Équations aux dérivées partielles et applications

M. Pierre-Louis Lions, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

Cours : Jeux à champ moyen (suite)

Le cours a eu lieu du 6 novembre 2009 au 15 janvier 2010.

1. Introduction

Le cours, suite de celui de l'an dernier, poursuit la présentation d'une théorie nouvelle appelée théorie des « jeux à champ moyen », élaborée en collaboration avec M. Jean-Michel Lasry. L'objectif de cette théorie est d'introduire, de justifier, d'analyser et d'appliquer dans différents contextes une nouvelle classe de modèles mathématiques permettant d'étudier le comportement collectif d'un très grand nombre d'agents en interaction (ou de joueurs au sens de la théorie des jeux) qui tous souhaitent « optimiser » leurs décisions.

Ces modèles peuvent être obtenus en considérant des équilibres de Nash à N joueurs et en faisant tendre N vers l'infini. Dans un cadre dynamique et d'espace d'état continu, ces modèles s'écrivent sous la forme de systèmes (d'un type nouveau) d'équations aux dérivées partielles (EDP en abrégé) non linéaires. Les équations ainsi obtenues sont très générales et contiennent comme cas particuliers de nombreux systèmes et équations classiques : équations elliptiques semi-linéaires, équations de type Hartree de la mécanique quantique, les équations d'Euler compressible de la mécanique des fluides, les équations cinétiques (Vlasov, Boltzmann, Fokker-Planck,...), l'équation de la chaleur, les équations de type milieux poreux ou les équations du transport optimal (problème de Monge-Kantorovich)...

La terminologie « champ moyen » fait référence à la physique et à la mécanique statistiques : dans ces cadres physiques, il s'agit de décrire le comportement global d'un très grand nombre de particules en interaction qui créent un champ dit « moyen » et dont la dynamique dépend. De manière simplifiée, on peut dire que nous généralisons vers cette approche en permettant à chaque agent de « choisir au mieux » ses décisions tout en tenant compte des « champs moyens » créés par les décisions des autres joueurs.

Dans tout ce qui précède, nous avons implicitement admis que les joueurs sont « identiques » ou plus exactement « indistinguables ». Signalons que des variantes de la théorie permettent de considérer plusieurs catégories de joueurs, ou des caractéristiques variant (de manière aléatoire) d'un joueur à l'autre.

Il est donc clair que la classe d'équations que nous obtenons par cette approche générale de modélisation est extrêmement vaste et que de très nombreuses questions notamment mathématiques se posent, dont beaucoup restent à résoudre. Le cours, d'une certaine manière, détaille quelques-uns des progrès accomplis durant l'année.

Cette année, les thèmes abordés concernent le principe de comparaison, des modèles de congestion et les modèles de type planification.

2. Principe de comparaison

Nous considérons pour simplifier les cas des modèles posés dans un domaine périodique (par exemple $Q = [0,1]^d$, $d \geqslant 1$, avec conditions aux bords périodiques). Le cas typique d'équations du type MFG que nous analysons est donné par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + H(x,\nabla u) - \nu\Delta u = f(m) & \text{dans } Q\times]0,T[\\ \dfrac{\partial m}{\partial t} + \nu\Delta m + \operatorname{div}\,(\dfrac{\partial H}{\partial p}(x,\nabla u)m) = 0 & \text{dans } Q\times]0,T[, m \geqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

avec les conditions aux limites (en temps)

$$u\,|_{t=0} = \overline{u}(x) \quad , \quad m\,|_{t=T} = \overline{m}(x). \tag{2}$$

Les fonctions $\overline{u}, \overline{m}, H$ et f sont supposées régulières et nous supposons de plus que $\nu \geqslant 0, \overline{m} \geqslant 0$ et $\int_Q \overline{m}\, dx = 1$, et que H et f vérifient les propriétés d'unicité (voir les cours des années précédentes) suivantes :

$$\begin{gathered} f' \text{ est strictement positive sur }]0,\infty[\ ;\ H(x,p) \\ \text{est convexe en } p \text{ pour tout } x \text{ dans } Q \end{gathered} \tag{3}$$

Il convient de noter que les méthodes de démonstration s'adaptent à des systèmes MFG beaucoup plus généraux pourvu qu'une condition du type (3) (assurant l'unicité des solutions) soit vérifiée.

On considère deux solutions régulières (u_1, m_1) et (u_2, m_2) de (1) vérifiant les conditions (2) avec $\overline{u}$ remplacé par $\overline{u}_1$ et $\overline{u}_2$ (respectivement pour u_1 et u_2) mais $m_1|_{t=T} = m_2|_{t=T} = \overline{m}$. Et on suppose que $\overline{u}_1 \geqslant \overline{u}_2$ sur Q.

La question est alors de savoir si cette comparaison reste valable sur $Q \times [0, T]$.

Théorème : Sous les hypothèses précédentes, l'inégalité $u_1 \geqslant u_2$ sur $Q \times [0, T]$ est vérifiée si $\nu = 0$ ou si $H(x, p) = c_0 \mid p \mid^2$ ($c_0 \geqslant 0$). □

Signalons que dans le cas $\nu > 0$, des exemples stationnaires indiquent que le cas $H(x, p) = c_0 \mid p \mid^2$ semble effectivement exceptionnel.

La démonstration dans le cas $\nu = 0$ repose sur la réécriture du système (1) comme une équation du second ordre (écrire une équation pour $f(m)$ et remplacer dans cette équation $f(m)$ par $\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, \nabla u)$) à savoir

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & -2\dfrac{\partial H}{\partial p}(x,\nabla u)(\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla u) - D^2 u(\dfrac{\partial H}{\partial p}, \dfrac{\partial H}{\partial p}) - Tr(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p^2} D^2 u) h \\ = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

où $h = f'(m)m = f'(f^{-1})(\frac{\partial u}{\partial t} + H(x,\nabla u)))f^{-1}(\frac{\partial u}{\partial t} + H(x,\nabla u))$.

On peut alors démontrer le théorème en observant que cette équation est elliptique et même strictement elliptique en tout point où $m > 0$. De plus, la condition aux limites sur m dans (2) se réécrit

$$u\,|_{t=0} = \bar{u}_0 \ \text{ sur } Q \ ; \ \frac{\partial u}{\partial t} + H(x,\nabla u) = f(\overline{m}) \ \text{ sur } Q. \qquad (5)$$

En effet, il suffit alors d'appliquer le principe du maximum u_1 et $u_2 + \varepsilon e^{-Mt}$ où M est choisi convenablement (suffisamment grand) et $\varepsilon \in]0,1]$ tend vers 0.

Le cas quadratique $H = c_0 \mid p \mid^2$ (avec $\nu = 0$) est traité de manière complètement différente. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $c_0 = \nu$. Et on introduit $\varphi = e^{-u}$ et $\chi = m/\varphi$. On vérifie alors que le système (1) devient alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \nu\Delta\varphi + f(\varphi\chi)\varphi = 0 \quad , \quad \varphi\,|_{t=0} = \overline{\varphi} \\ -\dfrac{\partial \chi}{\partial t} - \nu\Delta\chi + f(\varphi\chi)\chi = 0 \ , \quad \chi\,|_{t=T} = \dfrac{\overline{m}}{\overline{\varphi}} \end{cases} \qquad (6)$$

où $\overline{\varphi} = e^{-\overline{u}}$. Et on démontre alors le théorème en démontrant en fait un résultat plus précis sur ce nouveau système à savoir

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \quad , \quad \chi_1 \geqslant \chi_2 \quad \text{sur} \quad Q \times [0,T]. \qquad (7)$$

3. Les modèles de planification

Il s'agit de résoudre le système (1) dans le cas où les conditions aux limites (2) sont remplacées par

$$m\,|_{t=0} = \underline{m} \ , \ m|_{t=T} = \overline{m} \qquad (8)$$

avec, par exemple, $\underline{m}$, $\overline{m} > 0$ sur Q et $\int_Q \underline{m}\, dx = \int_Q \overline{m}\, dx = 1$.

Comme dans le paragraphe précédent, les résultats connus à ce jour concernent le cas $\nu = 0$ ou le cas $H = c_0 \,|\, p\,|^2$ $(c_0 > 0)$. Et comme dans le paragraphe précédent, l'existence d'une unique solution régulière du système (2) avec les conditions (8) s'obtient d'une part, dans le cas $\nu = 0$, en résolvant l'équation elliptique (4) et d'autre part dans le cas $\nu > 0, H = c_0 \mid p \mid^2$ avec $c_0 > 0$ en utilisant les équations (6) dans lesquelles la condition initiale sur φ est remplacée par $(\chi\varphi)\mid_{t=0} = \underline{m}$.

Néanmoins, cette démonstration (dans le cas $\nu > 0$) peut s'étendre au cas où H se comporte comme $c_0 \mid p \mid^2$ lorsque $\mid p \mid$ tend vers l'infini. Et on sait par ailleurs que le problème n'est pas bien posé si $\dfrac{\partial H}{\partial p^2}$ peut s'annuler.

Séminaire : séminaire de mathématiques appliquées

6 novembre : Pierre-Louis Lions (Collège de France) : Remarques sur l'intégration et les équations différentielles ordinaires.

13 novembre : Gilles Pagès (Université de Paris 6) : Quantification fonctionnelle de processus stochastiques et applications.

20 novembre : Reiner Schaetzle (Université de Tuebingen) : The Willmore functional in geometry and the calculus of variations.

27 novembre : Moshe Markus (Technion, Haifa) : Nonlinear elliptic problems with measure data.

4 décembre : Frédéric Legoll (ENPC-LAMI) : Dynamiques réduites et application à la simulation moléculaire.

11 décembre : Lionel Rosier (Institut Elie Cartan, Université de Nancy) : Contrôlabilité de systèmes paraboliques avec un couplage non linéaire.

8 janvier : Mathieu Lewin (CNRS-Université de Cergy-Pontoise) : Un modèle non linaire pour la description d'un défaut dans un cristal quantique.

15 janvier : Frédéric Lagoutière (Université de Paris-Sud) : Schéma décentré amont : interprétation probabiliste et vitesse de convergence.

22 janvier : Tony Lelièvre (CERMICS-ENPC) : Estimées d'entropie pour des modèles multi-échelles en rhéologie.

29 janvier : Frédéric Hélein (Université de Paris 7) : Quantités conservées pour des équations des ondes non linéaires.

5 février : Jacques Laskar (CNRS, Observatoire de Paris) : La stabilité du système solaire, des méthodes de perturbations aux intégrateurs symplectiques.

12 février : Laure Saint-Raymond (Laboratoire J-L. Lions, Université de Paris 6) : Gyres océaniques et ondes de Rossby piégées.

12 mars : Ionut Danaila (Laboratoire J-L. Lions, Université de Paris 6) : Méthodes de gradients de Sobolev pour la simulation numérique de condensats de Bose-Einstein en rotation.

19 mars : François Alouges (CMAP-Ecole Polytechnique) : Locomotion optimale dans les fluides à bas nombre de Reynolds ou comment contourner le théorème de la coquille Saint-Jacques.

26 mars : Séance « hors les murs » dans le cadre des Journées en l'honneur de John Ball : Docteur Honoris Causa de l'Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions.

2 avril : Chérif Amrouche (Université de Pau et des Pays de l'Adour) : Équations de Navier-Stokes, avec des conditions aux limites non homogènes. Des solutions fortes aux solutions très faibles en passant par les Sobolev fractionnaires.

9 avril : Patrick Joly (INRIA-Rocquencourt) : Schémas numériques préservant l'énergie pour les systèmes hamiltoniens d'équations d'ondes. Application aux cordes de piano.

7 mai : Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia (POEMS, UMR CNRS-INRIA-ENSTA) : Quelques problèmes mathématiques posés par les métamatériaux électromagnétiques à permittivité diélectrique et perméabilité magnétiques négatives.

21 mai : Jean Clairambault (INRIA-Rocquencourt) : Modélisation mathématique de la prolifération cellulaire et de son contrôle circadien : défis en chronothérapeutique des cancers.

28 mai : Bruno Després Laboratoire J.-L. Lions, Université de Paris 6) : Modèles et formulations faibles pour l'élasticité non linéaire compressible avec plasticité parfaite.

4 juin : Mireille Bossy (INRIA-Sophia Antipolis) : Modèles stochastiques lagrangiens en mécanique des fluides ; application au raffinement d'échelle.

11 juin : Céline Grandmont (INRIA-Rocquencourt) : Modélisation mathématique et numérique de l'appareil respiratoire.

18 juin : Stefan Ulbrich (Technische Universität Darmstadt): Optimal control of discontinuous solutions of hyperbolic conservation laws: theory and numerical approximation.

25 juin : Miguel A. Fernandez (INRIA-Rocquencourt) : Le problème direct en électrocardiologie : modélisation, analyse et simulation numérique.

Publications

Lions P.-L., en collaboration avec Musiela M., « Convexity and non-convexity of option prices for SABR models ».

Lions P.-L., en collaboration avec Guéant O. et Lasry J.-M., « Applications of Mean Field Games to growth theory ».

Lions P.-L., en collaboration avec Guéant O. et Lasry J.-M., « Mean Field Games and applications », à paraître dans *Paris-Princeton Lecture Notes in Finance*.

Lions P.-L., en collaboration avec Souganidis P.E., *Viscosity solutions and stochastic partial differential equations,* livre en préparation.

Lions P.-L., en collaboration avec Perthame B. et Souganidis P.E., « Scalar conservation laws with rough (stochastic) fluxes and stochastic averaging lemmes ».

Lions P.-L., « Jeux à champ moyen » (Résumé du cours au Collège de France, 2008-2009).

Lions P.-L., en collaboration avec Cardialaguet P. et Souganidis P.E., « A discussion about the homogenization of moving interfaces », *J. Maths. Pures Appl.*, 91, 2009, p. 339-363.

Lions P.-L., en collaboration avec Lasry J.-M., « Sur l'unicité des solutions des équations MFG ».

Missions, invitations, conférences

Conférence publique (ISAAC, Imperial College), Londres (13 juillet 2009).

Conférence à la NTU, Singapour (21 juillet 2009).

Conférence à l'Académie des sciences du Brésil, Rio de Janeiro (16 septembre 2009).

Conférence à l'université de Chicago (7 octobre 2009).

Conférence à l'université de Chicago (9 octobre 2009).

Exposé devant le « NSF Panel » pour les Instituts de recherche, Chicago (12 octobre 2009).

Conférence à l'université de Chicago (14 octobre 2009).

Conférence à la « Academicians Conference », Hong-Kong (23 octobre 2009).

Conférence au Workshop « Mean Field Games », Villetaneuse (12 novembre 2009).

Conférence généraliste au colloque « Maths à venir », Paris (2 décembre 2009).

Conférence au colloque en l'honneur de M. Schatzman, Lyon (8 décembre 2009).

Conférence aux « Journées des 40 ans du LJLL », Paris (17 décembre 2009).

Conférence généraliste, UCLA, Los Angeles (5 janvier 2010).

Minicours (3 h) à l'IPAM, Los Angeles (6-7 janvier 2010).

Conférence à l'université de Chicago (20 janvier 2010).

Conférence au Workshop « On New Directions In Economic Modelling », Chicago (25 janvier 2010).

Conférence à ICOR 2010, La Havane (22 février 2010).

Minicours (8 h) à l'université du Texas Austin (22 mars-1er avril 2010).

Conférence au Workshop « Rough Paths », Cambridge (7 avril 2010).

Conférence généraliste, Cambridge (7 avril 2010).

Conférence généraliste au Workshop « Forward Look » de l'ESF, Madrid (27 avril 2010).

Conférence généraliste à l'université d'Uppsala (26 mai 2010).

Conférence à l'université d'Uppsala (27 mai 2010).

Responsabilités collectives et fonctions diverses

Membre de l'Académie des sciences ; de l'Académie des technologies ; de l'Académie des sciences d'Italie, d'Argentine et du Brésil ; de l'Istituto Lombardo et de l'Académie de Naples ; de l'Academia Europaea.

Professeur à temps partiel à l'École Polytechnique.

Conseiller scientifique à l'INRIA.

Président du conseil d'administration de l'ENS.

Président du conseil scientifique du CEA-DAM.

Président du conseil scientifique de France Telecom.

Président du conseil scientifique de la Fondation de recherche pour l'aéronautique et l'espace.

Président du Conseil Scientifique de la Chaire de Finance et Développement Durable de l'université Paris-Dauphine.

Président du conseil scientifique de l'initiative de recherche « Finance post-crise ».

Président du conseil scientifique de ParisTech.

Président du jury du prix « Science et Défense ».

Membre du Haut Conseil de la science et de la technologie.

Membre du Visiting Committee du CEA.

Membre du conseil scientifique de l'institut Europlace de Finance.

Membre du Scientific Advisory Panel de l'European Mathematical Society.

Membre fondateur du comité international de l'« International Summer School of Applied Mathematics », Morningside Institute, Chinese Academy of Sciences.

Membre du comité des programmes scientifiques du CNES.

Membre de l'International Advisory Board de l'Institute of Mathematical Sciences de l'Imperial College.

Membre du conseil scientifique de la Fondation du risque.

Membre du conseil d'administration et du conseil scientifique de la Fondation sciences mathématiques de Paris.

Membre du conseil d'administration de la Fondation d'entreprise IXIS.

Membre de la Société des amis du Palais de la découverte.

Membre de l'International Advisory Board of the Scuola di Dottorato in Scienze Astronomiche, Chimiche, Fisiche e Mathematiche « Vito Volterra ».

Membre du conseil scientifique du BCAM (Basque Centre for Applied Mathematics).

Administrateur de Sark et Channel Bridge.

Conseiller scientifique auprès de BNP PARIBAS, EADS-ST et IEF.

Fondateur de MFG R&D.

Éditeur en chef du Journal de mathématiques pures et appliquées.

Éditeur de 45 revues internationales.