Arbitrage et prix des actifs.

Prix des actifs en information symétrique sans hypothèse de complétude.

Le Cadre

- **Etats de la nature** :
  - s = 1, ….S, ……….. p(1),…, p(s),…
- **Actifs a** :
  - m+1 actifs de base {a(0),…a(m)}
  - Matrices de dividendes (s,m+1)
  - $A = [A(0), \ldots A(m)]$, $A(j) \in R^S$
  - Portefeuille $\theta = [\theta(0), \ldots \theta(m)]$
  - Dividendes / portefeuille θ : $A\,\theta \in R^S$
- **Complètude et Incomplètude**.
  - Si rang A= S : marchés complets :
    - $A\,\theta = y$ a une solution
  - Si rang A <S, marchés incomplets

Arbitrage….

- Arbitrage,
  - maître mot de la finance
  - Qu’est ce que « l’arbitrage » ?
- Exemple :
  - 2 marchés de change : Euro contre Dollar.
    - au comptant et à terme…..(1mois)
    - Prix, p(0), p(1)   (1 D en E)
  - 2 actifs sans risque aux USA et en Europe.
  - Taux d’intérêt: r(E), r(A).
- Condition d’arbitrage :
- p(1)/p(0) =[1+r(E)]/[1+r(A)]
  - Logique : la redondance :
  - 1 Dollar---[1+r(A)]p(1),/ [1+r(E)]p(0) (Euros).
  - Hypothèses.
  - Applications : Options.

Prix des actifs et redondance.

- Question :
  - Expliquer $q = (q(0), q(1), \ldots q(m))$
  - Actifs et dividendes donnés.
  - Aucune hypothèse sur les motifs de détention….
  - Mais sur une éventuelle « redondance ».
- Un cas simple de « redondance ».
  - Matrice A donnée
  - *Supposons* $a(3) = a(1) + a(2)$, (A)
- Proposition :
  - $q^*(3) = q^*(1) + q^*(2)$
- Preuve :
  - Si >, vendre 3, acheter 1 et 2,
  - Dividendes inchangés, bénéfice…
  - Pas « équilibre »
- Généralité …

Options et redondance.

- Hypothèses :
  - 2 périodes : dates 0 et 1.
  - 2 valeurs possibles de l'action en 1.
  - pas de dividendes
  - prix d'exercice K = 50€

S = 50 €		S^* = 25€	Actions *(incertain)*
		S^* = 100€	
(40€)	R = 25%	(50€)	Obligations *(certain)*
	C	K = 50€	Options

- **Rappel**
  - Action ouverte par la détention d'une *option "call » (*droit d'acheter 1 action) :
  - Si $S^* > K$, achat d'un titre et bénéfice $S - K$
  - Si $S^* < K$, rien ne se passe

Options et redondance.

Exemple numérique

Table d'arbitrage de la stratégie (H) : {(1) + (2) + (3)}

Actions		date 0	date *h*	
			Si S*=25€	Si S*=100€
(H)	(1) Vendre 3 options « call »	3C	/	–3 x (100–50)€
	(2) Acheter 2 actions	–2 x 50€	2 x 25€	2 x 100€
	(3) Emprunter 40€	40€	–(1,25) x 40€	–(1,25) x 40€
Total		?	0€	0€

<u>La stratégie (1) est dupliquée par la stratégie {(2) + (3)}</u>

Non arbitrage $\Rightarrow 3C - 100€ + 40€ = 0$

$$C = 20 \text{ €}$$

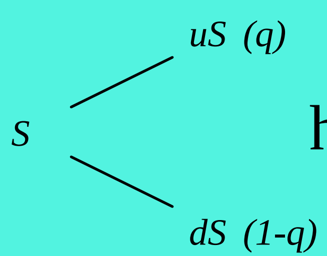
NB. Si C = 25€, gain immédiat de 15€ et pas de pertes dans le futur ;

Si C = 15€, même gain avec la stratégie : acheter 3 options, vendre 2 actions et prêter 40€

Introduction Black- Scholes

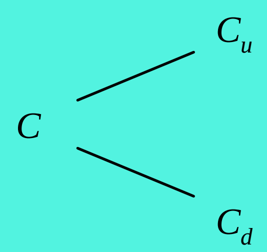
- Formalisation

Prix de l'action



hyp: $d < r < u$

Prix de l'option



- 2 portefeuilles :
  - acheter Δ actions S et emprunter B€
  - acheter une option au prix C

1 période : ils sont équivalents si

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} \qquad B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r}$$

- **Non Arbitrage :** $C = \Delta S + B$

avec $p \equiv \dfrac{r-d}{u-d}$

$$C = \left[pC_u + (1-p)C_d\right]\frac{1}{r}$$

- Si $uS > K > dS$: $C = p(uS - K)/r$.

Le prix des actifs : Effets de composition.

- Question : Expliquer q= (q(0), q(1), …q(m)).
- **Effet de la composition des actifs.**
  - Remplaçons a(2), **(A),** par a(1) +a(2), **(A')**
  - Plaçons nous à « l'équilibre ».
- **Proposition :**
  - *q*= (q*(0), q*(1), q*(2) …q*(m)) est « équilibre » avec A, ssi q'*= (q*(0), q*(1), q*(1)+q*(2) …q*(m)) est équilibre avec A'.*
  - *<u>Les dividendes d'équilibre sont les mêmes.</u>*
- *<u>Preuve :</u>* Pas de complétude mais vente à découvert.
  - Etablir que [y =A θ/q* θ<0] = [y =A' θ/q'* θ<0]
  - Plus généralement « équilibre/ espace des dividendes », pas nature spécifique des actifs.
- ***Corollaire 1: Modigliani-Miller, 2ème version.***
  - Actif « entreprise » $y \in R^S$, donne y **-** $(1+r)D \in R^S$.
  - En. sans dette rapporte $y \in R^S$. Si je m'endette de D, j'obtiens y**-**(1+r)D ….
  - Valeur de l'entreprise (et prix d'action), inchangés

Prix des actifs : Non arbitrage…

- Question : Expliquer $q = (q(0), q(1), \ldots q(m))$
- *Condition de non arbitrage.*
    - <u>$q.\theta \leq 0$ et $A\theta > 0$ sont impossibles simultanément.</u>
    - Interprétation : pas de solution miracle pour s'enrichir.
- **<u>THM</u> :**
    - Si NA,
    - alors, on peut trouver $\pi = (\pi(0), \ldots, \pi(S)) > 0$, t.q
    - $q(j) = \sum_s A(j,s)\, \pi(s)$
- En forme matricielle : $q = {}^tA\, \pi$.
- Interprétation :
    - prix non quelconques,
    - prix d'états sous jacents

Non arbitrage et prix des actifs Probabilités « risque-neutres ».

- **Rappel : $q(j) = \sum_s A(j,s)\, \pi(s)$**
- *<u>Hyp</u> : $\exists$ un actif sans risque (0) $1 \rightarrow R$ (=1+r)*
- Donc $q(0) = (1+r)\{\Sigma\, \pi(s)\}$
  - $q(j)/q(0) = [1/(1+r)][\Sigma_s A(j,s)\, P(s)]$
  - $P(s) = \pi(s)/\{\Sigma\, \pi(s)\}$ est
  - « *la probabilité risque neutre* »
- Commentaires :
  - Formule traditionnelle.
  - Prix = espérance (actualisé) gain.
  - Avec des pseudo-probabilités.
- Autre dérivation :
  - $q(j) = \sum_s A(j,s)\, [\pi(s)/p(s)]p(s)$
  - Posons $h(s) = [\pi(s)/p(s)]$
  - *déflateur prix-contingent*
  - Considérons h et A(j) --- 2 variables aléatoires
  - Alors : $q(j) = E(\underline{h\, A(j)})$ ou $E(\underline{hR(j)})=1$

Rappel (statistique)

- Soient x, y deux variables aléatoires
  - (deux vecteurs X, Y dans $\Re^s$)
  - **Cov (x, y) = E [(x-E (x)) (y-E(y))]**
  - **= E (xy) – E (x) E (y)**
  - Mesure co-variation
  - Cas particulier :
  - variables indépendantes : Cov =0,
  - x = y,   cov(x,y) = var (x)
- **Proposition :**
  - ∃a et une v.a ♏ tels que x=a+by+ ♏
  - Avec b= Cov(x,y)/var y,
  - Cov (y, ♏) = 0, E (♏) =0,
  - b est le coefficient de régression.
- Note : Corrélation (x,y) = cov(x,y)/⎾[(var.x)(var.y)]
  écart type ⎾ var = écart type

Prix des actifs et Co-variation….

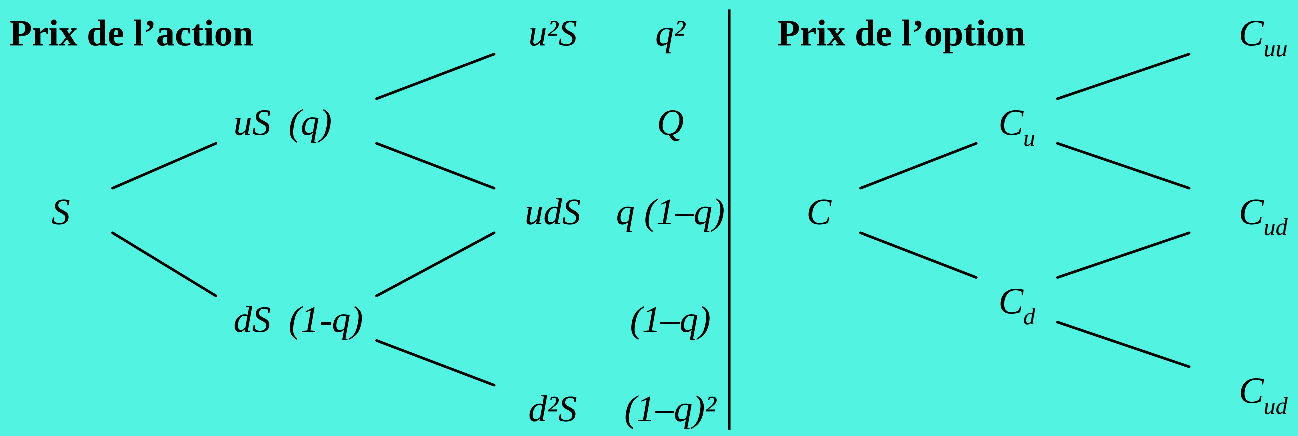
- $1 = E(\underline{h\ R(j)),}\ R(j)=A(j)/q(j)$
- Ceci est vrai pour tout portefeuille $R(\theta)$
  - $E(\underline{h\ R(\theta)}) =1$
  - $R(\theta,s)) = \{\sum_s A(j,s)\ \theta(j)\}/ \{\sum_j q(j)\ \theta(j)\}$
- On sait :
  - $Cov\ \{\underline{h,R\ (\theta}\} = E\{\underline{h,R\ (\theta)}\ \}– E\ (\underline{h})\ E\{\underline{R(\theta})\}$
- S'il y a un actif sans risque $E(h)= 1/R =(1+r)$
  - $[E(\underline{R(\theta}))– (1+r)]= - (1+r)[Cov\ \{\underline{h,\ R\ (\theta})\}]$
- Commentaire :
  - un actif non corrélé avec h, un rendement R
  - un actif bien corrélé avec h : rendement plus faible
  - un actif mal corrélé avec h : un rendement plus fort

Prix des actifs et non arbitrage (fin provisoire)

- Considérons :
  - Dans l'ensemble des portefeuilles atteignables, t.q
  - E (h, R*) = 1, Corr (h,R*) maximale
  - Différence complétude et incomplétude
  - $h = \lambda R^* + e^1$
  - Alors considérons R*- R, R(θ)-R
  - *Le calcul* =>
- $[E(R(\theta))-R]=\{[Cov (R^*,(R(\theta))]/[var R^*]\}(E(R^*)- R)$
  - Les rendements d'équilibre des actifs, en sus de celui de l'actif sans risque (qui déterminent les prix) sont liés à leur corrélations avec (le rendement de l'actif le plus corrélé avec h), cov[R*,R(θ)]/ [var R*]
- Retour sur Modigliani-Miller..*et «la participation»*
- **Reste :**
  - Qu'est ce qui détermine les prix d'états ?
  - ….La demande d'actifs

Black & Scholes (4)

Plusieurs périodes (option binomiale)



n périodes : Non Arbitrage (puis résolution arrière)

$$C=\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)p^{j}(1-p)^{n-j}\max[0,u^{j}d^{n-j}S-K]\right]\frac{1}{r^{n}}$$

On exerce l'option pour $j > a$ = P.E.[log(K/Sd^n)/log(u/d)]

donc $C = \Sigma_{j>a}\ldots$

$$C = S\Psi[a;n,p'] - Kr^{-n}\Psi[a;n,p]$$

où $p \equiv \dfrac{r-d}{u-d}$

$p' = (u/r)p$, et Ψ : cumul. loi binomiale

NB. Si $a > n$, $C = 0$.

Black & Scholes (5)

Formule de Black & Scholes : temps continu

Supposons une option, échéance à la date t fixée

Valeur de l'action sous-jacente : S en 0, puis mouvement brownien, S^* en $\underline{t}$:
E(S^*)=μ , V(S^*)=σ² ; μ ,σ donnés (estimés)

Actif sans risque B : $dB/dt=rB$, donc $B^*=e^{rt}B$

Mvt brownien eq. à la limite d'un mouvement binomial à n périodes, $n \to \infty$

"pas" temporel $h = t / n \to 0$ ($n \to \infty$)

taux sans risque à chaque période r* tq $e^{r^*n} = e^{rt}$

$$C = S\Phi\left[\left(\log(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2 t)\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\right] -$$

$$- Ke^{-rt}\Phi\left[\left(\log(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\right]$$

où Φ : cumul. loi normale