CCAPM :

Modèle d’Evaluation des Actifs Financiers en équilibre général

Croiser les problématiques.

- Un point de vue unitaire,
  - Equilibre du marché du risque.
  - Information symétrique
- Mais des perspectives diversifiées.
  - Equilibre « général » ou partiel.
  - Marchés complets ou incomplets.
  - Attitude vv risque générale, ou spécifique.
- Liens ?
  - 8 cas : croisement.
  - 2 ou 3 dèja traités.
  - Prendre le croisement gén., attitude risque, moyenne, variance.

Rappel : prix des actifs et rendement…

- Une variété de formules, pour les rendements.
  - [E(<u>R(θ</u>)) – (1+r)] =(1+r) Cov(<u>dV', R(θ), </u>***(marchés complets*)**)
  - [E(<u>R(θ</u>)) – (1+r)]= - (1+r)[Cov {<u>h, R (θ</u>)}] (*arbitrage*).
- Aussi, *Medaf, Capm*
  - [*E*(R(θ*)-(1+r)]/ (Var (R(θ*)) = prix du risque
  - [(*E*R(j) – (1+r)] = {Béta (j)}[*E*(R(θ*)-(1+r)]
  - Béta(j)= {Cov[(R(θ*),R(j)] /Var (R(θ*))[
- Et des correspondants pour les prix.
  - q(j) - 1/(1+r)E(<u>A(j)</u>)= Cov(d<u>V',A(j)</u>)
  - = {Cov[(A(θ*),A(j)]/Var (A(θ*))} [*E*(A(θ*)/(1+r)]-q*]
- ..

La demande d’un actif risqué avec fonction d’utilité moyenne-variance : cas CARA.

- Le cadre :
  - Actif A, prix q, actif A(0) sans risque, prix 1, Richesse initiale W_0 donnée
- La maximisation
  - Max EU(w), $\underline{w} = Z(0)(1+r) + \theta \underline{A}$, $Z(0) + q.\theta = W_0 + q.\,\theta_0$, $\theta = Z(a)$.
- Cas Moyenne variance.
  - Moyenne de la richesse fiscale : Z(0) (1+r) + Z(a)E(**A**)
  - Variance de la richesse fiscale $[Z(a)]^2$ var **A**
- Max $\{(W_0 - q(a)Z(a))(1+r) + Z(a)E(\underline{\mathbf{A}}) - [b]/[2](Z(a)^2)\ \mathrm{var}\underline{\mathbf{A}}\}$
  - E(A) - q(a)(1+r) = b Z (a) var **A**
- **Z (a) = [E(A)-q(A)(1+r)]/[bvarA] = [T][E(A)-q(A)(1+r)]/[varA],**
- *Capture l’intuition, S’étend aisément au cas d’actifs indépendants.*
- ***Consentement à payer pour un actif : prix à payer pour un actif de rendement certain équivalent – Cov Utilité marginale et du rendement de l’actif.***

La demande d'actifs risqués en moyenne variance: Cadre général et résultat particulier.

- Le cadre :
  - Idem, mais a**ctif A(j), prix q(j),** actif A(0) sans risque, prix
- Richesse finale :
  - Espérance : E= $\sum_j [E(\underline{\mathbf{A(j}})] (\theta(j)) = Z(0)(1+r) + E\underline{\mathbf{A}}\,\theta + E(\underline{w})$
  - Variance = $\mathrm{Var}[\sum_j (\underline{A\mathbf{(j}}))(\theta(j)+\underline{\mathbf{w}}]$
  - $= \theta' \,\Xi\, \theta + \mathrm{var}\,\underline{\mathbf{w}} + 2\sum_j \theta(j)\mathrm{Cov}(\underline{A\mathbf{(j}})),\underline{\mathbf{w)}}$
  - $= \theta' \,\Xi\, \theta + \mathrm{var}\,\underline{\mathbf{w}} + 2\mathrm{Cov}((\underline{A),\mathbf{w)}}\,\theta$
  - Ξ = Var A, matrice de variance covariance des actifs.
  - $\mathrm{Cov}((\underline{A),\mathbf{w)}}$ est un vecteur.
- Résultat :
  - Arbitrage moyenne- (b/2)variance. Vecteur des prix q.
  - Dérivée / θ de l'espérance : $E\underline{\mathbf{A}}$ –q(1+r).
  - Dérivée / θ de la variance : $(2)[(\mathrm{Var}A)\,\theta + \mathrm{Cov}((\underline{A),\mathbf{w)]}}$

Feuille de calcul.

- Moyenne Z(0) (1+r) + $\underline{E\mathbf{A}}\,\theta$
- Variance = Var =Var[$\sum_j (A\underline{\mathbf{(j}}))(\theta(j)] = \theta' \Xi\ \theta$
- Objectif : $aE - (b/2)E^2 - b/2var$
- Conditions du premier ordre :
- $(a-bE(w))E(A(j))-b\ Var\ (A)\ \theta^* = \lambda\ (j)$
- $(a-bE(w))(1+r) = \lambda$
- $E(A(j))/(1+r) - \{b/[(a-bE(w))(1+r)]\} - b\ \Xi\ \theta^* = q(j)$
- $\Xi\ \theta = T[E(A(j))/(1+r) - q(j)-[b\ (a-bE(w))(1+r)]+$
- $\theta^* = T(E\underline{\mathbf{w}})[\ (Var\ A)^{-1}\ [E(\underline{\mathbf{A}})-(1+r)q]\}$

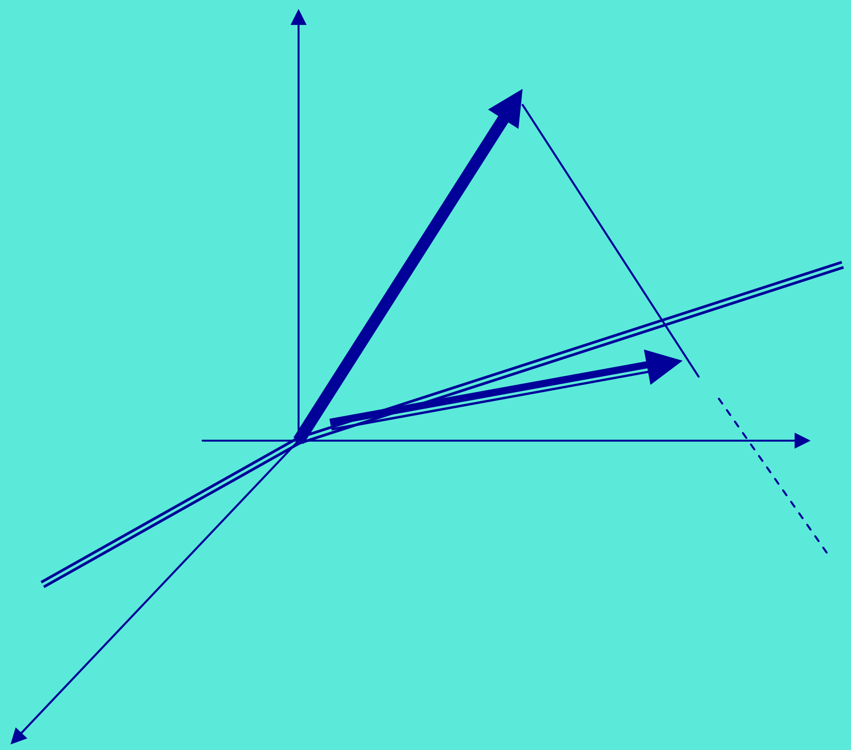
La demande d'actifs risqués en moyenne variance: le cas de ressources non échangeables risquées.

- *Mettre en regard*
  - $E\underline{\mathbf{A}}$ –q(1+r) et b[(VarA) θ + Cov(($\underline{A}$),$\underline{\mathbf{w}}$)]
  - [(VarA) θ] = T [$E\underline{\mathbf{A}}$ –q(1+r)] - Cov(($\underline{A}$),$\underline{\mathbf{w}}$)]
- **Résultat : cas ou tous les risques sont échangeables**
- $\theta^* = (\text{Var } A)^{-1} \{T(.)[E(\underline{\mathbf{A}})-(1+r)q]\}$, T(.) pris en $E\underline{\mathbf{w}}$
- *Comparer Z (a) = [E(A)-q(a)(1+r)]/[bvar$\underline{A}$],*
- **Cas ou tous les risques ne sont pas échangeables**
- **Résultat :**
- $\theta^* = (\text{Var } A)^{-1} \{- \text{Cov}(\underline{\mathbf{A},\mathbf{w}}) + T(E\underline{\mathbf{w}})[E(\underline{\mathbf{A}})-(1+r)q]\}$

$(\text{Var } A)^{-1} \text{Cov}(\underline{\mathbf{A},\mathbf{w}})$: Portefeuille de couverture, solution pour T=0

Portefeuille de couverture.

- **Portefeuille de couverture :** minimise la variance de la période.
- Interprétation géométrique :
- w-E(w) = Proj(espace des actifs) +vecteur orthogonal.
- = - *portefeuille de couverture + risque non assurable.*



Le cadre d'équilibre général.

- Economie d'échanges à deux périodes.
  - 1ère période 0 : w(h,0)
  - 2ème période 1 : ∑ **w(h,1)**=w(m)
  - Actifs : risques échangeables.
  - Total, A θ (m), θ (m) = ∑ θ(h,0) détenus privativement.
  - Consommation totale : c(m) =w(m) +A θ (m),
- Maximisation :
  - Max {U(h,c(h,0)) + E[V(h,**c(h,1**))]} (U(h,c(h,0)) = c(h,0)) wlog)
  - c(h,0)+q*. θ(h,1)+z(h,0) = w(h,0)+ q*.θ(h,0)
  - c(h,1,s) = w(h,1,s) + z(h,0)(1+r) + A θ (h,1)
- Risque « non échangeable » : w(h,1,s)

L'équilibre général.

- Equilibre [q^*, $\theta^*(h,1)$, $z^*(h,0)$, $c^*(h,0)$, $c^*(h,1,s)$]
- Optimisation individuelle
  - $\theta^*(h,1)$, $c^*(h,0)$, $c^*(h,1,s)$ solution de :
    - Max $\{c(h,0) + E[V(h,\underline{\mathbf{c(h,1}}))]\}$
    - $c(h,0)+q^*.\ \theta(h,1)+z(h,0) = w(h,0)+ q^*.\theta(h,0)$
    - $c(h,1,s) = w(h,1,s) + z(h,0)(1+r) + A\ \theta\ (h,1)$
- Apurement des marchés.
  - $\sum c^*(h,0)= \sum w(h,0)=w(0)$, $(\sum z^*(h,0)= 0)$
  - $\sum c^*(h,1,s) = \sum w(h,1,s) + A \sum \theta^*(h,1)$.
  - $\sum \theta\ ^*(h,1) = \sum \theta(h,0)= \theta(m)$
  - $\sum \underline{c^*(h,1)} = \sum \underline{w(h,1)} + \underline{A}\ \theta^*(m)=\underline{c(m})$
  - Noter que Cov $(\underline{A,c(m),})$=Cov$(\underline{w,A})$ +$(\underline{varA})$ $\theta^*(m)$.

L'équilibre en cas de risques non échangeables.

- Choix d e portefeuille
  - $\theta(h,1)=(\text{Var } A)^{-1}\ \{-\text{Cov}(\underline{\mathbf{A,w(h,1}})) + T(E\underline{\mathbf{c(h,1}}))[E(\underline{\mathbf{A}})-(1+r)q]\}$
  - $(\text{Var}A)\theta(h,1)=\{-\text{Cov}(\underline{\mathbf{A,w(h,1}})) + T(E\underline{\mathbf{c(h,1}}))[E(\underline{\mathbf{A}})-(1+r)q]\}$
- Calcul :
  - $(\text{Var } A)\ \theta(m) + \text{Cov}(\underline{\mathbf{A,w(1}})) = T().[E(\underline{\mathbf{A}})-(1+r)q]$
  - Où $T(.)= \sum_h [T(E(\underline{\mathbf{c(h,1)}})]$
  - Rappel : $\text{Cov }(\underline{A,c(m),})=\text{Cov}(\underline{w,A}) +(\underline{\text{var}A})\ \theta^*(m)$.
- $q= E(\underline{\mathbf{A}})/(1+r) – [\text{Cov}(\underline{A,c(m}))]/ [(1+r)T(.)]$

L'équilibre général en cas de risques échangeables.

- Equilibre.
  - q= $E(\underline{\mathbf{A}})/(1+r) – [\mathrm{VarA}]\ \theta(m)/\ [(1+r)(T(.)$
  - Ou $T(.) = \sum_h [T(E(\underline{\mathbf{c(h,1)}})]$, tolérance au risque de l'économie
  - q= $E(\underline{\mathbf{A}})/(1+r) – [\mathrm{Cov}(\underline{A,c(m)})]/\ [(1+r)T(.)]$
- Commentaires :
  - $q(j)= E(\underline{\mathbf{A(j)}})/(1+r) – [\mathrm{Cov}(A(j),c(m))/\ [[(1+r)\ T(.)]$
  - Rappel :
  - $(\mathrm{Var}\ A)\ \theta(m) + \mathrm{Cov}(\underline{\mathbf{A,w(1}}))= T().[E(\underline{\mathbf{A}})-(1+r)q]$
  - Implique $\mathrm{Var}(c(m)) = [T(.)][E(\underline{\mathbf{A(m}})-(1+r)q(m)]$
  - Substituer ….. CAPM

Commentaires.

- Relations avec CAPM simple. (complétude)
  - CAPM donne des conditions nécessaires d'équilibre.
  - Relations entre prix et caractéristiques des actifs/ car. du marché.
  - Ici le portefeuille de marché est exogène.
  - Ces relations nec. Vérifiées.
  - Le modèle donne les transactions d'équilibre..
- Relations avec la théorie de l'arbitrage.
  - La formule $[E(\underline{R(\theta)}) – (1+r)] = - (1+r)[\mathrm{Cov}\ \{\underline{h, R(\theta)}\}]$ (*arbitrage*).
  - illustrée avec h(h).
- Robustesse.
  - Revenir sur le modèle moyenne variance élémentaire.

Equilibre, suite

- Consommations (et détentions d'actifs) à l'équilibre :
  - c(h,1,s) - *E* **<u>c(h,1)</u>** =
  - [(w(h,1,s) - *E* **<u>w(h,1</u>**)]^Y) + [T(h)/T]proj$_A$[c(1,s) -*E* c(1,s)].
  - Commentaires.
  - Le risque diversifiable de l'économie est partagé selon la tolérance au risque relative
- Epargne et taux d'intérêt d'èquilibre
  - : dans le cas CARA gaussien.
- Log(1+r) =
- -logd + ∑ θ[E(c(1)-w(0) - ∑ θ(h)/2) Var(**<u>w(h,1</u>**)^Y - θ /2 Var(proj **<u>c(1))</u>**
- **<u>Remarques.</u>**
  - Préf.présent, dotations, aversion…,répartition des risques.