

Étude numérique d'un problème de diffusion non-linéaire

Séminaire de Mathématiques Appliquées
du Collège de France

Pauline Lafitte¹ C. Mascia²

¹SIMPAPF - INRIA & Ecole Centrale Paris

²Univ. La Sapienza, Rome

25 novembre 2011

- 1 Introduction
 - Modèle
 - Théorie
- 2 Solution explicite du problème de Riemann
- 3 Schéma semi-discret
 - Description du schéma
 - Interface immobile
 - Interface mobile
- 4 Schéma diphase

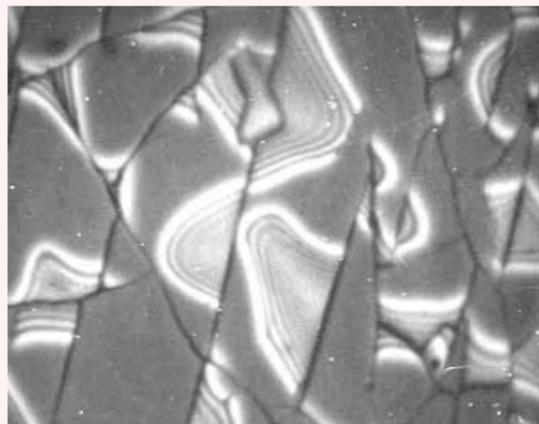
- 1 Introduction
 - Modèle
 - Théorie
- 2 Solution explicite du problème de Riemann
- 3 Schéma semi-discret
 - Description du schéma
 - Interface immobile
 - Interface mobile
- 4 Schéma diphase

- 1 Introduction
 - Modèle
 - Théorie
- 2 Solution explicite du problème de Riemann
- 3 Schéma semi-discret
 - Description du schéma
 - Interface immobile
 - Interface mobile
- 4 Schéma diphase

Transition de phase

Motivation : transport de la masse dans un milieu en relaxation
(ex : polymères au point de vitrification)

Problème : **comprendre** la modélisation de la transition de phase et **approcher numériquement** sa position



Polymère diphasique

Modélisation due à Jäckle et Frisch
(1985) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

où $u(x, t)$ est le **paramètre d'ordre**,
 $v(x, t)$ le **potentiel** défini par

$$v = \phi(u) + \int_{-\infty}^t \theta(t-s) \frac{\partial}{\partial s} (\psi(u) - \phi(u)) ds$$

avec θ la **fonction mémoire** et ϕ de
type **cubique**, loc. Lipschitz

Equations

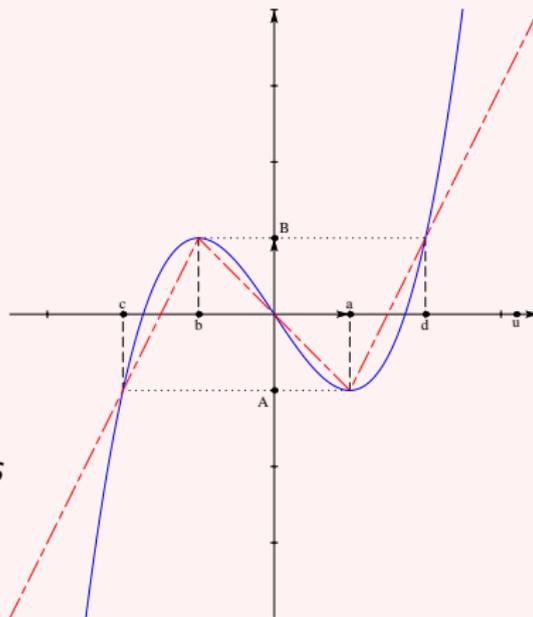
Modélisation due à Jäckle et Frisch (1985) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

où $u(x, t)$ est le **paramètre d'ordre**,
 $v(x, t)$ le **potentiel** défini par

$$v = \phi(u) + \int_{-\infty}^t \theta(t-s) \frac{\partial}{\partial s} (\psi(u) - \phi(u)) ds$$

avec θ la **fonction mémoire** et ϕ de type **cubique**, loc. Lipschitz



fonction de diffusion ϕ

Simplifications : $\theta(t) = \exp(-t/\tau)$ et $\psi : u \mapsto \varepsilon u/\tau$

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\phi(u) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

Simplifications : $\theta(t) = \exp(-t/\tau)$ et $\psi : u \mapsto \varepsilon u/\tau$

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\phi(u) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

Cas $\tau = 0$ (sans mémoire), $\varepsilon > 0$: Novick-Cohen et Pego (1991)

Pb.
de
Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x \left(\phi(u) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \right) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^{+*}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\phi(u) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^{+*}, \\ u(\cdot, 0) \in L^\infty(\Omega) \end{array} \right.$$

→ existence globale et unicité de la solution C^1 .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(u), x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) \text{ donnée} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(u), x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) \text{ donnée} \end{cases}$$

- Si $\phi : u \mapsto \mathbf{m}u$, solution :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathbf{m} t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(4\mathbf{m}t)} u^0(y) dy$$

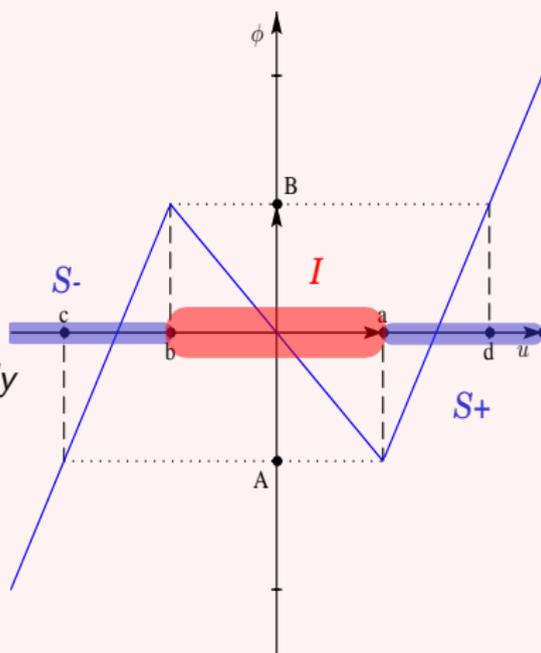
Diffusion non-linéaire 1d : cas $\tau = 0$ et $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(u), x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) \text{ donnée} \end{cases}$$

- Si $\phi : u \mapsto \mathbf{m}u$, solution :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathbf{m}t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(4\mathbf{m}t)} u^0(y) dy$$

- ϕ non monotone \Rightarrow pb mal posé



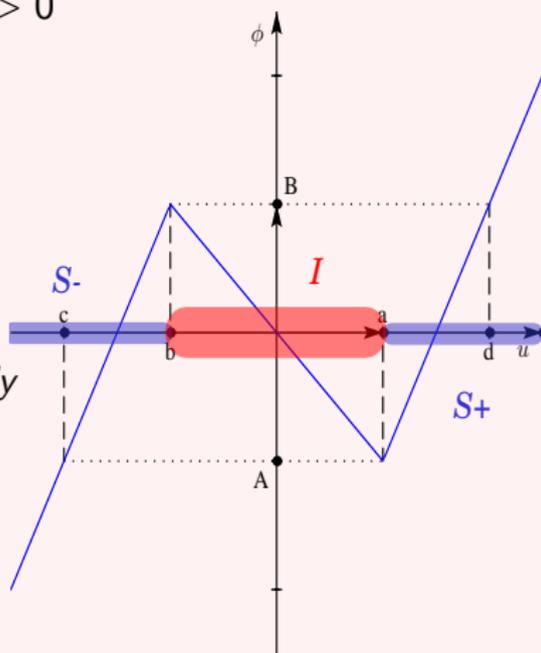
Diffusion non-linéaire 1d : cas $\tau = 0$ et $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\phi(u) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} u \right), x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) \text{ donnée} \end{cases}$$

- Si $\phi : u \mapsto \mathbf{m}u$, solution :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathbf{m}t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(4\mathbf{m}t)} u^0(y) dy$$

- ϕ non monotone \Rightarrow pb mal posé
- Pour $\varepsilon > 0$, sortie exponentielle si linéarisation autour de $\bar{u} \in I$



1 Introduction

- Modèle
- Théorie

2 Solution explicite du problème de Riemann

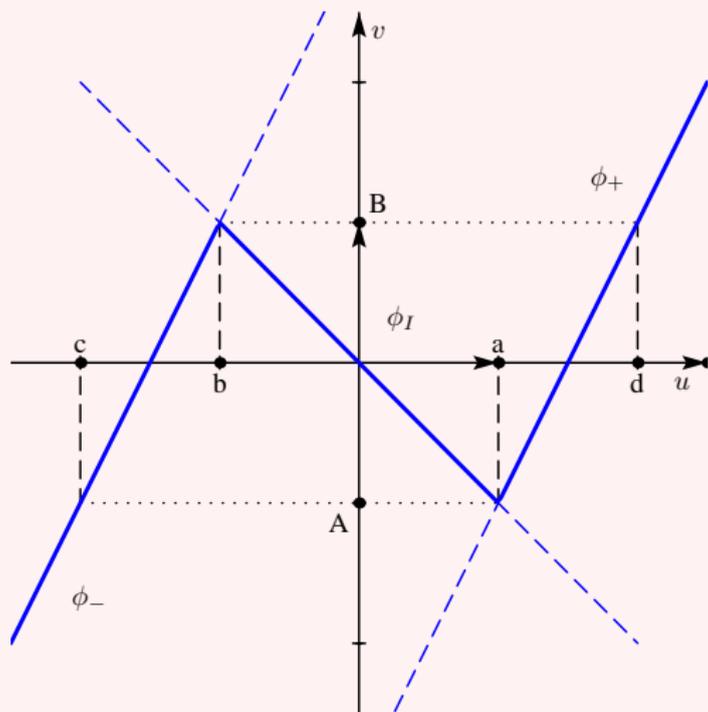
3 Schéma semi-discret

- Description du schéma
- Interface immobile
- Interface mobile

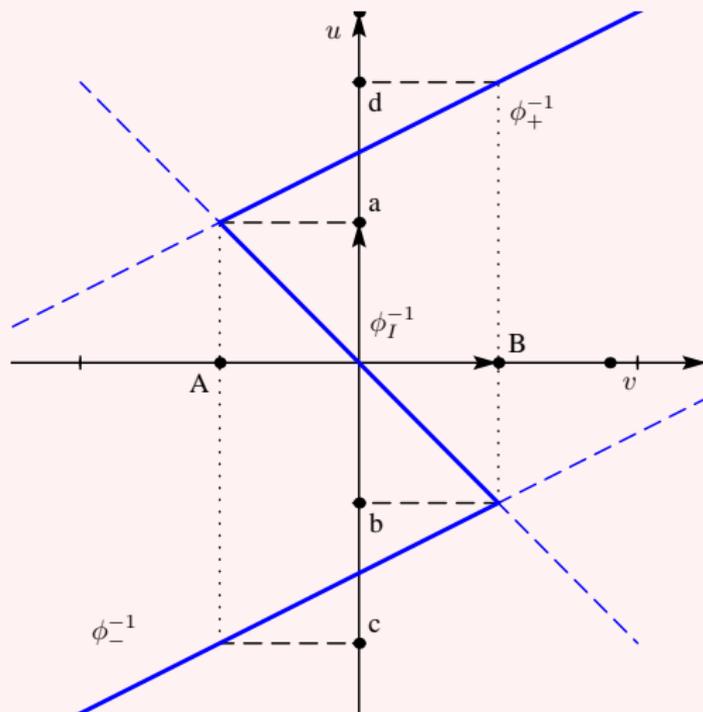
4 Schéma diphase

Résultats analytiques pour

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2}$$



Résultats analytiques pour $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2}$



Résultats analytiques pour

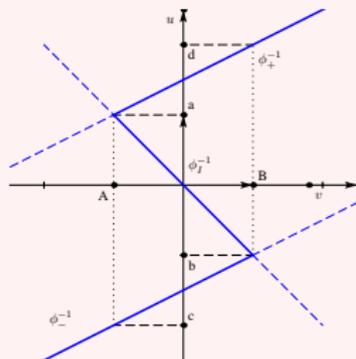
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2}$$

Plotnikov (1993-99) : description par mesures de Young

$$u = \lambda_- \phi_-^{-1}(v) + \lambda_I \phi_I^{-1}(v) + \lambda_+ \phi_+^{-1}(v)$$

où

$$\begin{cases} \lambda_{+,-,I} \geq 0, \\ \lambda_-(x, t) + \lambda_I(x, t) + \lambda_+(x, t) = 1, \\ \lambda_-(x, t) = 1 \text{ si } v(x, t) < A, \\ \lambda_+(x, t) = 1 \text{ si } v(x, t) > B. \end{cases}$$



Résultats analytiques pour

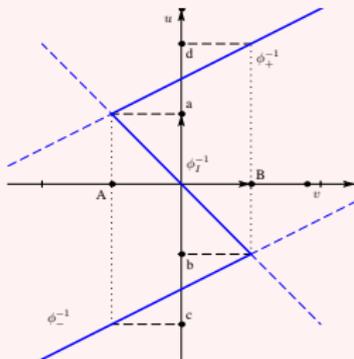
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2}$$

Plotnikov (1993-99) : description par mesures de Young

$$u = \lambda_- \phi_-^{-1}(\mathbf{v}) + \lambda_I \phi_I^{-1}(\mathbf{v}) + \lambda_+ \phi_+^{-1}(\mathbf{v})$$

où

$$\begin{cases} \lambda_{+,-,I} \geq 0, \\ \lambda_-(x, t) + \lambda_I(x, t) + \lambda_+(x, t) = 1, \\ \lambda_-(x, t) = 1 \text{ si } \mathbf{v}(x, t) < A, \\ \lambda_+(x, t) = 1 \text{ si } \mathbf{v}(x, t) > B. \end{cases}$$



$\forall g \in C^1, \nearrow, G := s \mapsto \int_0^s g \circ \phi$ et

$G^* := \lambda_- G \circ \phi_-^{-1} + \lambda_I G \circ \phi_I^{-1} + \lambda_+ G \circ \phi_+^{-1}$, on a

$$\frac{\partial G^*(\mathbf{v})}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(g(\mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) + g'(\mathbf{v}) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right)^2 \leq 0$$

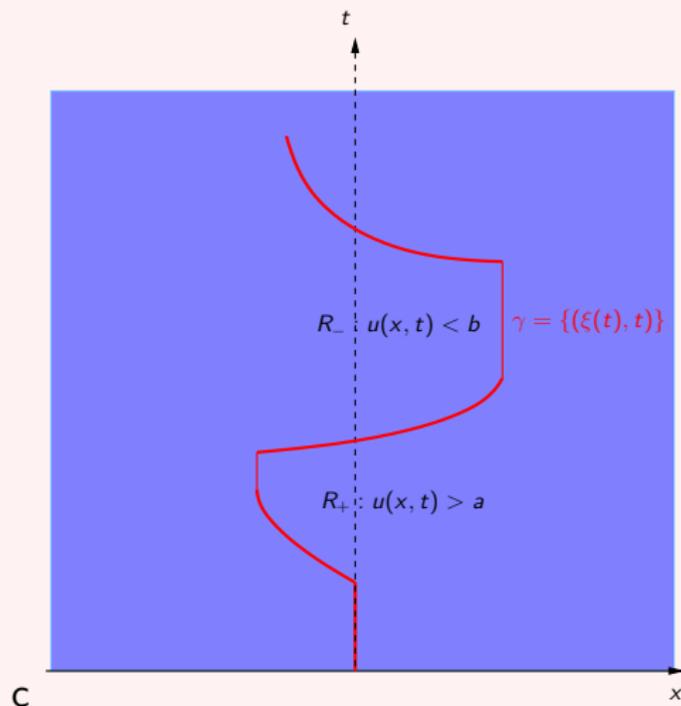
Une interface qui bouge ?

Evans et Portilheiro (2004) : solutions (faibles) diphasiques
solutions régulières par morceaux + « inégalité d'entropie »

Une interface qui bouge ?

Evans et Portilheiro (2004) : solutions (faibles) diphasiques

solutions régulières par morceaux + « inégalité d'entropie »



À l'interface γ :

- Conditions de transmission :

$$[\phi(u)]_{\gamma} = 0, \quad \xi'(t) [u]_{\gamma} + \left[\frac{\partial \phi(u)}{\partial x} \right]_{\gamma} = 0$$

À l'interface γ :

- Conditions de transmission :

$$[\phi(u)]_\gamma = 0, \quad \xi'(t) [u]_\gamma + \left[\frac{\partial \phi(u)}{\partial x} \right]_\gamma = 0$$

- Conditions d'entropie : $\phi(u(\xi(t), t)) \in [A, B]$ et

$$\begin{cases} \xi'(t) = 0 & \text{si } \phi(u(\xi(t), t)) \in (A, B), \\ \xi'(t) \geq 0 & \text{si } \phi(u(\xi(t), t)) = A, \\ \xi'(t) \leq 0 & \text{si } \phi(u(\xi(t), t)) = B. \end{cases}$$

À l'interface γ :

- Conditions de transmission :

$$[\phi(u)]_\gamma = 0, \quad \xi'(t) [u]_\gamma + \left[\frac{\partial \phi(u)}{\partial x} \right]_\gamma = 0$$

- Conditions d'entropie : $\phi(u(\xi(t), t)) \in [A, B]$ et

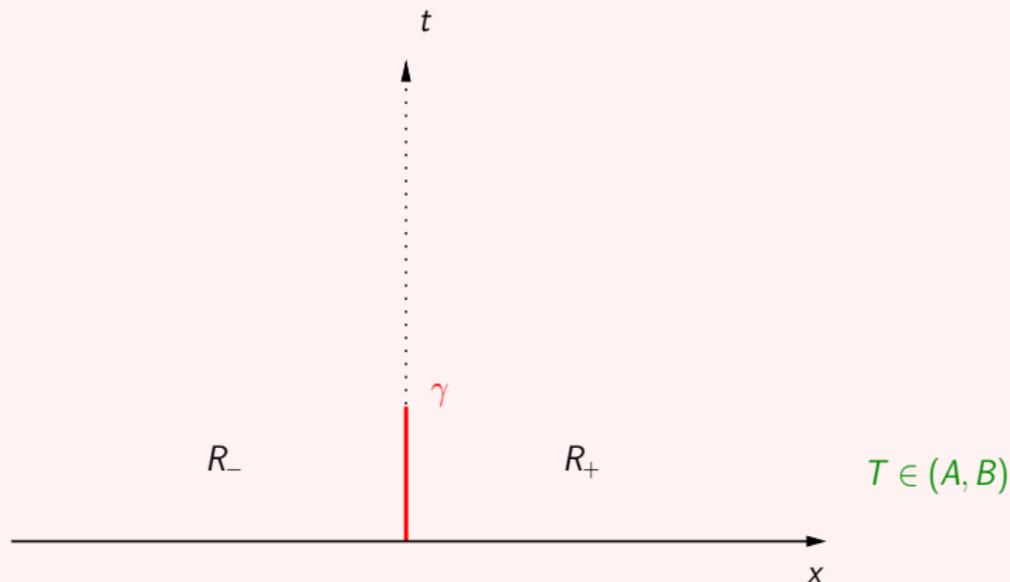
$$\begin{cases} \xi'(t) = 0 & \text{si } \phi(u(\xi(t), t)) \in (A, B), \\ \xi'(t) \geq 0 & \text{si } \phi(u(\xi(t), t)) = A, \\ \xi'(t) \leq 0 & \text{si } \phi(u(\xi(t), t)) = B. \end{cases}$$

Mascia, Terracina et Tesei (2009) : existence locale et unicité ;
Smarazzo, Tesei (2010) : temps long

Interface immobile

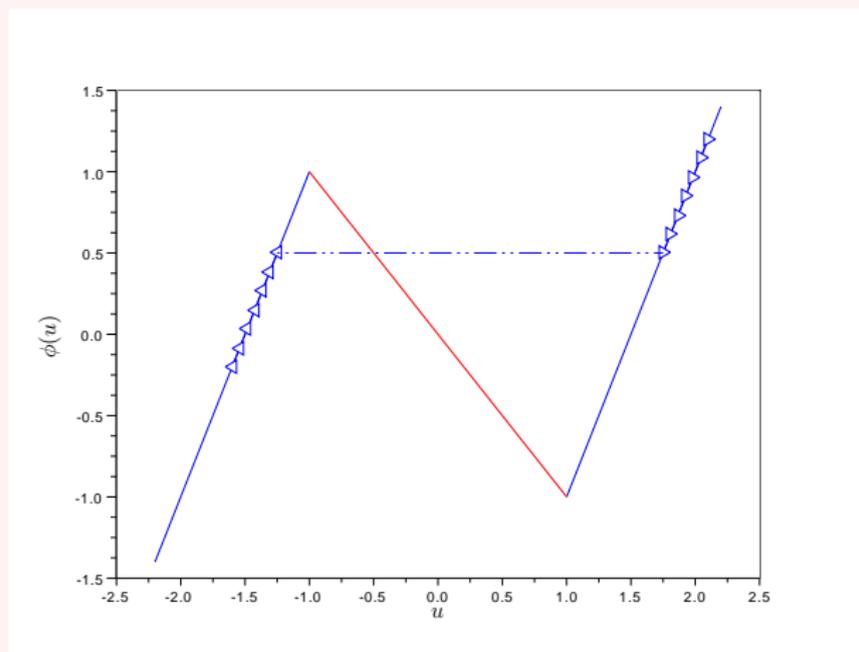
$$\phi(u(\xi(t), t)) := T \in (A, B)$$

$$R_{\pm} = \{(x, t) : t > 0, \pm(x - \xi(t)) > 0\}$$



vue dans le plan espace-temps

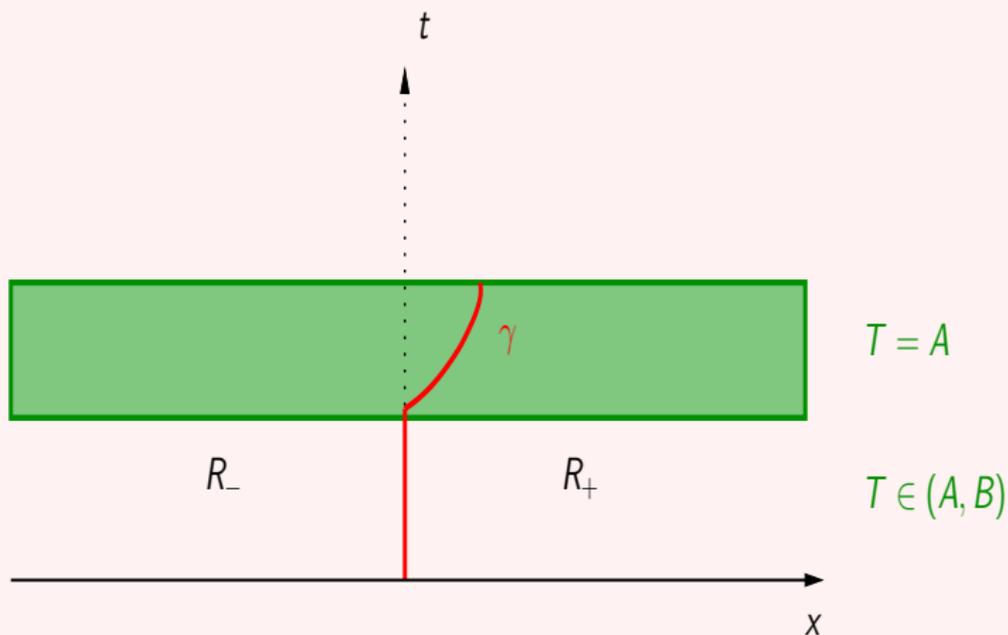
Interface immobile : espace des phases



vue dans le plan de phase $(u, \phi(u))$

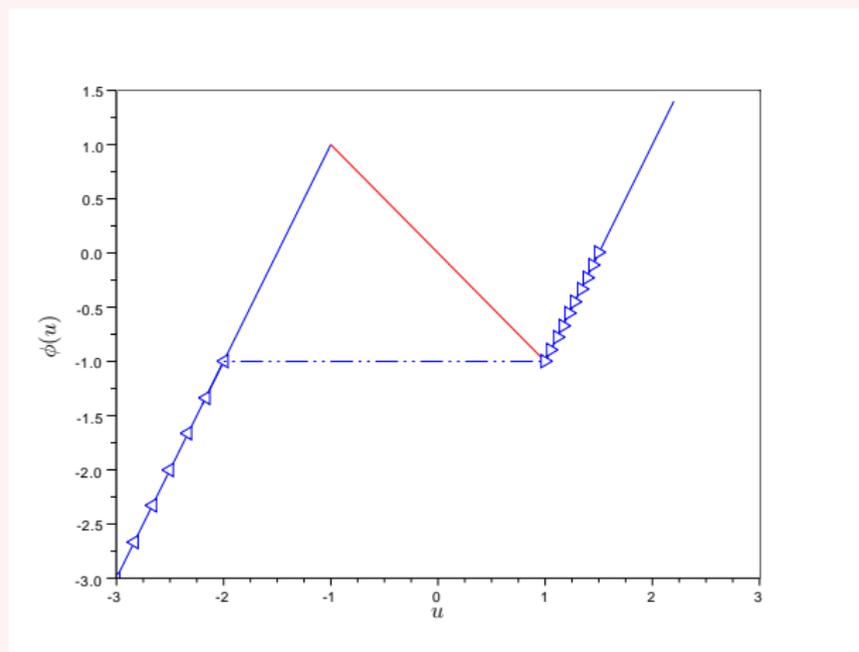
Mouvement vers la droite

$$T = \phi(u(\xi(t), t)) = A$$



vue dans le plan espace-temps

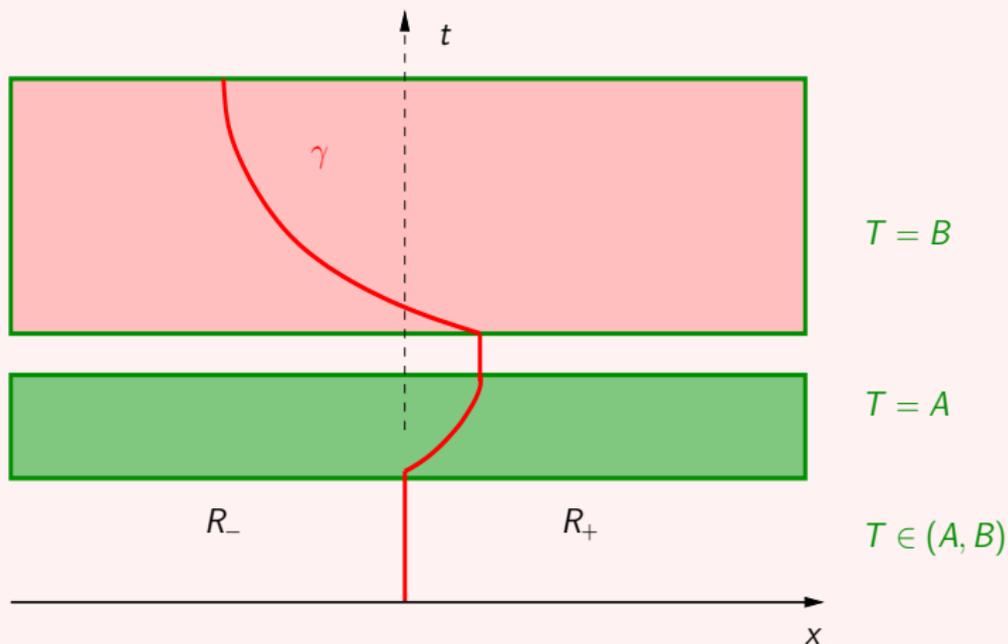
Mouvement vers la droite : espace des phases



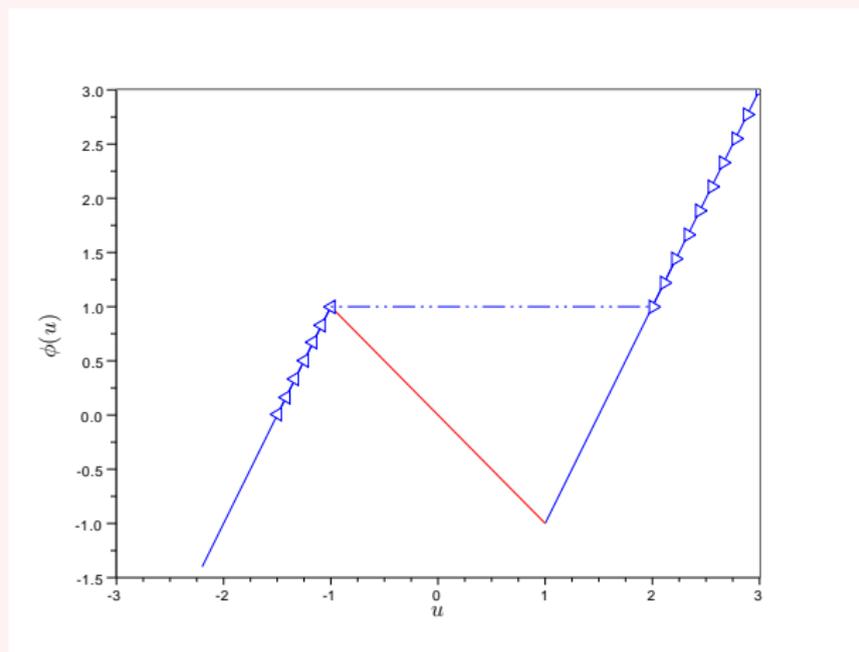
vue dans le plan de phase $(u, \phi(u))$

Mouvement vers la gauche

$$T = \phi(u(\xi(t), t)) = B$$



Mouvement vers la gauche : espace des phases



- 1 Introduction
 - Modèle
 - Théorie
- 2 Solution explicite du problème de Riemann
- 3 Schéma semi-discret
 - Description du schéma
 - Interface immobile
 - Interface mobile
- 4 Schéma diphasique

Solutions auto-similaires

Validation des schémas numériques : calcul explicite de la solution d'un problème de Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2} \\ u(\cdot, 0) = u^0 : x \mapsto \begin{cases} u_- \leq b, & x < 0 \\ u_+ \geq a, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Solutions auto-similaires

Validation des schémas numériques : calcul explicite de la solution d'un problème de Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2} \\ u(\cdot, 0) = u^0 : x \mapsto \begin{cases} u_- \leq b, & x < 0 \\ u_+ \geq a, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

solution auto-similaire : $(x, t) \rightarrow (\lambda x, \lambda^2 t)$ d'où

$$u(x, t) = f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

Solutions auto-similaires

Validation des schémas numériques : calcul explicite de la solution d'un problème de Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2} \\ u(\cdot, 0) = u^0 : x \mapsto \begin{cases} u_- \leq b, & x < 0 \\ u_+ \geq a, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

solution auto-similaire : $(x, t) \rightarrow (\lambda x, \lambda^2 t)$ d'où

$$u(x, t) = f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

- **courbe de discontinuité** : $\xi(t) = \bar{\xi}\sqrt{t}$
- **équation pour f** : $\forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{\bar{\xi}\}, \quad (\phi \circ f)''(\xi) + \frac{1}{2}\xi f'(\xi) = 0.$

Cas type

ϕ continue affine par morceaux avec $m, q > 0$:

$$\phi(u) = mu + \begin{cases} q, & \text{si } u \leq b, \\ -q, & \text{si } u \geq a. \end{cases}$$

Cas type

ϕ continue affine par morceaux avec $m, q > 0$:

$$\phi(u) = mu + \begin{cases} q, & \text{si } u \leq b, \\ -q, & \text{si } u \geq a. \end{cases}$$

On définit $E_-^m(\xi) := \frac{1}{\sqrt{4\pi m}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-y^2/4m} dy$, $E_+^m(\xi) := 1 - E_-^m(\xi)$.

Cas type

ϕ continue affine par morceaux avec $m, q > 0$:

$$\phi(u) = mu + \begin{cases} q, & \text{si } u \leq b, \\ -q, & \text{si } u \geq a. \end{cases}$$

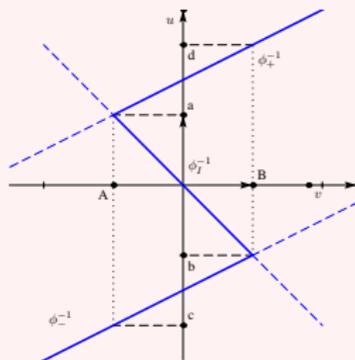
On définit $E_-^m(\xi) := \frac{1}{\sqrt{4\pi m}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-y^2/4m} dy$, $E_+^m(\xi) := 1 - E_-^m(\xi)$.

Forme générale : $u(x, t) = f(x/\sqrt{t})$,

$$f(\xi) := \begin{cases} \phi_-^{-1}(g(\xi)) & \xi < \bar{\xi}, \\ \phi_+^{-1}(g(\xi)) & \xi > \bar{\xi}, \end{cases}$$

avec

$$g(\xi) := \phi(u_-)E_+^m(\xi) + \phi(u_+)E_-^m(\xi).$$



Condition caractéristique (CC) :

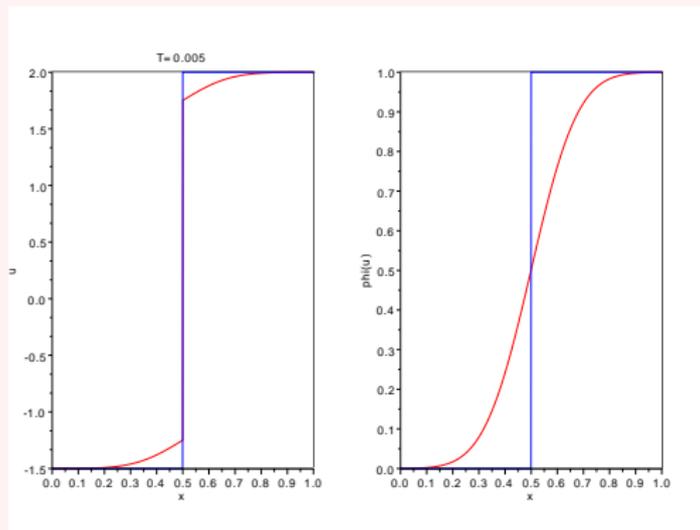
$$C := \frac{1}{2}(\phi(u_-) + \phi(u_+)) \in [A, B],$$

Condition caractéristique (CC) :

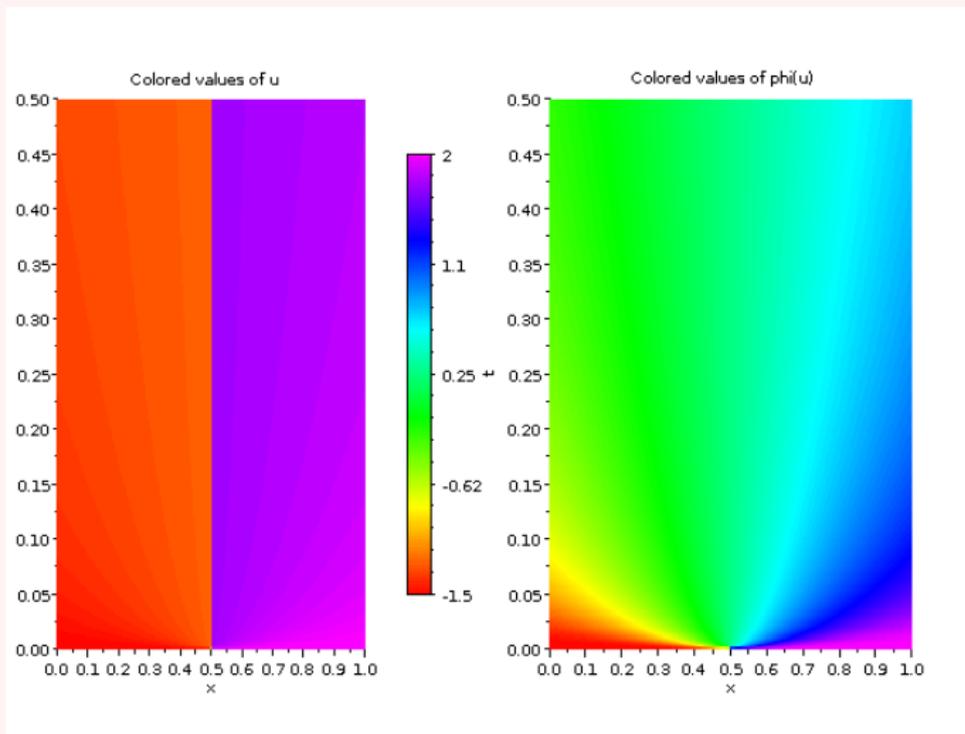
$$C := \frac{1}{2}(\phi(u_-) + \phi(u_+)) \in [A, B],$$

(CC) vérifiée SSI l'interface est **immobile**, c'est-à-dire $\bar{\xi} = 0$

Ex. : $m = 2$, $q_{\pm} = \mp 3$, $u_- = -1.5$. $u_+ = 2$



u et $\phi(u)$ en fonction de x



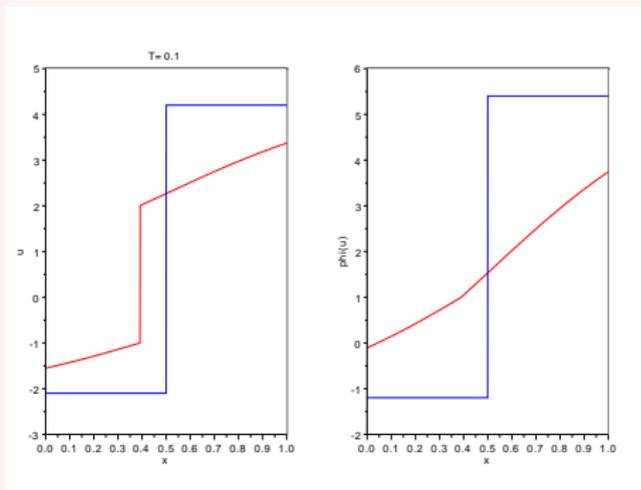
vues de u (à g.) et $\phi(u)$ (à d.) dans le plan espace-temps

(CC) non vérifiée SSI l'interface **bouge**

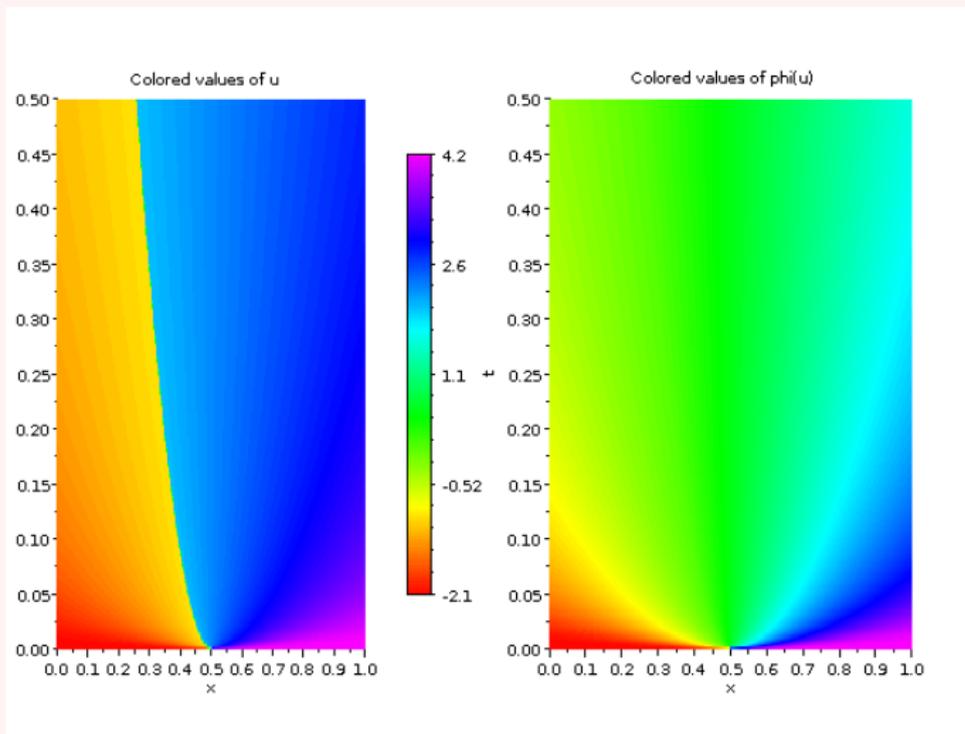
et $\bar{\xi}$ est donnée par la relation implicite

$$g(\bar{\xi}) = B \text{ si } C > B \text{ ou } g(\bar{\xi}) = A \text{ si } C < A.$$

Ex. : $m = 2$, $q_{\pm} = \mp 3$, $u_- = -2.1$, $u_+ = 4.2$



u et $\phi(u)$ en fonction de x



vues de u (à g.) et $\phi(u)$ (à d.) dans le plan espace-temps

- 1 Introduction
 - Modèle
 - Théorie
- 2 Solution explicite du problème de Riemann
- 3 Schéma semi-discret
 - Description du schéma
 - Interface immobile
 - Interface mobile
- 4 Schéma diphase

- 1 Introduction
 - Modèle
 - Théorie
- 2 Solution explicite du problème de Riemann
- 3 Schéma semi-discret
 - Description du schéma
 - Interface immobile
 - Interface mobile
- 4 Schéma diphase

Discrétisation en espace

Discrétisation centrée d'ordre 2, maillage uniforme Δx , J points :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Discrétisation en espace

Discrétisation centrée d'ordre 2, maillage uniforme Δx , J points :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

$$U^0 := \begin{pmatrix} u_- \\ \vdots \\ u_- \\ u_+ \\ \vdots \\ u_+ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^J, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Discrétisation en espace

Discrétisation centrée d'ordre 2, maillage uniforme Δx , J points :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

$$U^0 := \begin{pmatrix} u_- \\ \vdots \\ u_- \\ u_+ \\ \vdots \\ u_+ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^J, \quad \mathbb{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Schéma semi-discret non-linéaire autonome :

$$\frac{dU}{dt} = - \left(\Delta x^2 \mathbb{I} + \varepsilon \mathbb{A} \right)^{-1} \mathbb{A} \phi(U) =: -\mathbb{A}_{\Delta x^2, \varepsilon} \phi(U)$$

Limite régulière : $\varepsilon = 0$.

Problème : ϕ est presque toujours linéaire, mais... pas toujours !

Techniques :

- Etude de $V = \phi(U)$
- Réinterprétation en EDO linéaire non-autonome :

$$\frac{dU}{d\tau}(\tau) = -M(\tau)U(\tau) + W(\tau), \quad \tau = t/\Delta x^2$$

$\tau \mapsto M(\tau) \in \mathbb{R}^{J \times J}$ et $\tau \mapsto W(\tau) \in \mathbb{R}^J$ constantes par morceaux.

→ Saut quand U_j change de phase.

Cas général

Problème : ϕ est presque toujours linéaire, mais... pas toujours !

Techniques :

- Etude de $V = \phi(U)$
- Réinterprétation en EDO linéaire non-autonome :

$$\frac{dU}{d\tau}(\tau) = -M(\tau)U(\tau) + W(\tau), \quad \tau = t/\Delta x^2$$

$\tau \mapsto M(\tau) \in \mathbb{R}^{J \times J}$ et $\tau \mapsto W(\tau) \in \mathbb{R}^J$ constantes par morceaux.

→ Saut quand U_j change de phase.

Cas symétrique : $m = 2$, $q = 3$;

dans S^- : $b = -1$, $c = -2$,

dans S^+ : $a = 1$, $d = 2$

et $A = \phi(a) = \phi(c) = -1$, $B = \phi(b) = \phi(d) = 1$

Généralisation aisée par produit par une matrice diagonale

- 1 Introduction
 - Modèle
 - Théorie
- 2 Solution explicite du problème de Riemann
- 3 Schéma semi-discret
 - Description du schéma
 - **Interface immobile**
 - Interface mobile
- 4 Schéma diphase

Interface immobile : $u_+ + u_- \in [-1, 1]$

Remarque : $V = \phi(U)$ est solution d'une EDO autonome

$$\frac{dV}{d\tau} = -2\mathbb{A} V,$$

car $\exp(-2\tau\mathbb{A}) \in (\mathbb{R}^+)^{J \times J}$, $\|\exp(-2\tau\mathbb{A})\|_\infty = 1$.

Interface immobile : $u_+ + u_- \in [-1, 1]$

Remarque : $V = \phi(U)$ est solution d'une EDO autonome

$$\frac{dV}{d\tau} = -2\mathbb{A} V,$$

car $\exp(-2\tau\mathbb{A}) \in (\mathbb{R}^+)^{J \times J}$, $\|\exp(-2\tau\mathbb{A})\|_\infty = 1$.

Analyse spectrale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V_j(t/h^2) = \frac{\phi(u_+) + \phi(u_-)}{2} = v^\infty,$$

et

$$U_j^\infty = \begin{cases} \phi_-^{-1}(v^\infty) & \text{si } j \leq K, \\ \phi_+^{-1}(v^\infty) & \text{si } j \geq K + 1. \end{cases}$$

Interface immobile : $u_+ + u_- \in [-1, 1]$

Remarque : $V = \phi(U)$ est solution d'une EDO autonome

$$\frac{dV}{d\tau} = -2\mathbb{A} V,$$

car $\exp(-2\tau\mathbb{A}) \in (\mathbb{R}^+)^{J \times J}$, $\|\exp(-2\tau\mathbb{A})\|_\infty = 1$.

Analyse spectrale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V_j(t/h^2) = \frac{\phi(u_+) + \phi(u_-)}{2} = v^\infty,$$

et

$$U_j^\infty = \begin{cases} \phi_-^{-1}(v^\infty) & \text{si } j \leq K, \\ \phi_+^{-1}(v^\infty) & \text{si } j \geq K + 1. \end{cases}$$

→ Schéma discret Δt , Δx

Schéma **implicite** plutôt que semi-implicite ou explicite à cause de la régularité : même ordre de convergence (0.5 en Δt / 1 en Δx) mais pas de CFL.

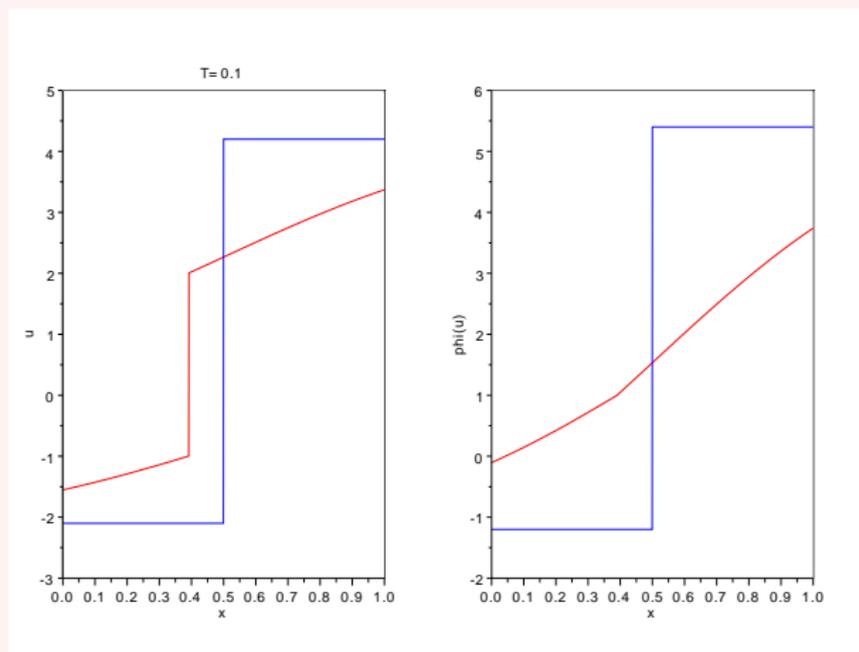
Résultats numériques

implicite (var Δt)				implicite (var Δx)				explicite ($\Delta t = \Delta x^2/4$)		
K	J	erreur	cpu	K	J	erreur	cpu	J	erreur	cpu
14		3.5e-3	0.16		6.	2.6e-2	1.76	6	3.7e-2	0.02
16		3.3e-3	0.62		7.	1.3e-2	1.94	7	1.9e-2	0.13
18		3.3e-3	1.24		8.	6.7e-3	2.31	8	9.4e-3	0.16
20	9	3.3e-3	3.05	20	9.	3.3e-3	3.05	9	4.7e-3	0.80
22		3.3e-3	9.87		10.	1.7e-3	4.48	10	2.4e-3	3.87
					11.	8.4e-4	7.71	11	1.2e-3	25.54
					12.	4.3e-4	14.37	12	6.0e-4	193.12
					13.	2.3e-4	33.90	13	3.1e-4	1971.31
								14	1.7e-4	17407.04

Comparaison des erreurs L^2 sur $\phi(u)$ et temps d'exécution (cpu) pour les schémas implicite et explicite par rapport à $\Delta t = 2^{-K}$, $\Delta x = 2^{-J}$.

- 1 Introduction
 - Modèle
 - Théorie
- 2 Solution explicite du problème de Riemann
- 3 Schéma semi-discret
 - Description du schéma
 - Interface immobile
 - **Interface mobile**
- 4 Schéma diphase

Interface mobile : $u_+ + u_- > 1$



u et $\phi(u)$ en fonction de x dans le cas de ϕ symétrique

Question : Que sont $M(\tau)$ et $W(\tau)$?

Question : Que sont $M(\tau)$ et $W(\tau)$?

Condition initiale type, $\delta > 0$:

$$U_j^0 = \begin{cases} -1 & \text{si } j \leq K \\ 2 & \text{si } j = K + 1 \\ 2 + \delta & \text{si } j \geq K + 2 \end{cases}$$

Développement de Taylor : localement en temps

$$\begin{cases} U_{j \leq K-1} \text{ décroissant dans } S_-, \\ U_K \text{ croissant à travers la phase instable } I, \\ U_{j \geq K+1} \text{ décroissant dans } S_+. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} M(\tau) = \mathbf{AD} =: \mathbb{B} \text{ avec } \mathbb{D} = \text{diag}(2, \dots, 2, -1, 2, \dots, 2) \\ W(\tau) = (0, \dots, 0, -3, 0, 3, 0, \dots, 0)^T =: \mathcal{B}, \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} M(\tau) = \mathbf{A}\mathbb{D} =: \mathbb{B} \text{ avec } \mathbb{D} = \text{diag}(2, \dots, 2, -1, 2, \dots, 2) \\ W(\tau) = (0, \dots, 0, -3, 0, 3, 0, \dots, 0)^T =: \mathcal{B}, \end{cases}$$

Solution :
$$U(\tau) = \exp(-\tau\mathbb{B})U(0) + \left(\int_0^\tau \exp(-s\mathbb{B})ds \right) \mathcal{B}.$$

D'où

$$\begin{cases} M(\tau) = \mathbb{A}\mathbb{D} =: \mathbb{B} \text{ avec } \mathbb{D} = \text{diag}(2, \dots, 2, -1, 2, \dots, 2) \\ W(\tau) = (0, \dots, 0, -3, 0, 3, 0, \dots, 0)^T =: \mathcal{B}, \end{cases}$$

Solution :
$$U(\tau) = \exp(-\tau\mathbb{B})U(0) + \left(\int_0^\tau \exp(-s\mathbb{B})ds \right) \mathcal{B}.$$

Analyse spectrale : $\text{Sp}(\mathbb{B}) = \{\mu_{-1} < 0\} \cup \{0\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_{J-2} > 0\}.$

D'où

$$\begin{cases} M(\tau) = \mathbb{A}\mathbb{D} =: \mathbb{B} \text{ avec } \mathbb{D} = \text{diag}(2, \dots, 2, -1, 2, \dots, 2) \\ W(\tau) = (0, \dots, 0, -3, 0, 3, 0, \dots, 0)^T =: \mathcal{B}, \end{cases}$$

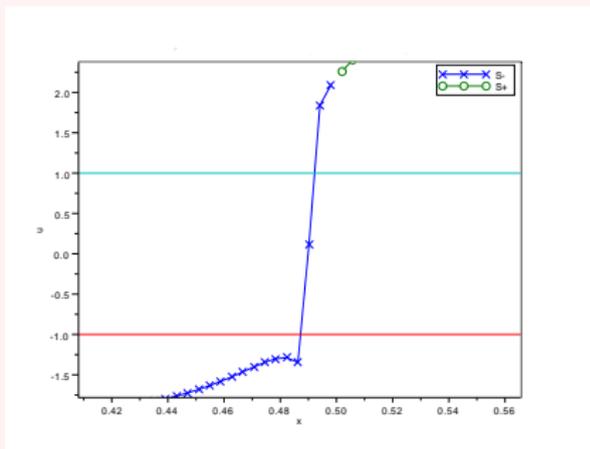
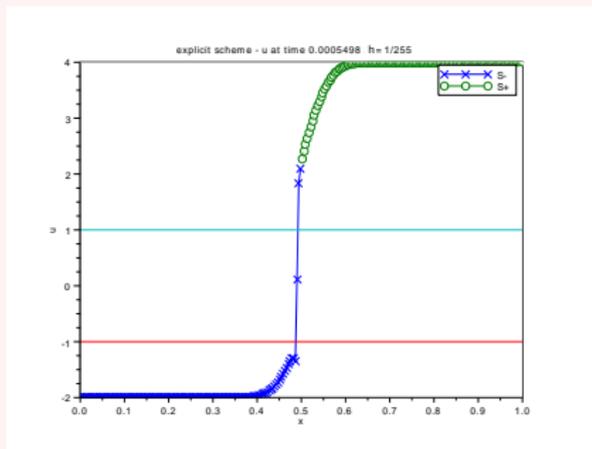
Solution :
$$U(\tau) = \exp(-\tau\mathbb{B})U(0) + \left(\int_0^\tau \exp(-s\mathbb{B})ds \right) \mathcal{B}.$$

Analyse spectrale : $\text{Sp}(\mathbb{B}) = \{\mu_{-1} < 0\} \cup \{0\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_{J-2} > 0\}.$

Temps de sortie (P_μ projecteurs spectraux) :

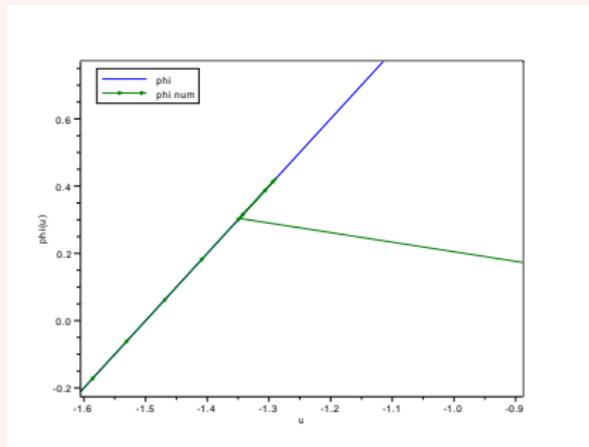
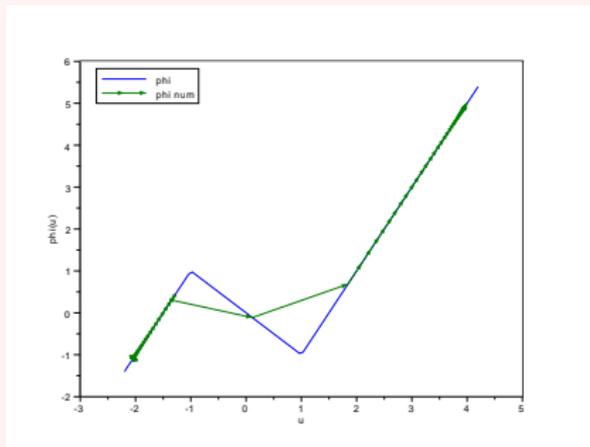
$$\tilde{\tau} \simeq \frac{\log \left(1 - [P_0 U(0)](K) - \sum_{\mu \in \text{Sp}(\mathbb{B}) \setminus \{0\}} \frac{[P_\mu \mathcal{B}](K)}{\mu} \right)}{\log \left(\left[P_{\mu_{-1}} \left(U(0) - \frac{\mathcal{B}}{\mu_{-1}} \right) \right] (K) \right)}.$$

→ Pas de schéma implicite ! Le schéma explicite capture la position de l'interface, mais u_L peut traverser la zone instable I .



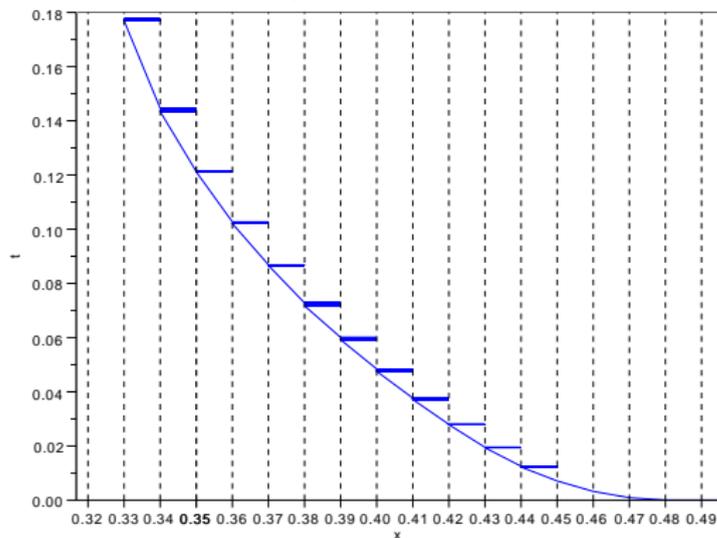
Évolution en temps petit en (x, u) pour $(u_-, u_+) = (-2, 4)$.

animation



Évolution en temps petit en $(u, \phi(u))$ pour $(u_-, u_+) = (-2, 4)$.

Résultats numériques



interface obtenue par le schéma explicite

- 1 Introduction
 - Modèle
 - Théorie
- 2 Solution explicite du problème de Riemann
- 3 Schéma semi-discret
 - Description du schéma
 - Interface immobile
 - Interface mobile
- 4 Schéma diphasique

Condition d'entropie

Idée : utiliser la **condition d'entropie** d'Evans et Portilheiro

Matrice de projection $\Pi_j := \begin{pmatrix} 0_{j-1} & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{J-j-1} \end{pmatrix}$

Soit $U \in \mathbb{R}^J$, $j_* \in \{1, \dots, J\}$ et $C := C(U, j_*)$ la valeur de transition

$$C = C(U, j_*) := \frac{1}{2} (\phi_-(U_{j_*-1}) + \phi_+(U_{j_*+2})).$$

Condition d'entropie

Idée : utiliser la **condition d'entropie** d'Evans et Portilheiro

Matrice de projection $\Pi_j := \begin{pmatrix} 0_{j-1} & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{J-j-1} \end{pmatrix}$

Soit $U \in \mathbb{R}^J$, $j_* \in \{1, \dots, J\}$ et $C := C(U, j_*)$ la valeur de transition

$$C = C(U, j_*) := \frac{1}{2} (\phi_-(U_{j_*-1}) + \phi_+(U_{j_*+2})).$$

- Si $|C| \leq 1$, $\bar{C} = C$ et conditions de transmission :

$$\phi(U_{j_*}) = \phi(U_{j_*+1}) = \frac{1}{2} (\phi(U_{j_*-1}) + \phi(U_{j_*+2})) = C(U, j_*)$$

Condition d'entropie

Idée : utiliser la **condition d'entropie** d'Evans et Portilheiro

Matrice de projection $\Pi_j := \begin{pmatrix} 0_{j-1} & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{J-j-1} \end{pmatrix}$

Soit $U \in \mathbb{R}^J$, $j_* \in \{1, \dots, J\}$ et $C := C(U, j_*)$ la valeur de transition

$$C = C(U, j_*) := \frac{1}{2} (\phi_-(U_{j_*-1}) + \phi_+(U_{j_*+2})).$$

- Si $|C| \leq 1$, $\bar{C} = C$ et conditions de transmission :

$$\phi(U_{j_*}) = \phi(U_{j_*+1}) = \frac{1}{2} (\phi(U_{j_*-1}) + \phi(U_{j_*+2})) = C(U, j_*)$$

- Si $C > 1$, troncature : $\bar{C} = 1$ & $U_{j_*} = -1$ & $U_{j_*+1} = 2$

Condition d'entropie

Idée : utiliser la **condition d'entropie** d'Evans et Portilheiro

Matrice de projection $\Pi_j := \begin{pmatrix} 0_{j-1} & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{J-j-1} \end{pmatrix}$

Soit $U \in \mathbb{R}^J$, $j_* \in \{1, \dots, J\}$ et $C := C(U, j_*)$ la valeur de transition

$$C = C(U, j_*) := \frac{1}{2} (\phi_-(U_{j_*-1}) + \phi_+(U_{j_*+2})).$$

- Si $|C| \leq 1$, $\bar{C} = C$ et conditions de transmission :

$$\phi(U_{j_*}) = \phi(U_{j_*+1}) = \frac{1}{2} (\phi(U_{j_*-1}) + \phi(U_{j_*+2})) = C(U, j_*)$$

- Si $C > 1$, troncature : $\bar{C} = 1$ & $U_{j_*} = -1$ & $U_{j_*+1} = 2$
- Si $C < -1$, troncature : $\bar{C} = -1$ & $U_{j_*} = -2$ & $U_{j_*+1} = 1$

Soit

$$\mathbb{F}(U, j_*) := (0, \dots, 0, \underbrace{\phi_-^{-1}(\bar{C}), \phi_+^{-1}(\bar{C})}_{j_*\text{-ème élément}}, 0, \dots, 0)$$

Soit

$$\mathbb{F}(U, j_*) := (0, \dots, 0, \underbrace{\phi_-^{-1}(\bar{C}), \phi_+^{-1}(\bar{C})}_{j_*\text{-ème élément}}, 0, \dots, 0)$$

Pour $U^n \in \mathbb{R}^J$ donné et

$$\tilde{U}^n := \mathbb{F}(U^n, j_*^n) + (I - \Pi_{j_*^n}) U^n,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{j_*^n} U^{n+1} = \mathbb{F}(U^n, j_*^n), \\ (I - \Pi_{j_*^n}) U^{n+1} = (I - \Pi_{j_*^n}) \left(U^n - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \mathbb{A} \phi(\tilde{U}^n) \right) \\ \xi' = \frac{2(T(C^n) - C^n)}{(\phi_+^{-1}(T(C^n)) - \phi_-^{-1}(T(C^n))) \Delta x} \\ j_*^{n+1} = j_*^n + \Delta t [\xi' / \Delta x] + 1 \end{array} \right.$$

Soit

$$\mathbb{F}(U, j_*) := (0, \dots, 0, \underbrace{\phi_-^{-1}(\bar{C}), \phi_+^{-1}(\bar{C})}_{j_*\text{-ème élément}}, 0, \dots, 0)$$

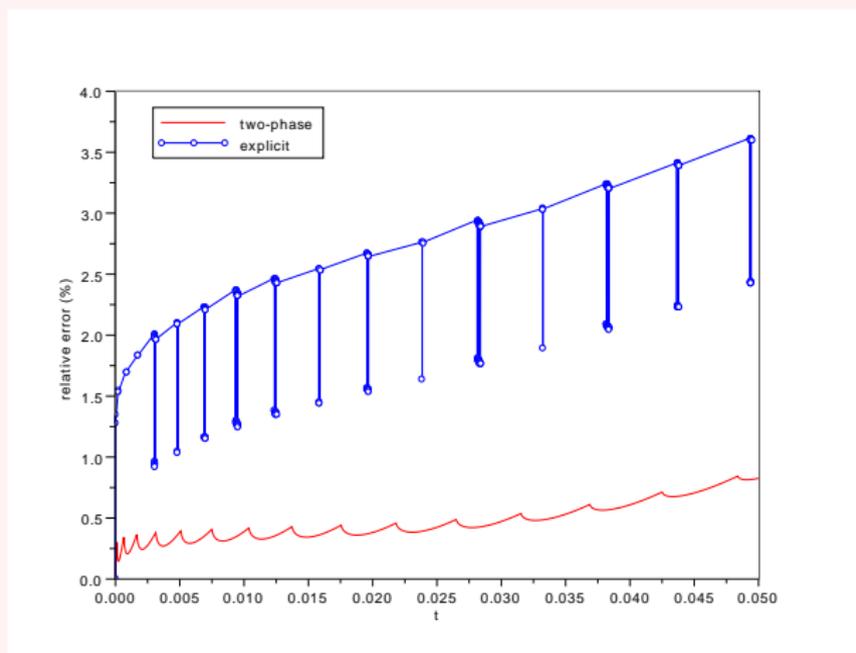
Pour $U^n \in \mathbb{R}^J$ donné et

$$\tilde{U}^n := \mathbb{F}(U^n, j_*^n) + (I - \Pi_{j_*^n}) U^n,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{j_*^n} U^{n+1} = \mathbb{F}(U^n, j_*^n), \\ (I - \Pi_{j_*^n}) U^{n+1} = (I - \Pi_{j_*^n}) \left(U^n - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \mathbb{A} \phi(\tilde{U}^n) \right) \\ \xi' = \frac{2(T(C^n) - C^n)}{(\phi_+^{-1}(T(C^n)) - \phi_-^{-1}(T(C^n))) \Delta x} \\ j_*^{n+1} = j_*^n + \Delta t [\xi' / \Delta x] + 1 \end{array} \right.$$

- Condition CFL $\Delta t = O(\Delta x^2)$
- Pas de point dans la zone instable I
- Généralisation possible au cas cubique

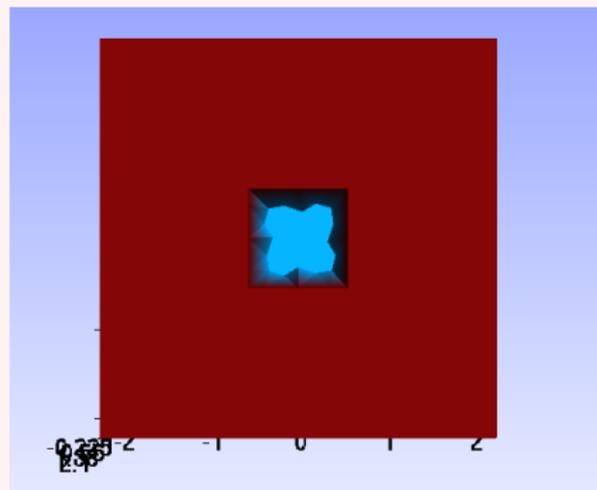
animation



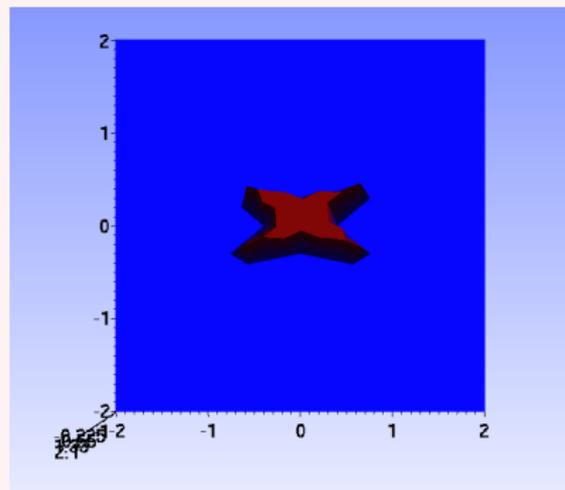
Évolution de l'erreur (relative) de la position de l'interface $(u_-, u_+) = (-2, 4)$

- Analyser numériquement le cas cubique
- Problème multi-dimensionnel
- Trouver des méthodes numériques adaptées
- Explorer le cas des frontières oscillantes

Résultats préliminaires en dimension supérieure



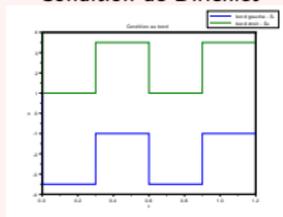
Carré



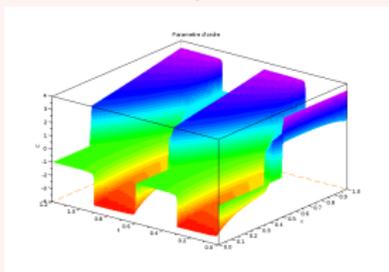
Papillon

Obtenus avec GMSH et GetDP (C. Geuzaine et J.-F. Remacle)

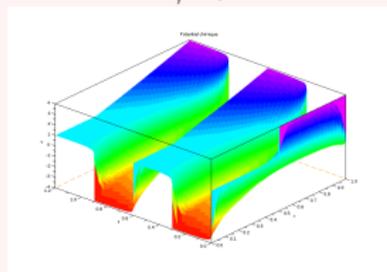
Condition de Dirichlet



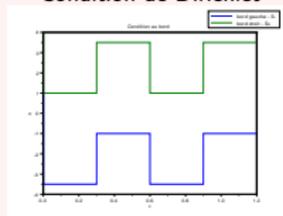
u



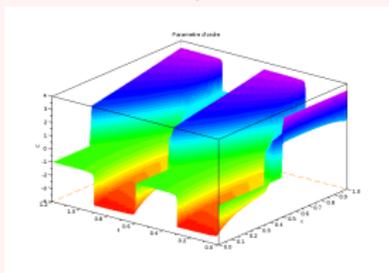
$\phi \circ u$



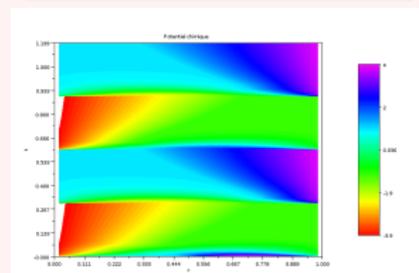
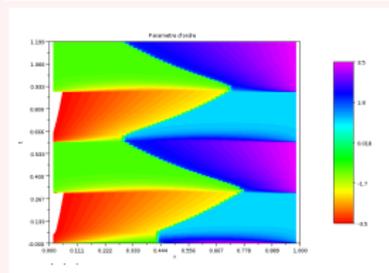
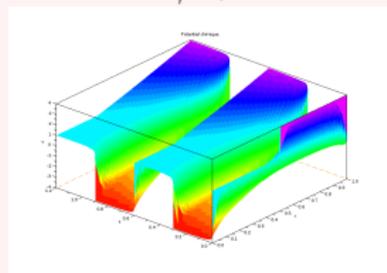
Condition de Dirichlet



u



$\phi \circ u$



Bibliographie

-  Josef Jäckle and Harry L. Frisch.
Relaxation of chemical potential and a generalized diffusion equation.
J. of Polymer Science, 1985.
-  Amy Novick-Cohen and Robert L. Pego.
Stable patterns in a viscous diffusion equation.
TAMS, 1991.
-  Pavel I. Plotnikov.
Forward-backward parabolic equations and hysteresis.
J. of Mathematical Sciences, 1999.
-  Lawrence C. Evans and Manuel Portilheiro.
Irreversibility and hysteresis for a forward-backward diffusion equation.
M3AS, 2004.
-  Corrado Mascia, Andrea Terracina, and Alberto Tesei.
Two-phase entropy solutions of a forward-backward parabolic equation.
ARMA, 2009.
-  **Pauline Lafitte and Corrado Mascia.**
Numerical exploration of a forward-backward diffusion equation.
accepté dans M3AS, 2011.