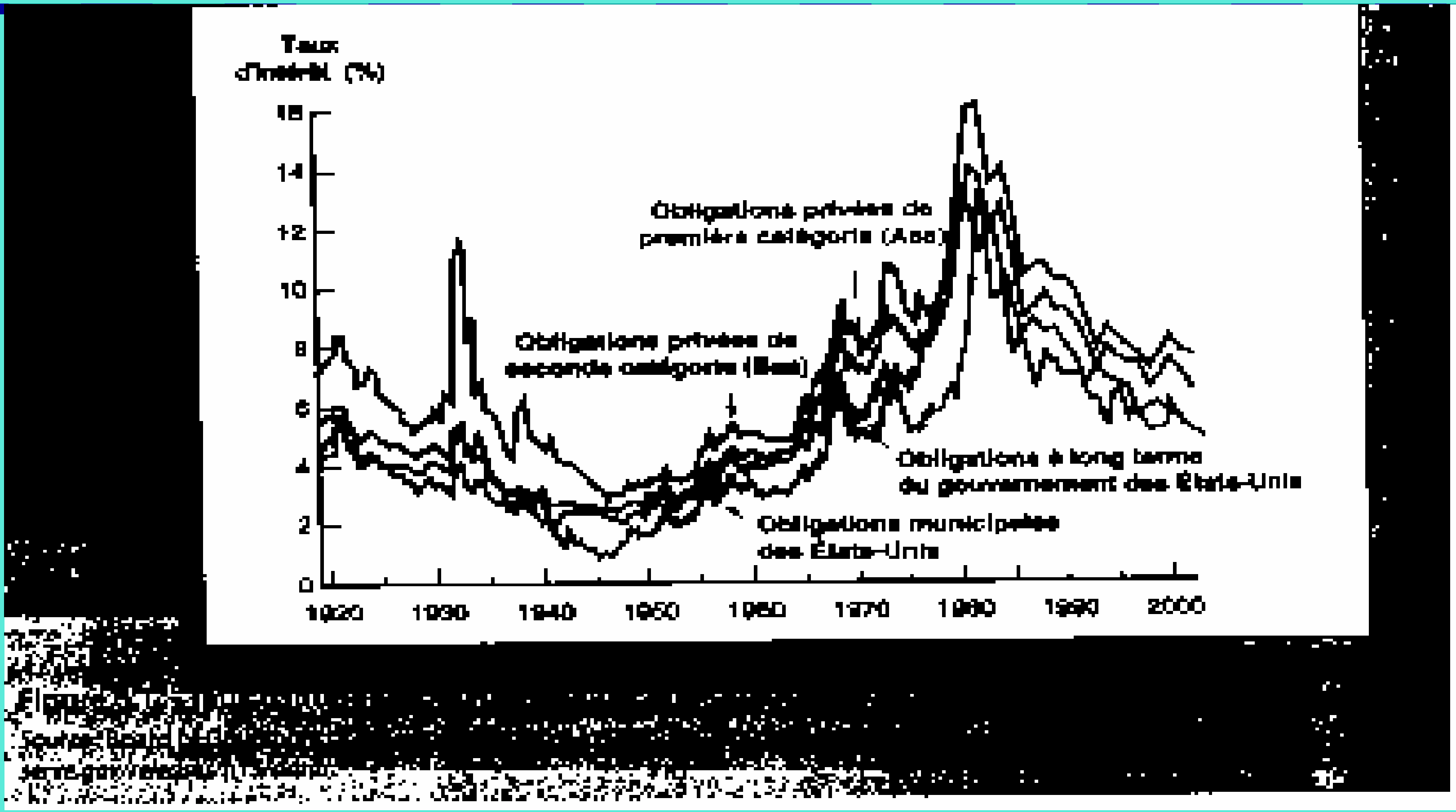
Un Survol rétrospectif

Morceaux choisi

du cours 2004-2005

Taux d’intérêt.



Rembrandt's Storm on the Sea of Galilee.

(Reproduction courtesy of the Isabella Stewart Gardner Museum, Boston.)

My ventures are not in one bottom trusted,
Nor to one place; nor is my whole estate
Upon the fortune of this present year;
Therefore, my merchandise makes me not sad.
(Act I, Scene 1)

Information symétrique, généralités

Complétude, redondance,
arbitrage….

Biblio sommaire.

- **Livres :**
- Brunnermeier, M. K. (2001). “Asset Pricing under asymmetric Information - Bubbles, Crashes, Technical Analysis, and Herding.” Oxford: Oxford University Press.
- Campbell, J. Y. Consumption-Based Asset Pricing. Handbook of the Economics of Finance. Amsterdam.
- Demange G et Laroque G ,(2001) « Finance et Economie de l’incertain », Economica, 267 p.

Biblio sommaire.

- Articles sur Finance en information symétrique (séances 2-3-4)

- Arrow, K. J. (1964). “Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques.” Review of Economic Studies **31**(2): 91-96.
- Campbell, J. Y. (1995). “Some Lessons from the Yield Curve.” Journal of Economic perspectives **9**(3): 129-52.
- Campbell, J. Y. (2000). “Asset Pricing at the Millennium.” Journal of finance **55**(4): 1515-67.
- Constantinidés G. and D. Duffie (1996). “Asset Pricing with Heterogenous Consumers.” Journal of Political Economy **104**(2): 219-40.
- Dumas, B. (1989). “Two-Person Dynamic Equilibrium in the Capital Market.” Review of financial Studies **2**(2): 157-88

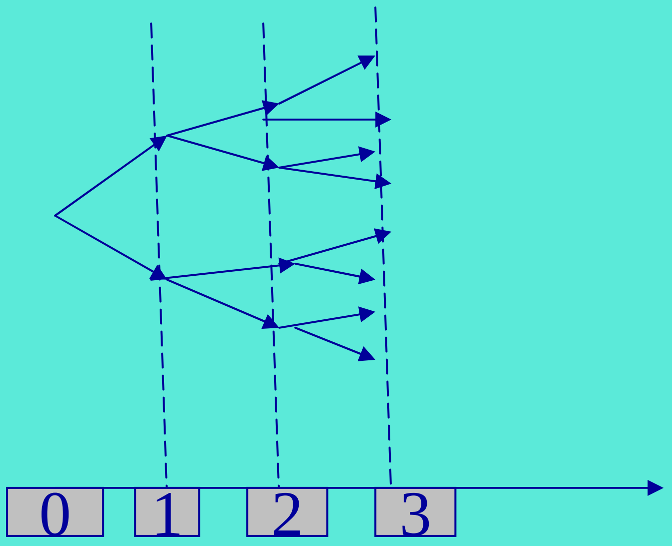
Biblio sommaire.

- Articles sur Finance en information symétrique (séances 2-3-4).

- Guesnerie, R. and J. Y. Jaffray (1974). Optimality of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations. Allocation under Uncertainty, Equilibrium, Optimality. J. Dreze. London: Mac Millan, MacMillan**:** 71-86.
- Kreps, D. M. (1982). Multiperiod Securities and the Efficient Allocation of Risk: A Comment on the Black-Scholes Option Pricing Model. Chicago, University of Chicago Press.
- Lucas, R. E., Jr. , (1978). “Asset Prices in an Exchange Economy.” *Econometrica* **46**(6): 1429-1445.
- Ross, S. (1976). “Options and efficiency.” Quarterly journal of economics **90.**(1): 75 - 98.

Etats de la nature…

- Modèle inter-temporel t=1, 2, 3,
- **Arbre des états** : dimension temporelle.
  - 2 états de la nature par période,
  - $s(t) \in S(t)$, histoire, 8 pour t=3
- **Structure probabiliste plus complexe. :**
  - s(t) processus stochastique,
  - filtration S(t), s(t+1)/s(t).
- **Marchés completx :**
  - Un prix à chaque nœud, transfert entre les nœuds. (dans le ratio donné /prix).
  - p(s(t)) Echanges au ébut des temps

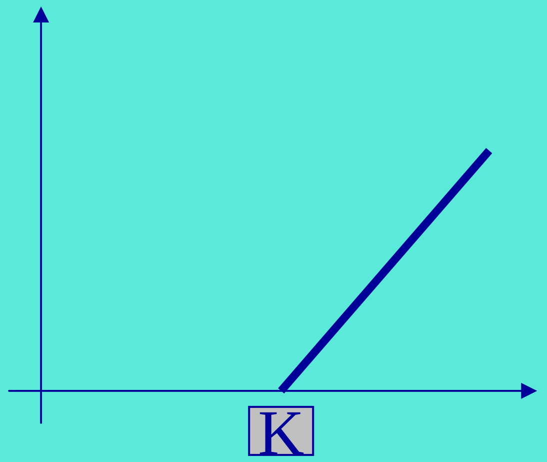


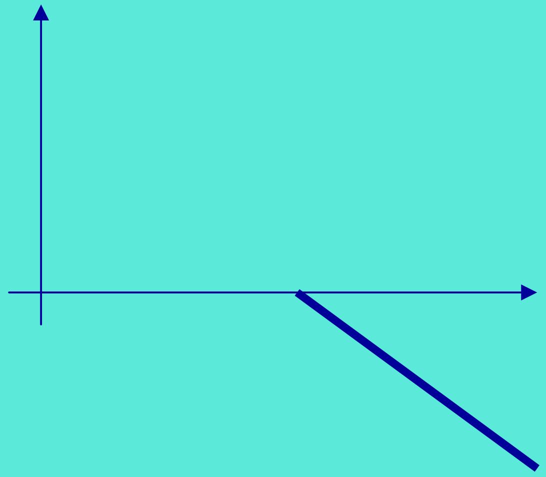
Comment obtenir la complètude ?

- **Modèles inter-temporels à un bien physique.**
  - Actifs d'Arrow emboîtés,
  - Actifs quelconques suffisamment nombreux et suff. emboîtés.
  - *Notion de complétude pas évidente*
    - *Exemple* : Lucas (78)
    - Une entreprise, y $\rightarrow$ $\underline{y'}$ stationnaire.
    - Actif : action de l'entreprise
- **Nombre de biens physiques quelconques**
  - **marchés à terme s.n +tous les marchés au comptant**.
- *Récapitulation des hypothèses :* ***(hors cts de transactions faibles)***
  - Rationalité individuelle, attitude S / risque.
  - *Aléas vérifiables et « contractibles », symétrie d'information.*
  - **+ prévision parfaite : « anticipations rationnelles ».**

Options : options d’achat

- La logique :
  - Droit à obtenir une action
  - au prix K prix d’exercice,
  - à l’échéance T (option européenne)
- Option :
  - sera ou non exercée,
  - A un prix..
- Gain à T pour l’acheteur et le vendeur





Options et redondance.

- Hypothèses :
  - 2 périodes : dates 0 et 1.
  - 2 valeurs possibles de l'action en 1.
  - pas de dividendes
  - prix d'exercice K = 50€

S = 50 €		S^* = 25€	Actions *(incertain)*
		S^* = 100€	
(40€)	R = 25%	(50€)	Obligations *(certain)*
	C	K = 50€	Options

- **Rappel**
  - Action ouverte par la détention d'une *option "call » (*droit d'acheter 1 action) :
  - – Si $S^* > K$, achat d'un titre et bénéfice $S - K$
  - – Si $S^* < K$, rien ne se passe

Prix des actifs : Non arbitrage…

- Question : Expliquer q= (q(0), q(1), …q(m))
- *Condition de non arbitrage.*
    - <u>$q.\theta \leq 0$ et $A\theta > 0$ sont impossibles simultanément.</u>
    - Interprétation : pas de solution miracle pour s'enrichir.
- **<u>THM</u> :**
    - Si NA,
    - alors, on peut trouver $\pi = (\pi(0), \ldots, \pi(S)) > 0$, t.q
    - $q(j) = \sum_s A(j,s)\, \pi(s)$
- En forme matricielle : $q = {}^tA\, \pi$.
- Interprétation :
    - prix non quelconques,
    - prix d'états sous jacents

Non arbitrage et prix des actifs Probabilités « risque-neutres ».

- **Rappel : $q(j) = \sum_s A(j,s)\, \pi(s)$**
- *<u>Hyp</u> : ∃ un actif sans risque (0) 1 → R (=1+r)*
- Donc $q(0) = (1+r) \{ \Sigma\, \pi(s) \}$
  - $q(j)/q(0) = [1/(1+r)][\Sigma_s A(j,s)\, P(s)]$
  - $P(s) = \pi(s) / \{ \Sigma\, \pi(s) \}$ est
  - « *la probabilité risque neutre* »
- Commentaires :
  - Formule traditionnelle.
  - Prix = espérance (actualisé) gain.
  - Avec des pseudo-probabilités.
- Autre dérivation :
  - $q(j) = \sum_s A(j,s)\, [\pi(s)/p(s)]p(s)$
  - Posons $h(s) = [\pi(s)/p(s)]$
  - *déflateur prix-contingent*

Le prix des actifs : Effets de composition.

- Question : Expliquer q= (q(0), q(1), …q(m)).
- **Effet de la composition des actifs.**
  - Remplaçons a(2), **(A),** par a(1) +a(2), **(A')**
  - Plaçons nous à « l'équilibre ».
- **Proposition :**
  - *q*= (q*(0), q*(1), q*(2) …q*(m)) est « équilibre » avec A, ssi q'*= (q*(0), q*(1), q*(1)+q*(2) …q*(m)) est équilibre avec A'.*
  - <u>*Les dividendes d'équilibre sont les mêmes.*</u>
- <u>*Preuve :*</u> Pas de complétude mais vente à découvert.
  - Etablir que [y =A θ/q* θ<0] = [y =A' θ/q'* θ<0]
  - Plus généralement « équilibre/ espace des dividendes », pas nature spécifique des actifs.
- ***Corollaire 1: Modigliani-Miller, 2ème version.***
  - Actif « entreprise » y $\in R^S$, donne y - (1+r)D $\in R^S$.

Information symétrique, prix des actifs

Le monde des covariances….

Rappel (statistique)

- Soient x, y deux variables aléatoires
  - (deux vecteurs X, Y dans $\Re^s$)
  - **Cov (<u>x, y</u>) = E <u>[(x-E (x)) (y-E(y))]</u>**
  - = **E (<u>xy</u>) – E (<u>x</u>) E (<u>y</u>)**
  - Mesure co-variation
  - Cas particulier :
  - variables indépendantes : Cov =0,
  - x = y,   cov(x,y) = var (x)
- **Proposition :**
  - ∃a et une v.a ♏ tels que <u>x</u>=a+b<u>y</u>+ <u>♏</u>
  - Avec b= Cov(x,y)/var y,
  - Cov (<u>y, ♏</u>) = 0, E (<u>♏</u>) =0,
  - b est le coefficient de régression.
- <u>Note</u> : Corrélation (x,y) = cov(<u>x,y</u>)/√[(var.<u>x</u>)(var.<u>y</u>)]   écart

Elèments de réponse :le prix des actifs

- Modèle à une période : un actif : a(s)
  - $\Pi\, dt = d\,[\sum p(s))V'(c(s))a(s)dt] = dE[\underline{V'a})]dt$
- Formule centrale :
  - $\Pi = d\mathrm{Cov}\,(\underline{V'a}) + dE\{\underline{V'}\}E[\underline{a}]$
- Autre forme : Taux d'intérêt zéro-coupon r
  - $\Pi - 1/(1+r)E(\underline{a}) = \mathrm{Cov}(d\underline{V',a})$
    - $E(a/\Pi) - (1+r) = (1+r)\,\mathrm{Cov}(d\underline{V',a/}\Pi)$
- Autre écriture :
    - Partant de $\Pi = d\,\{\sum p(s))V'(c(s))a(s)\}$,
    - Noter que $\{\sum d\, p(s))V'(c(s))\} = (1/1+r)$
  - $\Pi = (1/1+r) \sum t(s)a(s)\},\ \ \sum t(s) = 1$
  - *Espérance mathématique avec probabilités corrigées du risque.*

Prix des actifs et Co-variation….

- $1 = E(\underline{h\ R(j)}),\ R(j)=A(j)/q(j)$
- Ceci est vrai pour tout portefeuille $R(\theta)$
  - $E(\underline{h\ R(\theta)}) = 1$
  - $R(\theta,s)) = \{\sum_s A(j,s)\ \theta(j)\} / \{\sum_j q(j)\ \theta(j)\}$
- On sait :
  - $\mathrm{Cov}\ \{\underline{h,R\ (\theta)}\} = E\{\underline{h,R\ (\theta)}\} - E\ (\underline{h})\ E\{\underline{R(\theta)}\}$
- S'il y a un actif sans risque E(h)= 1/R =(1+r)
  - $[E(\underline{R(\theta)}) - (1+r)] = -(1+r)[\mathrm{Cov}\ \{\underline{h,\ R\ (\theta)}\}]$
- Commentaire :
  - un actif non corrélé avec h, un rendement R
  - un actif bien corrélé avec h : rendement plus faible
  - un actif mal corrélé avec h : un rendement plus fort

Eléments de réponse :le prix des actifs

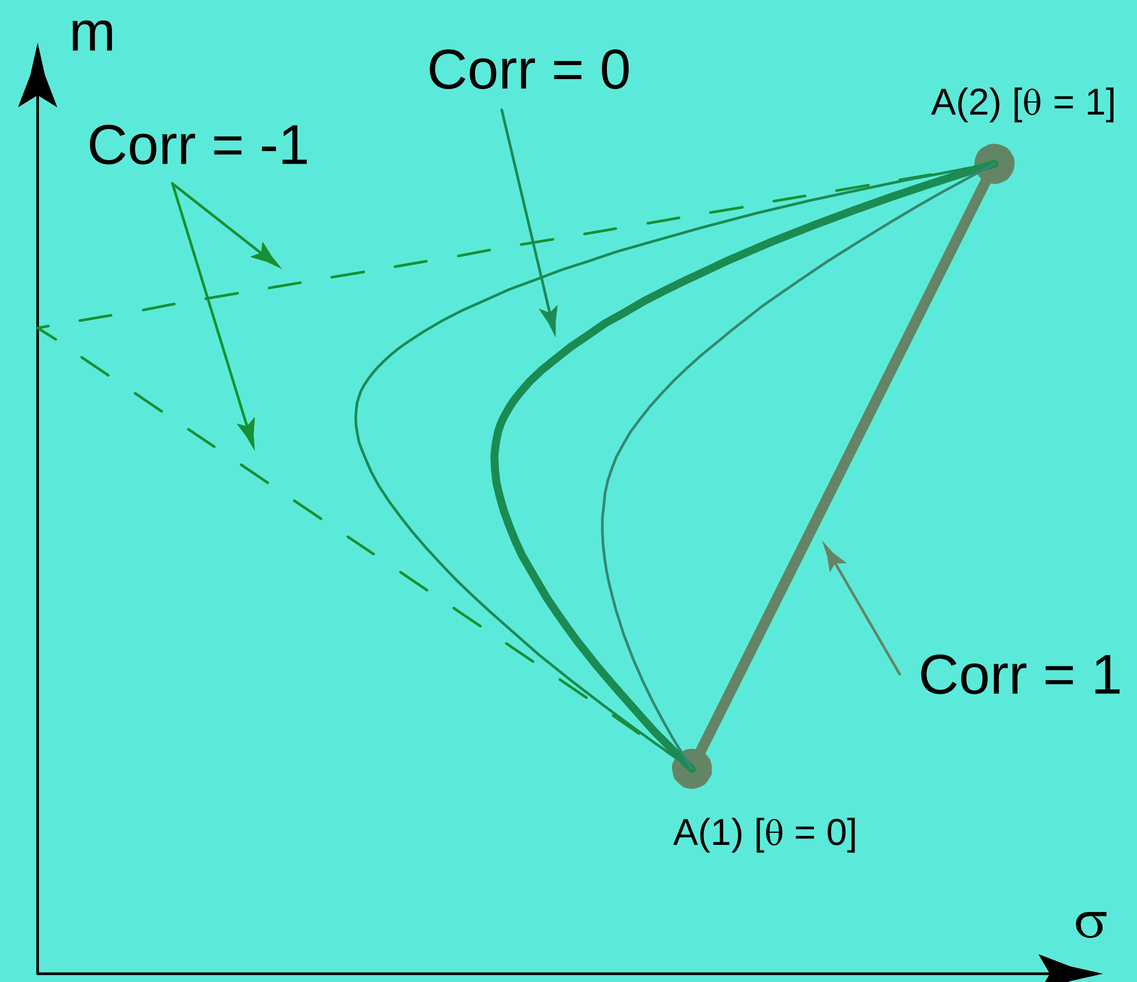
- Nbre quelconque de périodes, Cas particulier
- Neutralité au risque
  - Espérance mathématique de la valeur actualisée
- Faible variation de la consommation
  - Π - 1/(1+r)E($\underline{a}$)= -bCov($\underline{C,a}$)
- Suite inter-temporelle de dividendes.
  - Espérance mathématique avec probabilités corrigées du risque de la valeur actualisée
- Valorisation de l'entreprise de Lucas.
  - $V'(y)p(y)=d \int V'(y')(y'+p'(y')dF(y'/y)$.
  - Définir $g(y)=dE(V'/\underline{y'})$
  - Résoudre $f(y) = g(y)+d \int f(y')dF(y'/y)$.
  - $P(y) =f(y)/V'(y)$

Les propriétés probabilistes des actifs.

- Moyenne, variance, moments avec m actifs.
  - m (θ) = $\sum_j$ E(A(j)) (θ(j)) = $\sum_j$ m(j) (θ(j),
  - σ^2 (θ) = θ Ξ θ, Ou Ξ matrice symétrique
  - $$\Xi = Var(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \ddots & & (\sigma_{ji}) \\ & \sigma_j^2 & \\ (\sigma_{ij}) & & \ddots \end{bmatrix}$$
  - = σ^2 (j), = σ(i,j) = ***E***{**<u>A(i</u>**)-E(**<u>A(i</u>**)}{**<u>A(j</u>**)-E(**<u>A(j</u>**)}
- Représentation moyenne écart type.
  - Portefeuille θ ___ (m , σ^2), σ
  - Portefeuille tθ ___ (tm , $t^2\sigma^2$), tσ.

Les arbitrages moyenne-écart type.

- Rappel :
- $m = (1-\theta)(m(1)) + \theta\,(m(2))$
- $\sigma^2 = (1-\theta)^2\,\sigma^2(1) + \theta^2\,\sigma^2(2) + 2\,\theta(1-\theta)c\,\sigma(1)\sigma(2)$
- Calcul de $(d\sigma/d\theta)(0)$
- Formule ci-dessus,
- $= -\sigma(1) + c\sigma(2)$
- d(Moyenne/$d\theta$)(0)
- $= m(2)-m(1) > 0.$

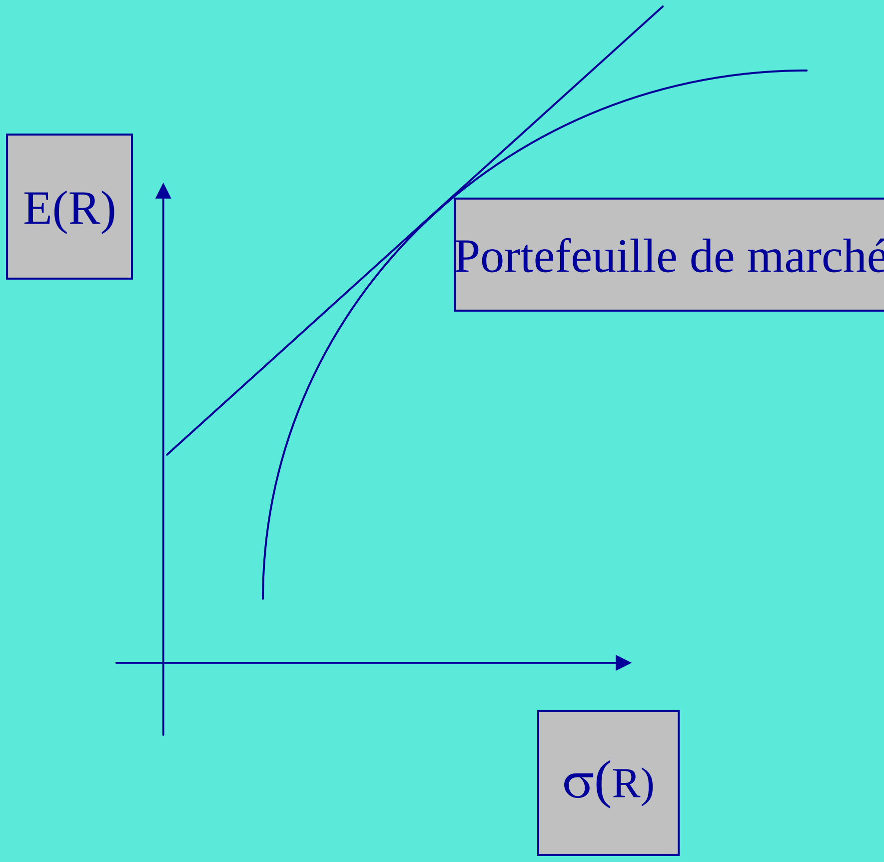


Information symétrique : demande et diversification d'équilibre

C(CAPM)

Portefeuilles efficaces en moyenne écart-type du rendement

- Hyperbole,
  - hors actif ss risque
- Combinaison..
  - Portefeuille risqué particulier
- **Théorème des deux fonds** :
  - Tout portefeuille efficace en moyenne-variance est la combinaison
  - de *l'actif sans risque* et
  - d'un *portefeuille* dit *de marché* *
- Avec
  - proportion donnée chacun actifs
  - Rien sur la qauntité.
- Démonstration
  - Géométrique
  - Algèbrique,



Prix et rendements des actifs en moyenne variance.

- Commentaires : le prix du risque
  - **Prix du risque : [ER(θ*)- (1+r)}]/ √ VarR(θ*)**
- Commentaires les bétas des actifs
  - Prenons le portefeuille de marché θ*
  - Calcul du prix du risque d'un actif à la marge :
  - [(ER(j)-ER(θ*)]/{-**√ VarR(θ*)** + {Cov[(R(θ*),R(j)] / **√ VarR(θ*)**
  - Egalisons avec le prix du risque
  - [(ER(j) – (1+r)] = [E(R(θ*)-(1+r)][Cov[(R(θ*),R(j)]/[Var (R(θ*)]
- Le beta de l'actif : {Cov[(R(θ*),R(j)]/Var (R(θ*))
- Prime de risque = beta prime de risque du portefeuille de marché
  - Covariance positive, Nulle
  - Négative…
- q(j)= [E(A(j)) /(1+r)] - {Cov[(A(θ*),A(j)]/Var (A(θ*))} [E(A(θ*)/(1+r)]-q*]

Caractéristiques du portefeuille de marché

- Premier mode de calcul :
  - accroître de dθ(j), la part de l'actif j
  - Variation de l'espérance : E(R(j) – E(R(*))
  - Variation de la variance ; - 2varR(*) + 2 cov (R(*),R(j))
  - Variation de l'écart type : diviser d♦^{2} par 2 ♦, ♦= 2 ⌦var R(*)
  - - ⌦var R(*) + cov (R(*),R(j)) / ⌦var R(*)
- Identifier au prix du risque
  - E(R(j) – E(R(*))/[- ⌦var R(*) + cov (R(*),R(j)) / ⌦var R(*)]
  - **= [*E*R(*)- (1+r)}]/⌦VarR(*)**
- [(*E*R(j) – (1+r)] =
- {Cov[(R(θ*),R(j)] /Var (R(θ*))}[*E*(R(θ*)-(1+r)]

Rappel : prix des actifs et rendement…

- Une variété de formules, pour les rendements.
  - [E(<u>R(θ</u>)) – (1+r)] =(1+r) Cov(<u>dV', R(θ), </u>(***marchés complets***)
  - [E(<u>R(θ</u>)) – (1+r)]= - (1+r)[Cov {<u>h, R (θ</u>)}] (*arbitrage*).
- Aussi, *Medaf, Capm*
  - [*E*(R(θ*)-(1+r)]/ (Var (R(θ*)) = prix du risque
  - [(*E*R(j) – (1+r)] = {Béta (j)}[*E*(R(θ*)-(1+r)]
  - Béta(j)= {Cov[(R(θ*),R(j)] /Var (R(θ*))[
- Et des correspondants pour les prix.
  - q(j) - 1/(1+r)E(<u>A(j)</u>)= Cov(d<u>V',A(j)</u>)
  - = {Cov[(A(θ*),A(j)]/Var (A(θ*))} [*E*(A(θ*)/(1+r)]-q*]
- ..

La demande d'un actif risqué avec fonction d'utilité moyenne-variance : cas CARA.

- Le cadre :
  - Actif A, prix q, actif A(0) sans risque, prix 1, Richesse initiale W_0 donnée
- La maximisation
  - Max EU(w), $\underline{w\ } = Z(0)\,(1+r) + \theta\underline{A}$, $Z(0) + q.\theta = W_0 + q.\ \theta_{0,}\ \theta = Z(a)$.
- Cas Moyenne variance.
  - Moyenne de la richesse fiscale : Z(0) (1+r) + Z(a)E(**A**)
  - Variance de la richesse fiscale $[Z(a)]^2$ var **A**
- Max $\{(W_0 - q(a)Z(a))(1+r) + Z(a)E(\underline{\mathbf{A}}) - [b]/[2](Z(a)^2)\ \mathrm{var}\underline{\mathbf{A}}\}$
  - E(A) - q(a)(1+r) = b Z (a) var **A**
- **Z (a) = [E(A)-q(A)(1+r)]/[bvarA] = [T][E(A)-q(A)(1+r)]/[varA],**
- *Capture l'intuition, S'étend aisément au cas d'actifs indépendants.*
- ***Consentement à payer pour un actif : prix à payer pour un actif de rendement certain équivalent – Cov Utilité marginale et du rendement de l'actif.***

La demande d'actifs risqués en moyenne variance: le cas de ressources non échangeables risquées.

- *Mettre en regard*
  - $E\underline{\mathbf{A}}$ –q(1+r) et b[(VarA) θ + Cov(($\underline{\mathrm{A}}$),$\underline{\mathbf{w}}$)]
  - [(VarA) θ] = T [$E\underline{\mathbf{A}}$ –q(1+r)] - Cov(($\underline{\mathrm{A}}$),$\underline{\mathbf{w}}$)]
- **Résultat : cas ou tous les risques sont échangeables**
- $\theta^* = (\mathrm{Var}\ A)^{-1}\ \{T(.)[E(\underline{\mathbf{A}})-(1+r)q]\}$, T(.) pris en $E\underline{\mathbf{w}}$
- *Comparer Z (a) = [E(A)-q(a)(1+r)]/[bvar$\underline{A}$],*
- **Cas ou tous les risques ne sont pas échangeables**
- **Résultat :**
- $\theta^* = (\mathrm{Var}\ A)^{-1}\ \{-\mathrm{Cov}(\underline{\mathbf{A},\mathbf{w}}) + T(E\underline{\mathbf{w}})[E(\underline{\mathbf{A}})-(1+r)q]\}$

$(\mathrm{Var}\ A)^{-1}\ \mathrm{Cov}(\underline{\mathbf{A},\mathbf{w}})$: Portefeuille de couverture, solution pour T=0

L'équilibre général en cas de risques échangeables.

- Equilibre.
  - q= $E(\underline{\mathbf{A}})/(1+r) - [\text{VarA}]\,\theta(m)/\,[(1+r)(T(.)$
  - Ou $T(.) = \sum_h [T(E(\underline{\mathbf{c(h,1)}})]$, tolérance au risque de l'économie
  - q= $E(\underline{\mathbf{A}})/(1+r) - [\text{Cov}(\underline{A,c(m}))]/\,[(1+r)T(.)]$
- Commentaires :
  - $q(j)= E(\underline{\mathbf{A(j)}})/(1+r) - [\text{Cov}(A(j),c(m))/\,[[(1+r)\,T(.)]$
  - Rappel :
  - $(\text{Var } A)\,\theta(m) + \text{Cov}(\underline{\mathbf{A,w(1}}))= T().[E(\underline{\mathbf{A}})-(1+r)q]$
  - Implique $\text{Var}(c(m)) = [T(.)][E(\underline{\mathbf{A(m}})-(1+r)q(m)]$
  - Substituer ….. CAPM

Commentaires.

- Relations avec CAPM simple. (complétude)
  - CAPM donne des conditions nécessaires d'équilibre.
  - Relations entre prix et caractéristiques des actifs/ car. du marché.
  - Ici le portefeuille de marché est exogène.
  - Ces relations nec. Vérifiées.
  - Le modèle donne les transactions d'équilibre..
- Relations avec la théorie de l'arbitrage.
  - La formule $[E(\underline{R(\theta)}) - (1+r)] = - (1+r)[Cov \{\underline{h, R(\theta)}\}]$ (*arbitrage*).
  - illustrée avec h(h).
- Robustesse.
  - Revenir sur le modèle moyenne variance élémentaire.

Equilibre, suite

- Consommations (et détentions d'actifs) à l'équilibre :
  - c(h,1,s) - *E* **c(h,1)** =
  - [(w(h,1,s) - *E* **w(h,1**)]^{Y}) + [T(h)/T]proj$_{A}$[c(1,s) -*E* c(1,s)].
  - Commentaires.
  - Le risque diversifiable de l'économie est partagé selon la tolérance au risque relative
- Epargne et taux d'intérêt d'èquilibre
  - : dans le cas CARA gaussien.
- Log(1+r) =
- -logd + ∑ θ[E(c(1)-w(0) - ∑ θ(h)/2) Var(**w(h,1**)^{Y} - θ /2 Var(proj **c(1))**
- **Remarques.**
  - Préf.présent, dotations, aversion…,répartition des risques.

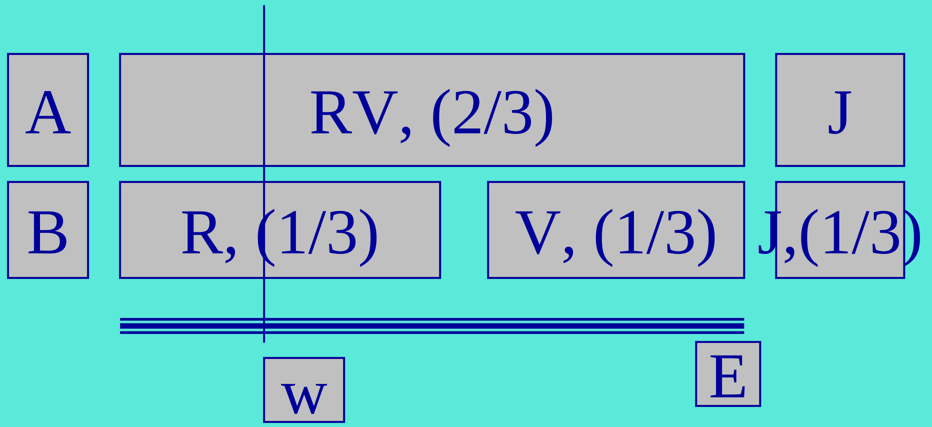
Les marchés financiers :

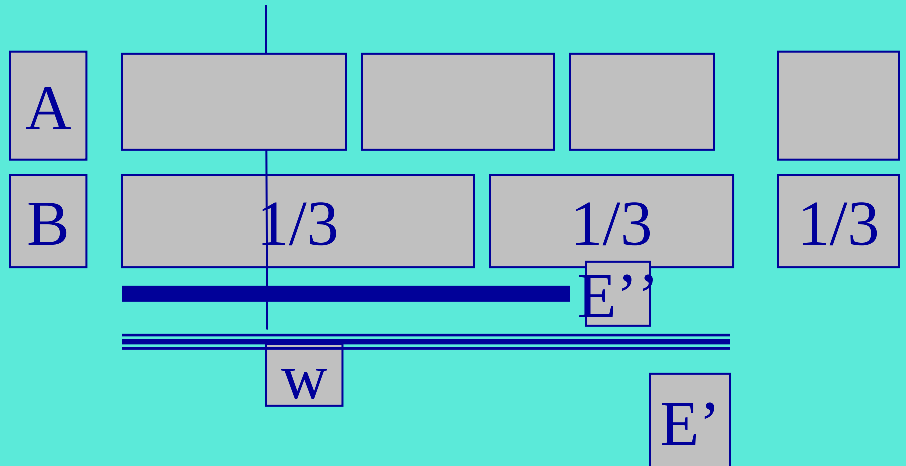
information asymétrique, efficacité informationnelle?

Information, échange et prix.

« No trade » en information asymétrique: retour sur l’argument.

- M. A et B. et le football…
  - Partition des états nature..
  - Cellule R, ½ de succès.
  - Pari : succès à 2 contre 1.
  - Info sym. Pas de pari.
  - Pari / plausibilité fixe.
  - Sinon pas de pari.
- Deux raisonnements :
  - Je sais qu’il parie $\Rightarrow$il obs.R
  - La stratégie :
    - A parie/R, s’abstient sinon
    - B parie si RV,
  - N’est pas un équilibre.



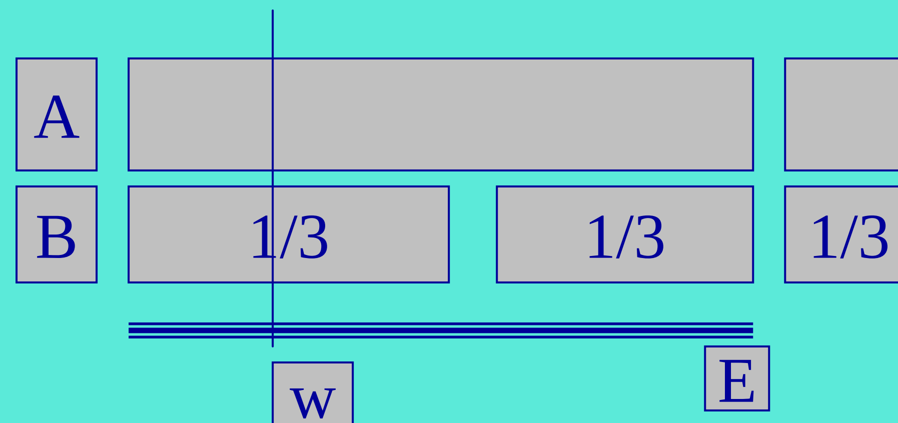


Connaissance Commune et information asymétrique.

- Leçons :
  - Les théorèmes de no-trade :
    - pas de réarrangement d'actifs, / arrivée d'informations nouvelles
    - Si arrangements initiaux efficaces et marchés complets, riscophobie)
  - Plus fort que la *cohérence temporelle*, mais la requiert.
  - *« No susnspot »*…
  - Marchés complets, très fort…
    - Ne couvre pas cas : complétude requiert des actions successives.
    - Etc…
- Reste vrai.
  - en information asymétrique
  - Dès lors qu'il y a « connaissance commune des actions »
  - Ou équilibre bayésien. (avec a priori commune…)

Comment vient
la Connaissance Commune ?

- Comment vient le CK ?
- Histoire 1:
  - B propose à A le pari à 2/1
  - A sait que B a observé R.
  - + gén, si actions observables
- Histoire 2 :
  - annonce (répétée) de la probabilité a posteriori.
  - A :1/4, B:1/2, A : ½
  - Convergence :
    - De la proba. A posteriori.
    - pas nécess./
    - partition la plus fine…
      - Si la règle de décision vérifie l’axiome chose sûre, est CK/w, elle est constante sur le « meet »
- Autres exemples



Critiques des solutions.

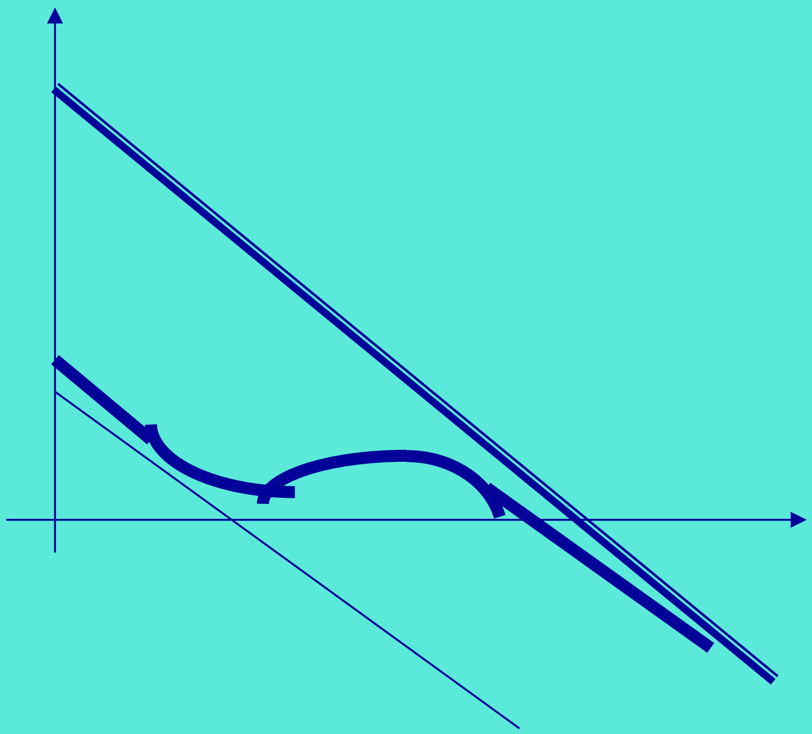
- CK des actions : trop fort..
- Equilibre naif : trop simpliste..
- Equilibre avec anticipations : Un deus ex machina.
  - Toute l’information disponible est transmise dans les prix,
  - Le marché est *informationellement efficient au sens fort.*
  - La propriété a une généralité assez grande…
- Généralisation :
  - s(i), signaux individuels, S=[s(1),….s(m)],
  - P(S) vecteur de prix d’équilibre si information complète jointe.
  - Si nombre fini de signaux (individuels donc collectifs)
  - Génèriquement P(S’) # P(S’’), si S’# S’’ Radner (1979), EMA
  - Donc, transmission complète, cf ci-dessus, possible.
  - Plua généralemen si dimension espace des prix > dimension de l’espace des signaux.

Critiques des solutions, suite.

- Equilibre avec transmission d'informations :
  - Un deus ex machina,
  - Aux conséquences paradoxales…
  - Aux bénéfices évalués de façon trop sommaire.
  - Et aux fondements fragiles..
- Retour sur l'exemple précédent.
  - Quid de la demande pour p # H,B. plusieurs équilibres possibles.
  - Ou en tous cas de façon non robuste..(bruit…)
  - La difficulté accentuée dans le modèle général R :
  - …Si agents nombreux et information dispersée.

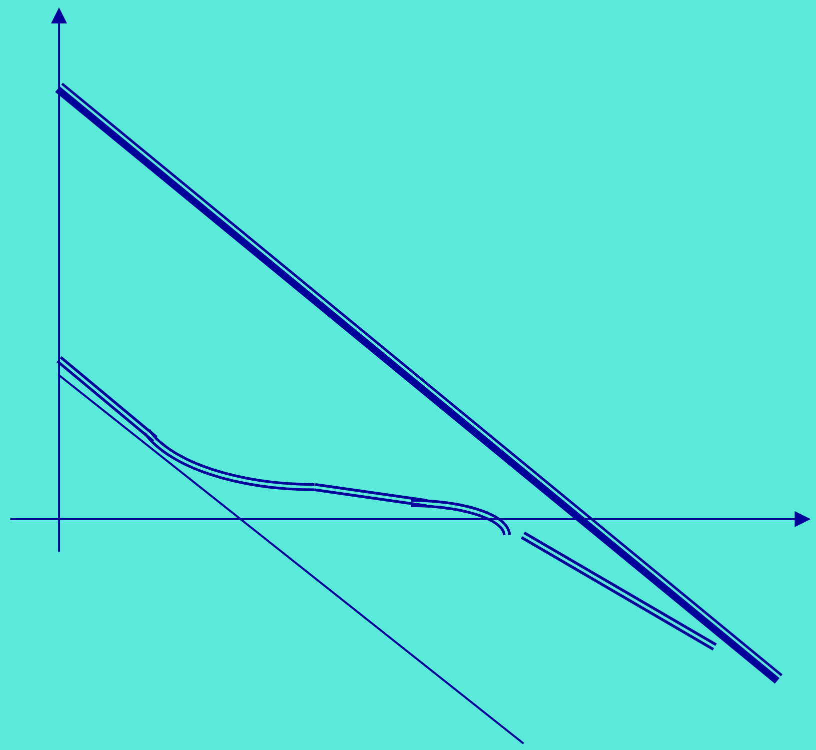
Le modèle avec bruit.

- Le cadre :
  - analogue au précédent,
  - Offre bruitée (noise traders).
- L'équilibre : *Z, Croyances*
  - Z(p,I)=ad(I,p)+(1-a)d(NI, p)=**<u>e</u>**
    - p(I,e) apure le marché.
  - d(I,p) stratégie dominante.
  - ***Croyances*** NI bayésiens :
  - Si p : e =- Z(p,H) ou -Z(p,B)
  - calculent E(H/p) et E(s/p)= HE(H/p) +B(1-E(H/p))
  - d(NI,p) = E(s/p) –p.
- Bien défini..
- Existe t'il ?
- Est il « plausible »



L’équilibre du modèle avec bruit.

- Existe t’il ?
  - Oui, si ..RVM du bruit
  - Il est unique…
- Propriétés
  - La demande totale est décroissante.
  - Mais pas nécessairement la demande des NI.
  - Fonction / précision du bruit.
- Est il « plausible » ?
  - CK : rationalité/ actions, stratégies
- Efficacité informationnelle ?



Un modèle plus complexe.

- Hypothèses
  - Agents infinitésimaux *i* dans [0,1]

    CARA, richesse initiale = 0, Programme : $\mathrm{Max}_{xi}\ E(\mathit{theta} - p)x_i$
  - Information dispersée de façon symétrique.
  - Cependant..

1. L'information :
   - Signal privé *(i)* $s_i = \mathit{theta} + \mathit{beta}_c + \mathit{beta}_i$; signal total $s_c = \mathit{theta} + \mathit{beta}_c$
   - Demande usuelle : $$x(s_i, p) = \frac{E(\theta \mid s_i, p) - p}{a\mathrm{Var}(\theta \mid s_i, p)}$$
   - ..
   - Apurement du marché : p tel que $\Sigma x_i(s_i, p) = e$

Des croyances à l'équilibre.

- Même problèmatique que précédemment
- Equilibre :
  - demandes individuelles
  - ---demande agrégée
  - -----prix p*(e,*s_c*) (*apurement marché).
  - Les demandes individuelles stratégies sont optimales :
  - p ---croyance bayésienne sur (s_c*) et donc sur theta (prob.cond)(cf l*a distribution jointe (*theta, p*)
  - Détermine les demandes individuelles
- Equilibres linéaires. ?
  - $p = p° + c_s s_b + c_e e$

Propriétés de l'équilibre

- Analyse de l'existence.
  - Hypothèse: prix anticipé linéaire $p = p^{\circ} + c_s s_b + c_e e$
  - Bruits gaussiens => croyances cond. Hyp. simples
    - Espérance $E(theta \mid s_i,p)$ linéaire en (s_i,p)
    - Variance $V(theta \mid s_i,p)$ constante
  - Demande agrégée linéaire en (s_b, p)
  - Apurement du marché : $Z\ (s_b, p) = e$
  - => Prix d'équilibre p^* linéaire en s_b *et* e.
  - Fonction T :
    - si anticipations (p, c_s, c_e), alors l'économie sera :

    $Tp(p, c_s, c_e)$, $Tc_s(p, c_s, c_e)$, $Tc_e(p, c_s, c_e)$
    - Nash : point fixe de T

$$Z(s_b, p) = \frac{c_\varepsilon^2 \sigma^2 s_b - c_s(b^2 - b_c^2) p^o - Dp}{cste}$$

- Il existe et est unique

Le théorème de Modigliani Miller.

- THM : ***La valeur de l'entreprise ne dépend pas de la répartition dette actions***.
  - Valable sous des hypothèses plus faibles
- Mais ici des propriétés supplémentaires.
  - En réintroduisant les choix de production
  - les actionnaires d'accord sur le choix du plan de production.
- Du point de vue normatif :
  - Financement et production sont optimaux.

L’entreprise et la finance.

L’entreprise comme organisation
et la logique de son financement.

Valeur de l’entreprise en marché complet.

- Entreprise :
  - Choix fixé
  - Suite y(s(t)) plans contingents
  - Génération nette de liquidité…
- Valeur de l’entreprise :
  - Valeur évaluée avec le système de prix complet p(s(t) de y(s(t))
  - = valeur de ses contreparties :
  - Valeur entreprise indépendante de la répartition de ses contreparties
- Contreparties possibles :
  - Actions, fraction a de l’entreprise -- ay(s),
  - Autres actifs à rémunérer,
  - Exemple la dette …

La logique des instruments financiers..

- Cas1 : Aléa moral pur
  - Le résultat observable sans coût…
  - où l’emprunteur doit être incité à mettre le projet en place : (agence en aléa moral)
  - Contrat optimal dépend de l’aversion au risque des contractants.
    - Cas prêteur neutre au risque, agent aversion au risque élevé : proche de l’action. Cas symétrique, obligation ?
    - Sinon : partage des bénéfices..;
- Cas 2 : Anti-séléction pur
  - Résultat observable,
  - Information privée sur le projet, coût 1.
    - R Prob p, 0 prob. 1-p
    - R’<R, prob. P, …(pR=PR’)
  - Anti-sélection : le taux est élevé sélectionne les mauvais risques,
  - Dans certains cas écrémage possible / montant du prêt et taux

La logique des obligations : le prêt à intérêt comme contrat

- Le cadre : Un projet
  - **Un prêteur et un entrepreneur « neutres au risque**
  - **Un projet taille l, rendement f(l,s).**
  - **Financement optimal ?**
- Difficulté : selon Gale-Hellwig (1985)..
  - **L'état s est observable par l'entreprise et avec un coût pour le prêteur et (sanction) pour l'emprunteur.**
  - **Probabilité objective CC.**
- Contrat optimal : <u>contrat de dette standard,</u>
  - <u>avec déclaration de banqueroute.</u>

Le Marché boursier

Fluctuations et valeur fondamentale..

La valorisation des actions : Ce qu'on en (a) dit.

- Le problème :
  - Une action : *droit de propriété sur une entreprise, échangeable.*
  - Comment varie son prix ?
  - Prix individuel et prix des agrégats.
- Les questions :
  - <u>1- La description des cours : le processus stochastique des prix ?</u>
    - *Marche aléatoire ?* (Bachelier), Avec dérive : Black-Scholes…
    - Volatilité ?
  - <u>2- Rentabilité et prix</u>
    - Battre le marché : l 'espérance du spéculateur est zéro : Bachelier)
      - Prix présent et information, publique, privée, « initiés »
      - <u>Le marché est il « efficient » ? (Fama)</u>
    - Prédictibilité des cours futurs.

La valorisation des actions : que dit la théorie ?

- **Le modèle** :
  - un titre bousier *identifié à une suite infinie de dividendes : d(t)*
  - un actif sans risque taux d 'intérêt r, .
- Commentaire: Une schématisation discutable.
  - Dividende +gain en capital
  - Modèle polaire : uniquement gain en capital.
  - pb de la logique des dividendes, de la rentabilité du profit réinvesti
- Que nous dit la théorie « standard » :
  - $q(j)/q(0) = [1/(1+r)][\Sigma_s A(j,s) P(s)]$, $P(s) = \pi(s)/ \{\Sigma \pi(s)\}$ est « *la probabilité risque neutre* ».
  - $[(ER(j) - (1+r)] = [E(R(\theta^*)-(1+r)][Cov[(R(\theta^*),R(j)]/[Var (R(\theta^*)]$
  - $q= E(\mathbf{A})/(1+r) - [Cov(A,c(m)]/ [(1+r)T(.)]$.

L’usage de la théorie.

- Valorisation relative des actifs : (CAPM)
  - $[(E R(j) - (1+r)] = [E(R(\theta^*)-(1+r)][Cov[(R(\theta^*),R(j)]/[Var\ (R(\theta^*)]$
  - A priori, permet la comparaison inter-titres.
  - Résultats décevants..
- Valorisation d’une action ou d’un agrégat.
  - $q(j)/q(0) = [1/(1+r)][\Sigma_s\ A(j,s)\ P(s)]$, $P(s) = \pi(s)/\{\Sigma\ \pi(s)\}$ est « *la probabilité risque neutre* ».
  - Prix = espérance de la valeur actualisée des revenus avec probabilités *corrigées du risque.*
  - Tient compte du produit probabilité utilité marginale du revenu.
  - Théorie de la valeur fondamentale.
- Rendement d’une action du marché boursier en général.
  - $q = E(\underline{\mathbf{A}})/(1+r) - [Cov(\underline{A,c(m)})]/\ [(1+r)T(.)]$.

La théorie de la valeur fondamentale : version naive

- Version naive
  - Horizon raccourci
  - Neutralité au risque…
- Version naive : Avec dividendes certains
  - **$p(t) = \{1/(1+r)\}\{p^e(t+1/t) + d(t+1)\}$**
  - le prix de l 'actif aujourd'hui dépend de son prix demain. ....qui dépend de son prix d 'après demain ... $p^e(t+2/t+1)$ etc..
- Version naive : avec dividendes stochastiques.
  - L 'équation de base :
  - $p(t) = \{1/(1+r)\}\{E(p^e(t+1) + E(d(t+1))\}$
  - *le prix de l 'actif aujourd'hui dépend de l 'espérance de son prix demain. ....qui dépend de l 'espérance de son prix d 'après demain.*

La théorie de la valeur fondamentale : version sophistiquée.

- Version sophistiquée.
  - Horizon infini.
  - Probabilité risque-neutres.
  - Equilibre à anticipations rationnelles.
- EAR : dividendes aléatoires.
  - Valeur fondamentale.
  - $p(t) = \{1/(1+r)\}\{E(p(t+1) + E(d(t+1)\}$
  - $p(t) = \Sigma_{T=t+1} \{1/(1+r\}^{T} \{E(d(T))\} + \{1/(1+r\}^{T+S} E(p(t+S))\}$
  - Si S grand , E (p(T+S)) borné, second terme tend 0
  - $p(t) = \Sigma_{T=t+1} \{1/(1+r\}^{T} \{E(d(T))\}$
- Commentaires
  - ***Prix égale espérance de la valeur fondamentale.***
  - ***D'autres solutions (bulles) écartées par le raisonnement.***
  - Si E ($d(t+n)$) = $\underline{d}$, alors même formule que précédemment

La valeur fondamentale illustrée

- <u>Les prédictions de la théorie :</u>
  - les propriété stochastiques des cours reflètent les propr. stoch.du processus des dividendes ....
  - Illustrer
- <u>Cas 1</u> :
  - *d(t)*=$\underline{d}$ + ɱ ; ɱ moyenne nulle, variance finie.
  - p(t) = $\underline{d}$/r, *prix ou valeurs fondamentales constants*
- <u>Cas 2</u> :
  - *d(t)*=$\underline{d}$ +a (*d(t-1)* - $\underline{d}$) + ɱ
  - *p(t)* = $\underline{d}$/r + a(*d(t)*- $\underline{d}$)/(1+r- a), a =1, 0
- <u>Cas 3</u> :
  - martingale *d(t)*=E(*d(t+1)*,.. *marche aléatoire...*
  - *p(t)*= *d(t)/r* est lui même une martingale.

La valeur fondamentale illustrée, suite.

$$A = \begin{vmatrix} 1-c & c \\ c & 1-c \end{vmatrix}$$

P = A P

- **Cas 4**
  - d(t) : chaîne de Markov à deux valeurs h,b
    - matrice de transition, c probabilité de chgt d 'état.
    - probabilité « ergodique » : P =(1/2, 1/2)
    - h, b=0, taux d 'actualisation fixe
- Quid de p(t) ?
  - Stationnaire
  - Chaîne de Markov à deux valeurs
    - dont le support est entre 0 et (h/r)
    - qui fluctue comme les dividendes

La valeur fondamentale illustrée : fin

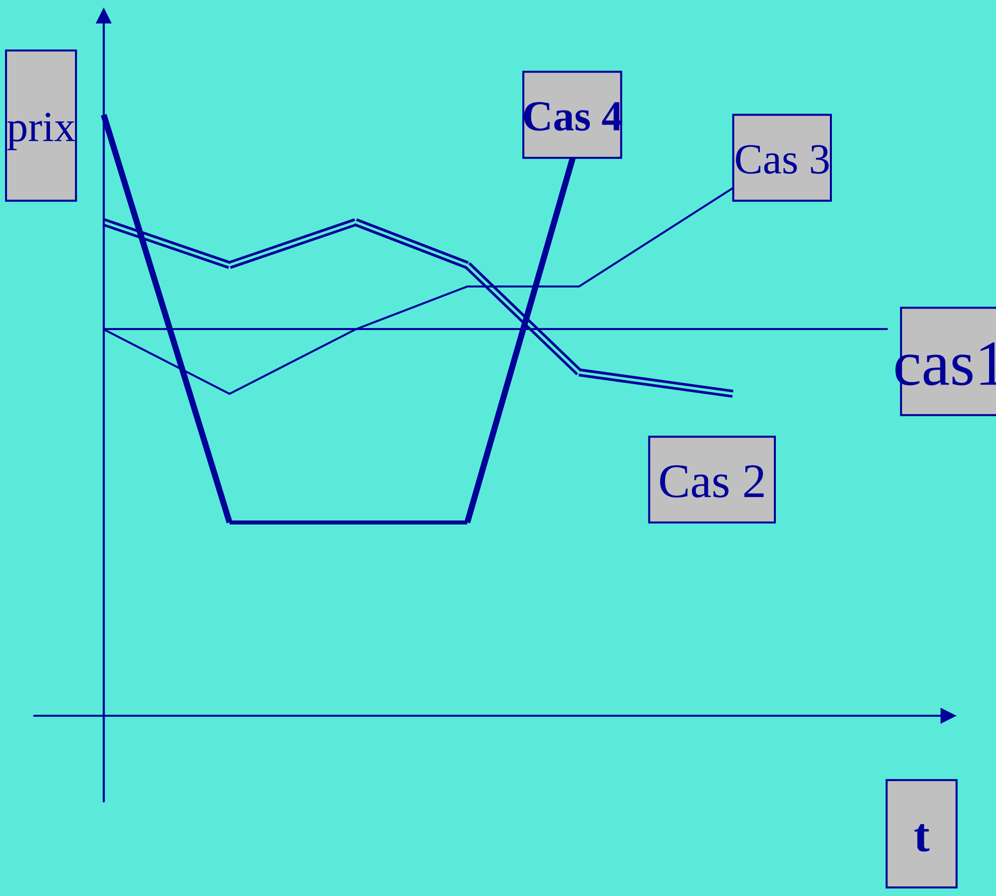
- Cas déterministe :
  - Les dividendes croissent au taux g
  - $P(t) = d(0)(1+g)^t/(r-g) = d(t)/(r-g)$
  - r croît, p décroît
    - emprunte moins sur la base des dividendes futurs.
    - L 'actif sans risque plus attractif.
- Cas général :
  - Adaptation des formules précédentes
  - Semblable si 1,2,3, plus complexe si r est lui même stochastique.
- Intuitions :
  - Si r=0,05, g=0,02, p =33 fois le dividende,
  - Si g=0,03, 50 fois, si g=0,04, 100, si 0,01, 25 fois.
  - Suggère une certaine sensibilité aux prévisions.

La théorie de la valeur fondamentale, extensions

- Version sophistiquée du processus de génération des dividendes ..
  - Le processus d(t) est AR(1), ARMA, etc..
  - Prix aujourd'hui dépend
    - de la valeur passée des prix et des dividendes
    - Exemple ..
- Que devient la théorie en information asymétrique ?
  - « Smart et noisy traders », ..(Campbell, Shiller..)
  - Smart durée de vie infinie et
  - Dividendes somme de Brownien et AR1,
  - P(t) = VF(t) –h/(r-g) + y(t).

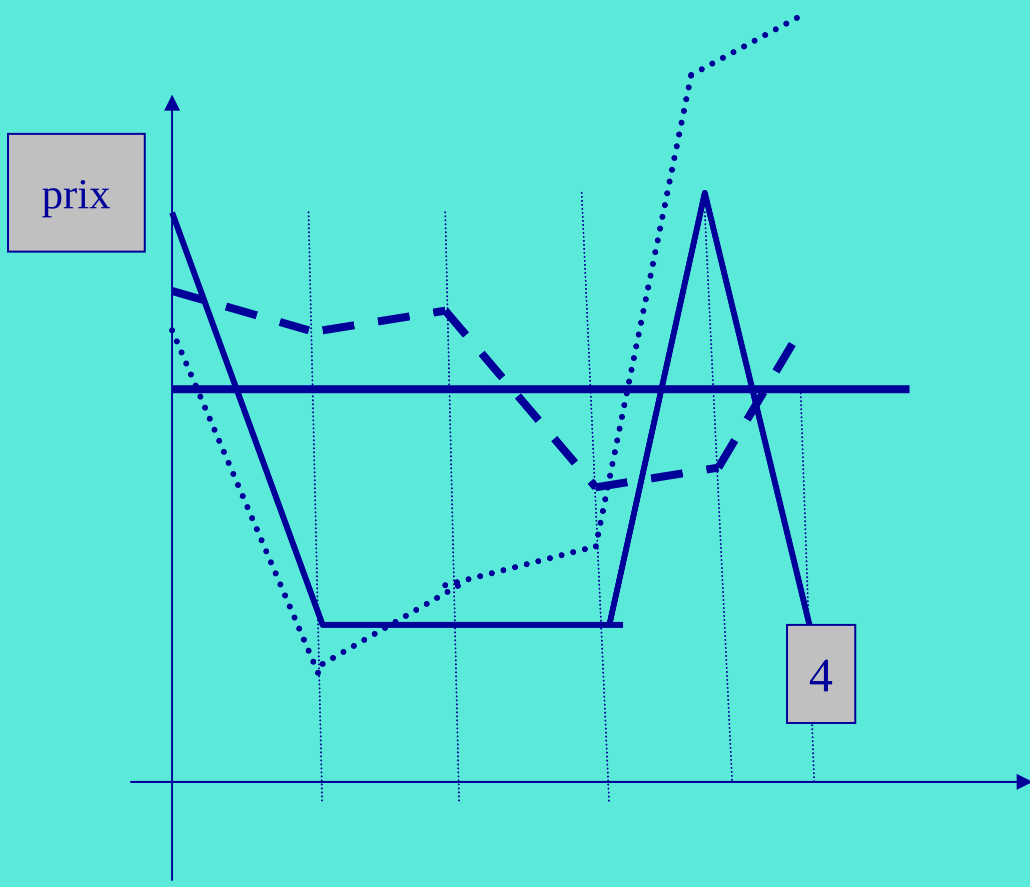
Volatilité et valeur fondamentale.

- Commentaires : la volatilité.
  - les prix, comme valeurs fondamentales, *fluctuent...*
  - Dés lors que les informations pertinentes, (ici les dividendes) sont transmises.
  - Prévisions sur la volatilité des cours très contingente au modèle de génération des dividendes adopté
  - Plus réaliste : information sur le taux de croissance ....
- Fluctuations des prix selon le modèle de la valeur fondamentale.



Volatilité des prix,
Volatilité reconstituées de la vf

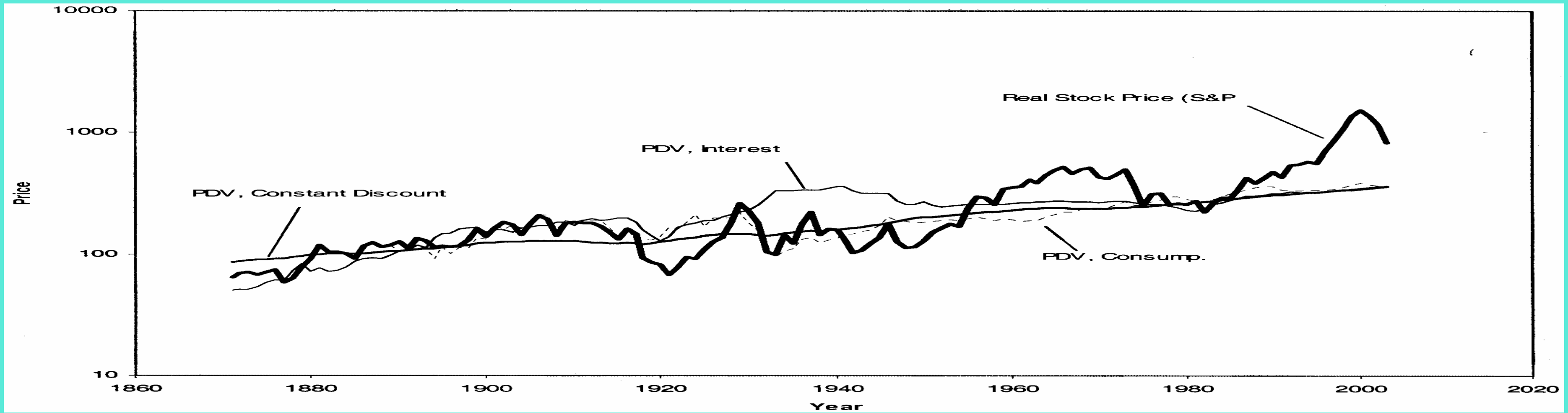
- Commentaires : la volatilité
  - *volatilité des prix* et volatilité des valeurs fondamentales observées ex post.
  - La seconde doit être plus élevée...
  - Appelons v(t) =
  - $\Sigma_{T=t+1} \{1/(1+r\}^{T} \{d(T))\}$
  - P(t) = E(v(t)), v(t)=p(t)+e(t)
  - Var(p)<Var(v)
  - Hypothèse d'ergodicité ....
- Contraire aux observations (Shiller...)



Enigmes empiriques
et questionnement théorique.

- Suite et fin du cours.
- « Enigmes » :
  - (écart apparent avec les enseignement s du modèle canonique.)
  - Excès de volatilité.
  - Crises, paniques,
  - Enigme du rendement, du taux d'intérêt sans risque.
- Questionnement théorique.
  - Volatilité et « crises ».
  - Rationalité, anticipations rationnelles ?

L'énigme de la volatilité excessive.



- Le diagramme
  - Prix observés : 1860 à nos jours
  - Valeurs fondamentales reconstituées
    - avec plusieurs hypothèses sur le taux d 'actualisation.
    - Ou sur les dividendes futurs
- <u>Les prix varient plus que les valeurs fondamentales reconstituées</u>

L'énigme du rendement *(Equity Premium Puzzle, EPP)*

- Etats Unis (1889-1978)
- 3 variables d'intérêt
  - Rendement réel des actions *(SP 500)* : 7% (R^s)
  - Rendement réel des obligations sans risque : 1% (R^s)
  - Croissance de la conso./tête : 1,8% / an (c_{t+1} / c_t)
- Enigme (Mehra-Prescott 1985)
  - Valeurs effectives non cohérentes

    sous hypothèses de comportement standard

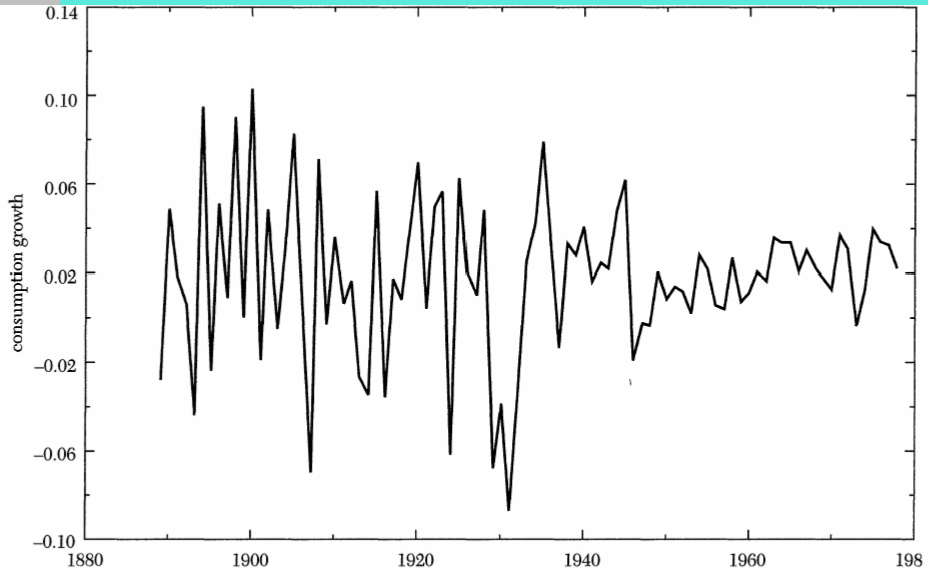


Figure 1. Annual Real Per Capita Consumption Growth

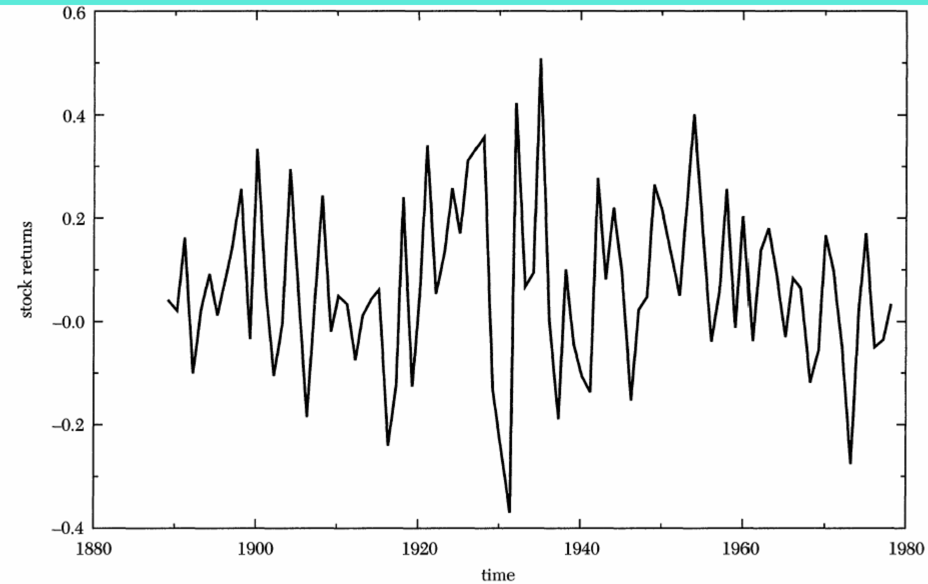


Figure 2. Annual Real Return to S & P 500

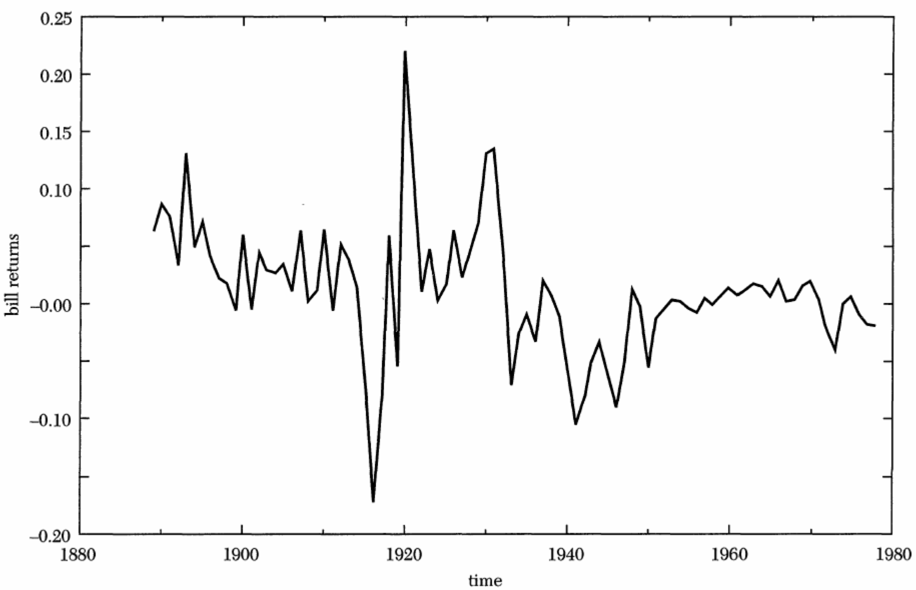


Figure 3. Annual Real Return to Nominally Risk Free Short Term Debt

TABLE 1
SUMMARY STATISTICS
UNITED STATES ANNUAL DATA, 1889–1978

	Sample Means		
R_t^s	0.070		
R_t^b	0.010		
C_t/C_{t-1}	0.018		
	Sample Variance-Covariance		
	R_t^s	R_t^b	C_t/C_{t-1}
R_t^s	0.0274	0.00104	0.00219
R_t^b	0.00104	0.00308	−0.000193
C_t/C_{t-1}	0.00219	−0.000193	0.00127

Les hypothèses et l'énigme

- Hyp1. Utilité iso-élastique

$$E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s (c_{t+s})^{1-\alpha}$$

  - *Alpha* goût pour égaliser conso. entre états ET entre périodes
  - *Beta* préférence présent
- Hyp2. Choix standard dans un marché sans friction
  - *non arbitrage*

$$E_t\left[(c_{t+1}/c_t)^{-\alpha}\left(R^s_{t+1}-R^b_{t+1}\right)\right]=0$$

$$\beta E_t\left[(c_{t+1}/c_t)^{-\alpha}R^b_{t+1}\right]=1$$

- Hyp3. Agent représentatif

- Hypothèses plus techniques
  - Croissance conso. = proc. Markovien

    (2 états), calibré données US
  - Corrélation parfaite de
    - Tx croissance de :

      (R^s) et (c)
    - Rendements réels de :

      obliga. sans risque nominal

      et obligation sans risque réel
- Cov(R^s, c_{t+1} / c_t) > 0

L'énigme : alpha >0, 0< beta <1.
Si R^b < 4%, alors R^s - R^b < 0,35%

Les hypothèses et l'énigme, suite

- Utilité iso-élastique
  - *Alpha mesure élasticité inter-temporelle de substitution et aversion relative au risque…*
  - *Beta préférence pour le présent.*
  - Si alpha < 9, « il » faut emprunter et acheter des actions *equity premium puzzle.*
  - Mais si beta = 0,99, alpha > 1, « il » faut désépargner: *« risk free rate puzzle ».*
- Résolution ?
  - Utilité espérée à la Epstein-Zin
- $U=\{c^{1-p} + b[EU'^{(1-a)}]^{(1-p)/(1-a)}\}^{1/:1-p}$
  - Sépare aversion au risque et élasticité inter-temporelle de substitution
  - Permet une bonne résolution du « risk free rate puzzle »
- Aversion au risque impliquant la prime de risque reste très « excessive »

Les crise boursières.

- Les grandes crises :
  - Tulip mania..
  - Law…
- Crise boursière :
  - Crise de 1929
  - Crash de 1987
- Autres crises :
  - Crises de change ..
  - Etc…

Volatilité et crises :
Quelles explications théoriques ?

- Phénoménes observés : volatilité, crises, bulles, lubies..
- Quelles explications théoriques ?
  - Modèles développés par les économistes
    - Rationalité des agents.
    - Rationalité des anticipations…
      - Connaissance mutuelle de l'issue de l'interaction
      - Mais d'où vient elle ?
      - CK de la rationalité et CK du modèle.
      - CK de l'issue des interactions (équilibre).
  - Autres modèles possibles …
    - Rationalité limitée des agents
    - Et des anticipations …..
- Quels phénomènes peuvent être expliqués de façon standard ,
  - Principe de parsimonie d'Occam
  - Plus fondamental : « vérité » de l'explication

Volatilité et crises : Quelles explications théoriques ?

- Jouer sur la rationalité individuelle et ses formes
  - Noisy traders,
  - General expected utility..
- Phénomènes compatibles avec l’hypothèse d’anticipations rationnelles.
  - Fluctuations « erratiques » des cours.
  - Comportement « moutonnier » d’imitation…
  - Bulles avec agents irrationnels.
  - Bulles en information asymétrique.
  - Krachs de « multiplicité ».
  - …
- Mise en cause de l’hypothèse d’anticipations rationnelles
  - Test de la plausibilité de l’équilibre….(divinatoire : conséquence de CK du modèle et de la rationalité)
  - Mise en cause de la rationalisabilité de l’équilibre.

Le comportement moutonnier

- Le comportement moutonnier (ou celui des foules..)
  - Vielle question en sociologie (Tarde,) et économie
  - Est ce irrationnel ?
- Un modèle de comportement moutonnier rationnel
    - (herd behaviour)
    - Choix entre A et B, (en cas d'indifférence on va en A..)
    - Signal reçu par chacun avec probabilité x (1/2)
    - Signal Vert (aller en B) ou Rouge (ne pas aller en B)
    - Prob (V/ si B>A) = 3/4, prob (R/ si A>B)= ¾
    - Prob (B>A/si V) = ¾, prob (A>B)/si R) = 3/4.
    - Noter, si isolé, je choisis de suivre mon signal, si j'en reçois.
    - Si information de chacun publique, je suis le signal majoritaire

Le comportement moutonnier : la grammaire de l’argument

- L’analyse du comportement moutonnier rationnel
  - Choix séquentiel, choix observable par le suivant.
  - Notion de cascade informationnelle.
    - M. 1 observe V, il choisit B.
    - M.2
      - Observe R, il reste à A.
      - Observe V, ou n’observe rien…, il va à B.
    - M.3
      - si M.1et 2 sont allés à B, va à B quelque soit son information
      - Pourquoi : si V évidemment, si R, mis en regard de VV ou V0, avec probabilité ½, suit la « foule ».
    - Mais dans ce cas tout le monde ira à V.
- Conclusion :
    - L’état social et l’état optimal si information publique…

Le comportement moutonnier :

- L’analyse du comportement moutonnier rationnel
  - Choix séquentiel, choix observable par le suivant.
  - Notion de cascade informationnelle.
    - M. 1 observe V, il choisit B.
    - M.2
      - Observe R, il reste à A.
      - Observe V, ou n’observe rien…, il va à B.
    - M.3
      - si M.1et 2 sont allés à B, va à B quelque soit son information
      - Pourquoi : si V évidemment, si R, mis en regard de VV ou V0, avec probabilité ½, suit la « foule ».
    - Mais dans ce cas tout le monde ira à V.
- Conclusion :
    - L’état social et l’état optimal si information publique…

Le comportement moutonnier : philosophie et applications

- Commentaire :
  - L'équilibre moutonnier est
  - « aléatoire »,
    - dépend de l'information des premiers joueurs
    - Statistiquement plutôt corrélé à la bonne information..
  - Fragile :
    - Fragilité connue…et CK
    - détruit par une information fiable ultérieure.
- Hypothèse cruciale :
  - choix 0-1…
- Applications :
  - Vie courante :
    - information journalistique..
    - Conformisme.
- Applications marché boursier.
  - Ho Lee ()