon \exp(2\theta)}\right)}{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \exp\left(\frac{-\|X_\theta^\epsilon - A_\sigma\|^2}{2\epsilon \exp(2\theta)}\right)}$$

$A \in$ fixé, on utilise le théorème de Freidlin-Vencel pour obtenir la fonctionnelle de grandes déviations quand $\eta \rightarrow 0$.

V. GRANDES DEVIATIONS DU SYSTEME PILOTE

On ajoute du bruit η au système piloté

$$\frac{dX_\theta^\epsilon}{d\theta} = X_\theta^\epsilon - \langle A \rangle + \eta \frac{dB_\theta}{d\theta}, \quad \langle A \rangle = \frac{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} A_\sigma \exp\left(\frac{-\|X_\theta^\epsilon - A_\sigma\|^2}{2\epsilon \exp(2\theta)}\right)}{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \exp\left(\frac{-\|X_\theta^\epsilon - A_\sigma\|^2}{2\epsilon \exp(2\theta)}\right)}$$

$A \in \text{fixé}$, on utilise le théorème de Freidlin-Vencel pour obtenir la fonctionnelle de grandes déviations quand $\eta \rightarrow 0$. Sa Γ -limite quand $\epsilon \rightarrow 0$ existe (*):

$$\int \left\| \frac{dX_\theta}{d\theta} \right\|^2 + \left\| \bar{\nabla} \Phi(X_\theta) \right\|^2 d\theta, \quad \Phi(X) = - \inf_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \|X - A_\sigma\|^2 / 2$$

(*) selon L. Ambrosio, communication privée.

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Le principe de moindre action appliqué à

$$\int \left\| \frac{dX_\theta}{d\theta} \right\|^2 + \left\| \nabla \Phi(X_\theta) \right\|^2 d\theta, \quad \Phi(X) = - \inf_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \|X - A_\sigma\|^2 / 2$$

conduit (formellement) au système dynamique

$$\frac{d^2 X_\theta}{d\theta^2} = -\nabla \Phi(X_\theta)$$

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Le principe de moindre action appliqué à

$$\int \left\| \frac{dX_\theta}{d\theta} \right\|^2 + \left\| \nabla \Phi(X_\theta) \right\|^2 d\theta, \quad \Phi(X) = - \inf_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \|X - A_\sigma\|^2 / 2$$

conduit (formellement) au système dynamique

$$\frac{d^2 X_\theta}{d\theta^2} = -\nabla \Phi(X_\theta)$$

(En effet $\|\nabla \Phi\|^2 = -2\Phi$ car -2Φ est une fonction distance au carré.)

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Le principe de moindre action appliqué à

$$\int \left\| \frac{dX_\theta}{d\theta} \right\|^2 + \left\| \nabla \Phi(X_\theta) \right\|^2 d\theta, \quad \Phi(X) = - \inf_{\sigma \in S_N} \|X - A_\sigma\|^2 / 2$$

conduit (formellement) au système dynamique

$$\frac{d^2 X_\theta}{d\theta^2} = -\nabla \Phi(X_\theta)$$

(En effet $\|\nabla \Phi\|^2 = -2\Phi$ car -2Φ est une fonction distance au carré.)

Dans la Γ -limite obtenue précédemment, $\|\nabla \Phi\|$ remplaçant $\|\nabla \Phi\|$ dans l'action, on tient en plus compte des collisions collantes!

LE SYSTEME DE VLASOV-MONGE-AMPERE

La version continue correspond au système de Vlasov-Monge-Ampère (cf. Y.B. et G.Loeper, GAFA 2004)

$$\partial_t f(t, x, \xi) + \nabla_x \cdot (\xi f(t, x, \xi)) - \nabla_\xi \cdot (\nabla_x \varphi(t, x) f(t, x, \xi)) = 0$$

$$\det(\mathbb{I} + D_x^2 \varphi(t, x)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, \xi) d\xi, \quad (t, x, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d+d}$$

LE SYSTEME DE VLASOV-MONGE-AMPERE

La version continue correspond au système de Vlasov-Monge-Ampère (cf. Y.B. et G.Loeper, GAFA 2004)

$$\partial_t f(t, x, \xi) + \nabla_x \cdot (\xi f(t, x, \xi)) - \nabla_\xi \cdot (\nabla_x \varphi(t, x) f(t, x, \xi)) = 0$$

$$\det(\mathbb{I} + D_x^2 \varphi(t, x)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, \xi) d\xi, \quad (t, x, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d+d}$$

dont le système asymptote (pour champs faibles) est celui de Vlasov-Poisson.

LE SYSTEME DE VLASOV-MONGE-AMPERE

La version continue correspond au système de Vlasov-Monge-Ampère (cf. Y.B. et G.Loeper, GAFA 2004)

$$\partial_t f(t, x, \xi) + \nabla_x \cdot (\xi f(t, x, \xi)) - \nabla_\xi \cdot (\nabla_x \varphi(t, x) f(t, x, \xi)) = 0$$

$$\det(\mathbb{I} + D_x^2 \varphi(t, x)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, \xi) d\xi, \quad (t, x, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d+d}$$

dont le système asymptote (pour champs faibles) est celui de Vlasov-Poisson. **En quelque sorte, on a dérivé (en trois étapes) la gravitation de Newton de la simple errance de nuages browniens!**

Commentaires

Le modèle de Vlasov-Monge-Ampère est introduit dans Y.B., G. Loeper, GAFA 2004, comme "relaxation" du modèle d'Euler des fluides incompressibles et comme modèle asymptote de celui de Vlasov-Poisson.

Commentaires

Le modèle de Vlasov-Monge-Ampère est introduit dans Y.B., G. Loeper, GAFA 2004, comme "relaxation" du modèle d'Euler des fluides incompressibles et comme modèle asymptote de celui de Vlasov-Poisson. (La convergence du modèle discret vers celui d'Euler avait été établi dans Y.B. CMP 2000.)

Commentaires

Le modèle de Vlasov-Monge-Ampère est introduit dans Y.B., G. Loeper, GAFA 2004, comme "relaxation" du modèle d'Euler des fluides incompressibles et comme modèle asymptote de celui de Vlasov-Poisson. (La convergence du modèle discret vers celui d'Euler avait été établi dans Y.B. CMP 2000.)

Voir Y.B. ArXiv 2015 pour la dérivation (formelle) de VMA comme équation de grandes déviations du modèle de Zeldovich bruité.

Commentaires

Le modèle de Vlasov-Monge-Ampère est introduit dans Y.B., G. Loeper, GAFA 2004, comme "relaxation" du modèle d'Euler des fluides incompressibles et comme modèle asymptote de celui de Vlasov-Poisson. (La convergence du modèle discret vers celui d'Euler avait été établi dans Y.B. CMP 2000.)

Voir Y.B. ArXiv 2015 pour la dérivation (formelle) de VMA comme équation de grandes déviations du modèle de Zeldovich bruité. Le lien de VMA avec le modèle de Zeldovich avait été établi dans Y.B. Conflu. Math. 2011 où la Γ -limite de la fonctionnelle de grande déviations avait déjà été proposée pour la prise en compte de collisions collantes (sans référence aux LD).

Commentaires

Le modèle de Vlasov-Monge-Ampère est introduit dans Y.B., G. Loeper, GAFA 2004, comme "relaxation" du modèle d'Euler des fluides incompressibles et comme modèle asymptote de celui de Vlasov-Poisson. (La convergence du modèle discret vers celui d'Euler avait été établi dans Y.B. CMP 2000.)

Voir Y.B. ArXiv 2015 pour la dérivation (formelle) de VMA comme équation de grandes déviations du modèle de Zeldovich bruité. Le lien de VMA avec le modèle de Zeldovich avait été établi dans Y.B. Conflu. Math. 2011 où la Γ -limite de la fonctionnelle de grande déviations avait déjà été proposée pour la prise en compte de collisions collantes (sans référence aux LD).

VMA est un exemple de système hamiltonien sur l'espace du transport optimal à coût quadratique, étudié par L. Ambrosio et W. Gangbo CPAM 2008. Voir aussi M. Cullen, W. Gangbo et L. Pisante, ARMA 2007.

MERCI DE VOTRE ATTENTION!

MERCI DE VOTRE ATTENTION!

Auto-références...

La plus récente: "A double LD principle for Monge-Ampère gravitation", arXiv 2015.

Dynamique de rang (1D), particules collantes:

CRAS 1981-1982, SINUM 1984 ("transport-écroulement", sans bruit), thèse d'état 1986 et JCAM 1990 (avec "bruit"), MAA 2004 (MHD), DCDS 2014 (N-Stokes 1D), avec E. Grenier, SINUM 1998, avec W. Gangbo, G. Savaré, M. Westdickenberg, JMPA 2013.

Le modèle de Zeldovich en cosmologie:

avec U. Frisch, M. Hénon, G. Loeper, S. Matarrese, R. Mohayaee, A. Sobolevskii, Mon. Not. R. Astron. Soc. 2003.

Théorie de la convection et modèle géostrophique:

JNLS 2009, Phil. Trans. Royal Soc. A 2013, avec M. Cullen, CMS 2009.

Le système de Vlasov-Monge-Ampère:

CMP 2000, Confluentes Mathematici 2011, avec G. Loeper, GAFA 2004.