

## 2. Forme canonique d'intrication (systèmes à deux parties): décomposition de Schmidt

Expression générale d'un état intriqué d'un système de deux parties  $A$  et  $B$   
(bases orthonormées  $|i\rangle_A$ ,  $|\mu\rangle_B$ ):

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i\mu} a_{i\mu} |i\rangle_A |\mu\rangle_B = \sum_i |i\rangle_A |\hat{i}\rangle_B$$

avec  $|\hat{i}\rangle_B = \sum_{\mu} a_{i\mu} |\mu\rangle_B$

Chaque état de base de  $A$ ,  $|i\rangle_A$ , a ainsi un correspondant,  $|\hat{i}\rangle_B$ , dans  $B$ . Les  $|\hat{i}\rangle_B$  ne sont en général pas orthogonaux. Il existe cependant un choix de base où ils le sont: prenons pour  $A$  une base où la matrice densité partielle  $\rho_A = \text{Tr}_B [|\Psi\rangle_{AB} \langle\Psi|]$  est diagonale  $\rightarrow$

$$\rho_A = \sum_{i,i'} \sum_{\mu} \{ {}_B\langle\mu|\hat{i}\rangle_B {}_B\langle\hat{i}'|\mu\rangle_B |i\rangle_A \langle i'| \} = \sum_i \lambda_i |i\rangle_A \langle i|$$

$$\sum_{\mu} {}_B\langle\hat{i}'|\mu\rangle_B {}_B\langle\mu|\hat{i}\rangle_B = {}_B\langle\hat{i}'|\hat{i}\rangle_B = \lambda_i \delta_{i,i'} ; (0 \leq \lambda_i \leq 1)$$

Soit en normant les  $|\hat{i}\rangle_B$  (remplacement  $|\hat{i}\rangle_B \rightarrow \sqrt{\lambda_i} |\hat{i}\rangle_B$ ):

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |i\rangle_A |\hat{i}\rangle_B \quad (\text{Décomposition de Schmidt})$$

Les  $|i\rangle_A$  et les  $|\hat{i}\rangle_B$  sont orthonormés

## Quelques propriétés de la décomposition de Schmidt

De la décomposition de Schmidt, on déduit immédiatement les matrices densités réduites:

$$\rho_A = \sum_i \lambda_i |i\rangle_A \langle i| ; \quad \rho_B = \sum_i \lambda_i |\hat{i}\rangle_B \langle \hat{i}|$$

Tout état d'un système à deux parties correspond à des matrices densités réduites ayant le même spectre de valeurs propres non-nulles. Dans le cas particulier où  $A$  et  $B$  ne sont pas intriqués, les matrices densités  $\rho_A$  et  $\rho_B$  ont la seule valeur propre non nulle = 1.

Lorsque  $\rho_A$  et  $\rho_B$  ont leurs v.p. non nulles non-dégénérées, la décomposition de Schmidt est unique (à une phase près). Si au moins une v.p. non nulle est dégénérée, il existe une ambiguïté dans la décomposition (des transformations unitaires corrélées sur chaque sous-système à l'intérieur de chaque espace de dégénérescence laissent  $|\Psi\rangle_{AB}$  inchangé). Voir §3 suivant pour les conséquences physiques de cette ambiguïté.

**Nombre de Schmidt:**  $c$  est le nombre de v.p. non nulles (dégénérées ou non) de  $\rho_A$  et  $\rho_B$  → nombre de termes de la décomposition de Schmidt. Un état intriqué a un nbre de Schmidt > 1. Un état séparable a un nbre de Schmidt égal à 1.

**Le nbre de Schmidt ne peut être modifié par des opérations «locales» unitaires agissant sur  $A$  ou  $B$  séparément:** de telles transformations ne changent pas le spectre de  $\rho_A$  et  $\rho_B$ . Pour changer le nbre de Schmidt, il faut agir à la fois sur  $A$  et  $B$  (les faire interagir, porte à 2bits...).

**Remarque:** le nombre de Schmidt n'est pas une mesure précise du degré d'intrication car il ne tient pas compte du poids des termes. Nous introduirons plus loin une mesure plus « fine » de ce degré (§7).

### 3. Intrication, non-localité et inégalités de Bell

Si sa décomposition de Schmidt a des  $(\lambda_i)$  égaux, un état intriqué pourra s'exprimer dans différentes bases orthonormées associées à des états propres d'observables non-compatibles:

$$|\Psi_{AB}(\text{spins})\rangle = (1/\sqrt{2})(|+_z; -_z\rangle - |-_z; +_z\rangle) = (1/\sqrt{2})(|+_{\theta, \phi}; -_{\theta, \phi}\rangle - |-_{\theta, \phi}; +_{\theta, \phi}\rangle)$$

$$|\Psi_{AB}(\text{électrons})\rangle = \int e^{-ip_A \cdot r/\hbar} |p_A; p - p_A\rangle d^3p_A = \int e^{ip \cdot r_A/\hbar} |r_A; r_A - r\rangle d^3r_A$$

Les résultats des mesures sur chaque sous-système sont aléatoires, mais parfaitement corrélés: mesurer le système A rend certain le résultat de la mesure de la même observable sur B. Le choix de l'observable mesurée peut être fait après que les systèmes ont fini d'interagir.

*Corrélation indépendante de l'ordre des mesures qui peuvent même être « simultanées ».*

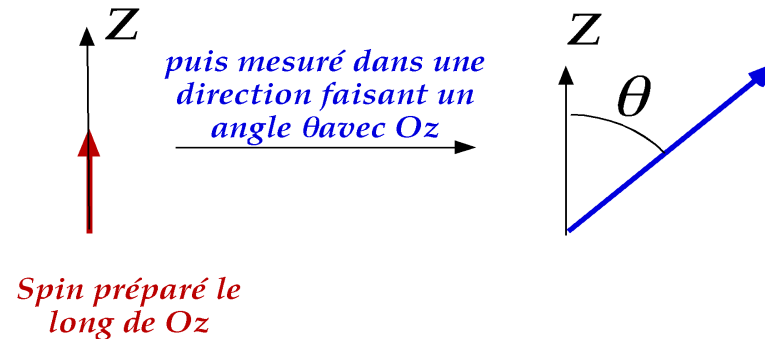
Résumé du raisonnement « contrafactuel » et « local » de EPR:

(1) **Élément de réalité:** *Si, sans perturber (localement) un « système », on peut prévoir avec certitude la valeur d'une de ses quantités physiques, alors il existe un élément de réalité associé à cette quantité. Donc, à  $S_x, S_y, S_z$  (1<sup>er</sup> exemple) et à  $r, p$  (2<sup>ème</sup> exemple) sont associés des éléments de réalité du sous-système A (et de B). Même si on ne les connaît pas, ces observables doivent « exister » avant même la mesure qui les révélera éventuellement (contrafactuel).*

(2) *Une théorie complète doit inclure les valeurs définies de tous les éléments de réalité*

Or, d'après la M.Q, des observables qui ne commutent pas ( $S_x, S_y$  ou  $x, P_x$ ) ne peuvent être simultanément déterminées. Comme d'après (1) elles correspondent à des « éléments de réalité », la M.Q. est « incomplète »  $\longrightarrow$  variables cachées?

## Un modèle de variables locales cachées pour un spin

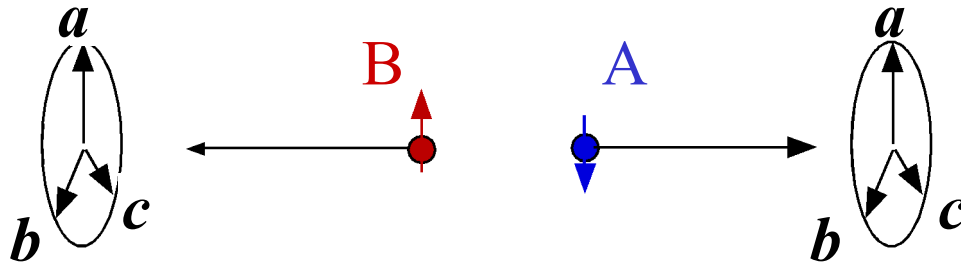


On associe au spin une fonction bivaluée  $F(\lambda, \theta)$ , où  $\lambda$  est une variable aléatoire à distribution uniforme sur  $[0,1]$ .  $F$  prend la valeur  $+\hbar/2$  si  $\lambda \leq \cos^2(\theta/2)$ ,  $-\hbar/2$  si  $\lambda > \cos^2(\theta/2)$ . Un tirage au sort reproduit la statistique prévue par la M.Q. La valeur du spin dans n'importe quelle direction est dans ce modèle un élément de réalité cachée (défini avant la mesure par la valeur inconnue de  $\lambda$ ). Chaque mesure change la loi de probabilité en définissant une nouvelle direction de quantification initiale. L'argument est contrafactuel car, par exemple, il affirme sans aucune vérification possible que la valeur du spin suivant Ox était déterminée même si on a finalement décidé de le mesurer suivant Oy....

*Raisonnement complètement étranger à la M.Q selon laquelle la valeur d'un spin avant sa mesure n'a aucun sens (une « expérience non faite n'a pas de résultat »....)*

Des modèles de **variables** aléatoires **locales cachées** (v.l.c) sont incapables de reproduire les prévisions de la M.Q. pour les corrélations de résultats de mesure sur des états intriqués. On peut établir des inégalités de Bell sur des probabilités de corrélations, satisfaites par toute théorie de v. l. c., et violées par la théorie quantique.

## Exemple simple d'inégalité de Bell



Mesure de composantes des spins de A et B dans l'une de trois directions à  $120^\circ$  l'une de l'autre dans un plan

Si  $S_a$ ,  $S_b$  et  $S_c$  sont des éléments de réalité pour A et B, chaque particule a, avant toute mesure, une valeur définie de ces observables. Il y a  $2^3 = 8$  cas possibles.

A	B	Probabilité
$S_a S_b S_c$	$S_a S_b S_c$	
+++	---	$P_1$
++-	--+	$P_2$
+ - +	- + -	$P_3$
- + +	+ - -	$P_4$
+ - -	- ++	$P_5$
- + -	+ - +	$P_6$
--+	++-	$P_7$
---	+++	$P_8$

$$P_{ab}(\text{différents}) + P_{bc}(\text{différents}) + P_{ca}(\text{différents}) = 1 + 2(P_1 + P_8) \geq 1$$

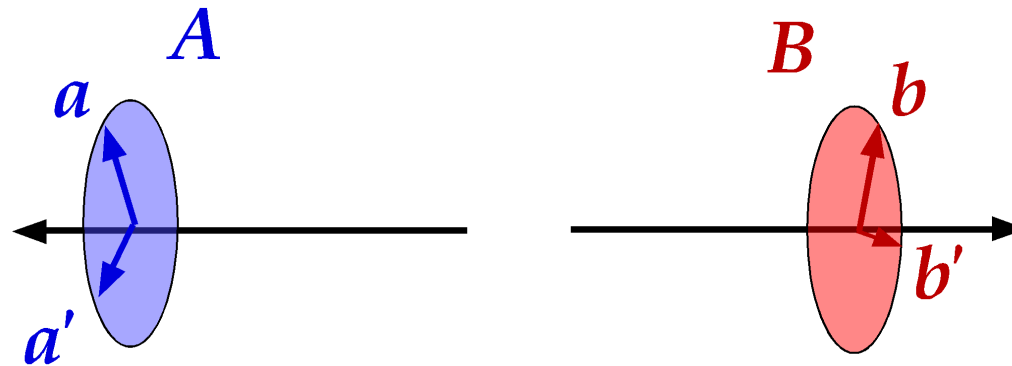
Alors que la M.Q. prévoit pour  $i \neq j$

$$P_{ij}(\text{différents}) = \cos^2(60^\circ) = 1/4 \text{ et donc}$$

$$P_{ab}(\text{différents}) + P_{bc}(\text{différents}) + P_{ca}(\text{différents}) = 3/4 < 1.$$

Possibilité de tester expérimentalement l'incompatibilité entre contrafactuelité-localité d'une part et M.Q. d'autre part

## Autre exemple d'inégalité de Bell (**Clauser-Horne-Shimony-Holt**):



On détecte les deux particules suivant quatre directions possibles dans un même plan ( $a, a', b, b'$ ) et on construit, par un ensemble de mesures, les valeurs moyennes  $\langle \sigma_{1\alpha} \sigma_{2\beta} \rangle$  où  $\alpha$  est choisi dans l'ensemble ( $a, a'$ ) et  $\beta$  dans ( $b, b'$ ). Une théorie de variable locale cachée conduit à définir deux fonctions  $F_1(\{\lambda\}, \alpha)$  et  $F_2(\{\lambda\}, \beta)$  (correspondant à chacun des deux qubits), où  $\{\lambda\}$  représente l'ensemble des variables aléatoires «cachées» associées au système. La loi de probabilité de  $\{\lambda\}$  satisfait  $\int p(\{\lambda\}) d\{\lambda\} = 1$ . Les deux fonctions  $F_i$  sont bivaluées (valeurs  $\pm 1$  qui correspondent aux valeurs propres possibles de  $\sigma_\alpha$ ). Il est alors évident que:

$S(\{\lambda\}) = F_1(\{\lambda\}, a) [F_2(\{\lambda\}, b) - F_2(\{\lambda\}, b')] + F_1(\{\lambda\}, a') [F_2(\{\lambda\}, b) + F_2(\{\lambda\}, b')]$   
ne peut prendre que les valeurs  $\pm 2$ . En sommant sur  $\{\lambda\}$  pondéré par  $p(\{\lambda\})$ , on en déduit:

$$-2 \leq \int p(\{\lambda\}) S(\{\lambda\}) d\{\lambda\} \leq +2 \rightarrow \boxed{-2 \leq \langle \sigma_{1a} \sigma_{2b} \rangle - \langle \sigma_{1a} \sigma_{2b'} \rangle + \langle \sigma_{1a'} \sigma_{2b} \rangle + \langle \sigma_{1a'} \sigma_{2b'} \rangle \leq +2}$$

*La Mécanique quantique ne satisfait pas les inégalités CHSH:*

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_{1a} \sigma_{2b} \rangle - \langle \sigma_{1a} \sigma_{2b'} \rangle + \langle \sigma_{1a'} \sigma_{2b} \rangle + \langle \sigma_{1a'} \sigma_{2b'} \rangle \\ & = -\cos(\theta_{ab}) + \cos(\theta_{ab'}) - \cos(\theta_{ba'}) - \cos(\theta_{a'b'}) \end{aligned}$$

avec  $\theta_{ab'} = \theta_{ab} + \theta_{ba'} + \theta_{a'b'}$  ( $a, b, a', b'$  dans un plan)

Choisissons le cas particulier où  $\theta_{ab} = \theta_{ba'} = \theta_{a'b'} = \theta$

$$\rightarrow S(\theta) = \cos(3\theta) - 3\cos(\theta) \rightarrow$$

$$S(\theta = \pi/4) = -2\sqrt{2} < -2 ; S(\theta = 3\pi/4) = 2\sqrt{2} > 2$$

*Forme sous laquelle les théories de variables cachées ont été testées le plus souvent (Aspect et al.).*

*La M.O. a raison et les inégalités de Bell sont violées expérimentalement.*

## Inégalités de Bell et intrication quelconque ( cas pur )

Considérons le cas le plus général de deux qubits (0,1) dans un état pur. On peut toujours écrire cet état sous la forme:  $|\varphi\rangle = \alpha |0,1\rangle + \beta |1,0\rangle$  avec  $\alpha, \beta$  : réels  $\geq 0$ . Il suffit d'utiliser la décomposition de Schmidt, en définissant convenablement les états 0 et 1 de chaque qubit. Dans toute théorie de variable cachée, cet état doit satisfaire l'inégalité CHSH.

$\alpha$  ou  $\beta = 0 \rightarrow$  pas d'intrication  $\rightarrow$  inégalités CHSH satisfaites (variables cachées applicables à des mesures sur qubits séparés)

$\alpha, \beta \neq 0 \rightarrow$  nbre de Schmidt = 2  $\rightarrow$  intrication  $\rightarrow$  violation de l'inégalité CHSH

### Démonstration:

Si  $\theta_a$  et  $\theta_b$  sont les angles de deux directions a et b du plan xOz avec Oz, on montre que:

$$\langle \varphi | \sigma_{1a} \sigma_{2b} | \varphi \rangle = -\cos(\theta_a) \cos(\theta_b) + 2\alpha\beta \sin(\theta_a) \sin(\theta_b)$$

Choisissons 4 directions a,a',b,b' du plan xOz telles que  $\theta_a = -\theta_{a'}$ ;  $\theta_b = 0$ ;  $\theta_{b'} = \pi/2$ .

$$\rightarrow \langle \sigma_{1a} \sigma_{2b} \rangle = \langle \sigma_{1a'} \sigma_{2b} \rangle = -\cos(\theta_a); \langle \sigma_{1a} \sigma_{2b'} \rangle = -\langle \sigma_{1a'} \sigma_{2b'} \rangle = 2\alpha\beta \sin(\theta_a)$$

$$\rightarrow S = -2[\cos(\theta_a) + 2\alpha\beta \sin(\theta_a)] \rightarrow \text{violation de CHSH pour } \theta_a \text{ voisin de } 0 \text{ et de } \pi$$

Etat pur intriqué de deux qubits  $\longleftrightarrow$  violation des inégalités CHSH



## *5. Intrication et mesure en physique quantique*

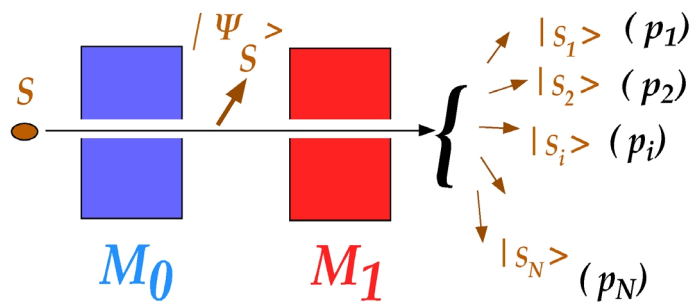
*L'intrication joue un rôle important dans la théorie de la mesure en physique quantique (intrication entre l'objet microscopique mesuré et l'appareil de mesure dans la première phase dite de pré-mesure). La dynamique conditionnelle essentielle dans cette phase apparaît également dans les opérations des portes logiques dans les circuits quantiques élémentaires.*

*La phase de pré-mesure est suivie, dans l'interprétation de Copenhague de la mesure, par un « processus » qui fait disparaître les superpositions cohérentes impliquant des états différents de l'appareil de mesure pour les remplacer par un mélange statistique. Ce processus peut se justifier physiquement par le couplage de l'appareil de mesure à son environnement, ce qu'on appelle la « décohérence ».*

*Celle-ci peut être vue comme un effet de transfert d'information contenue dans le système et l'appareil de mesure vers l'environnement, transfert qui supprime les cohérences quantiques associées aux superpositions entre états différents de l'appareil. Il y a là une analogie étroite avec le concept de complémentarité de Bohr.*

*Dans ce cours, nous présenterons une introduction à la théorie de la mesure quantique et à la décohérence. Nous commençons par rappeler ici la description d'une mesure idéale; nous analysons ensuite quelques faits essentiels concernant la complémentarité (§6) avant d'aborder la description quantitative d'un modèle simple de décohérence (§7).*

## Expérience d'« école » en physique quantique:



(a) Préparation d'un système ( $S$ ) dans un état  $|\Psi_S\rangle$  à l'aide d'un appareil ( $M_0$ ) qui effectue sur  $S$  la mesure d'un Ensemble Complet d'Observables qui Commutent (ECOC). (b) Mesure sur  $|\Psi_S\rangle$  d'une observable  $O_S$  (d'états propres  $|s_i\rangle$ , valeurs propres  $\varepsilon_i$ ) par un appareil ( $M_1$ ): on obtient avec la probabilité  $p_i = |\langle s_i | \Psi_S \rangle|^2$  le système ( $S$ ) dans l'état final  $|s_i\rangle$  (cas non dégénéré).

Si  $M_0$  et  $M_1$  mesurent des observables compatibles (qui commutent),  $|\Psi_S\rangle$  est inchangé par  $M_1$ . Dans le cas contraire,  $|\Psi_S\rangle$  est modifié de façon aléatoire.

Une telle expérience est toujours une mesure de **corrélacion entre deux événements**: un échantillonnage de mesures fournit les probabilités  $p_i$  d'obtenir avec  $M_1$  un résultat  $\varepsilon_i$  **conditionné** au résultat ( $|\Psi_S\rangle$ ) de la préparation par  $M_0$ . **La physique quantique est donc une théorie qui fait des prédictions (probabilistes) sur des corrélacions entre événements.**

Ce point de vue permet d'éviter l'introduction du concept de **réduction instantanée** du paquet d'onde qui, quoique commode, est non-physique et peut conduire à des paradoxes.

Les interactions  $S$ - $M_0$  et  $S$ - $M_1$  introduisent en principe une **intrication** entre un système **microscopique** ( $S$ ) et un appareil **macroscopique** ( $M_0$  ou  $M_1$ ).

# Mesure d'un état $|\Psi_S\rangle$ par un appareil $M$ (associé à l'observable $O_S$ )

## Description quantique de $S$ et $M$

(a) prémesure: **évolution unitaire** (équation de Schrödinger):

$$\text{Etat initial de } S+M: |\Psi_S\rangle |A_0\rangle = \sum_i a_i |s_i\rangle |A_0\rangle$$

↑  
État « neutre » de  $M$

Le couplage entre  $S$  et  $M$  doit définir une **dynamique conditionnelle** qui laisse chaque état  $|s_i\rangle$  inchangé et lui fait correspondre un état final  $|A_i\rangle$  différent pour chaque  $|s_i\rangle$  ( $\langle A_i|A_j\rangle = \delta_{ij}$ ); (On peut toujours construire une transformation unitaire satisfaisant cette condition) :  $|\Psi_S\rangle |A_0\rangle \rightarrow \sum_i a_i |s_i\rangle |A_i\rangle$

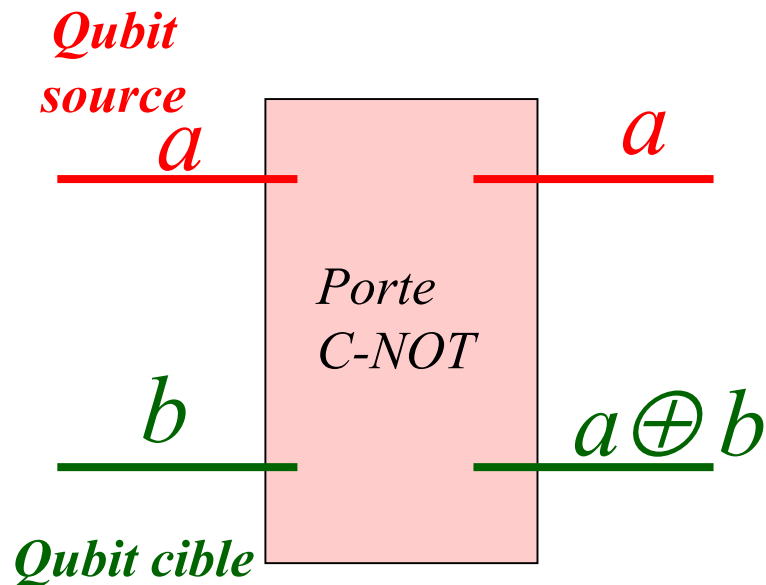
Exemple: les  $|A_i\rangle$  sont les états de position  $|X_i\rangle$  d'un « curseur » de masse « infinie » et d'impulsion  $P$ . Dans ce cas, l'Hamiltonien  $H_{int} = g O_S P$  assure la dynamique conditionnelle cherchée:

$$e^{-i H_{int} t/\hbar} |\Psi_S\rangle |X_0\rangle = \sum_i a_i |s_i\rangle e^{-igt\epsilon_i P/\hbar} |X_0\rangle = \sum_i a_i |s_i\rangle |X_0 + gt\epsilon_i\rangle$$

Opérateur de  
translation  
↙

Le curseur acquiert une info. sur l'état de  $S$ : **intrication entre les deux systèmes.**

## Cas particulier important: la porte control-not (C-Not)



$S$  et  $M$  sont deux systèmes à deux états (qubits).  
 $S$  est le bit « source » et  $M$  le bit « cible » :

$$\begin{aligned} |0\rangle_s |0\rangle_c &\rightarrow |0\rangle_s |0\rangle_c \\ |0\rangle_s |1\rangle_c &\rightarrow |0\rangle_s |1\rangle_c \end{aligned}$$

Cible inchangée

$$\begin{aligned} |1\rangle_s |0\rangle_c &\rightarrow |1\rangle_s |1\rangle_c \\ |1\rangle_s |1\rangle_c &\rightarrow |1\rangle_s |0\rangle_c \end{aligned}$$

Translation  
(modulo 2) de  
la cible

Translation conditionnelle (modulo 2) du bit cible lorsque le bit source vaut 1. Le bit source reste toujours inchangé. Peut être aussi décrit comme une « bascule » conditionnelle (C-NOT).

$$|a\rangle_s |b\rangle_c \rightarrow |a\rangle_s |a \oplus b\rangle_c$$

Dynamique de mesure réalisée par une porte logique élémentaire à deux qubits

La porte C-Not crée de l'intrication  
 si le qubit source est dans une  
 superposition d'états

$$(\alpha |0\rangle_s + \beta |1\rangle_s) |0\rangle_c \rightarrow \alpha |0\rangle_s |0\rangle_c + \beta |1\rangle_s |1\rangle_c$$

Nous décrirons plus loin des mécanismes physiques réalisant la porte C-Not.

**(b) La disparition des cohérences des « voies finales » de la mesure**

L'état du système  $S + M$  à l'issue de la phase de pré-mesure peut posséder une ambiguïté quantique fondamentale, liée à l'intrication. On peut changer de base (transformation unitaire dans les espaces des états de  $S$  et  $M$ ) et réécrire d'une infinité de façons la corrélation entre les deux systèmes (voir §2 et 3):

$$\sum_i |s_i\rangle |A_i\rangle = \sum_i |u_i\rangle |B_i\rangle$$

où les  $|u_i\rangle$  et les  $|B_i\rangle$  sont des superpositions linéaires des  $|s_i\rangle$  et des  $|A_i\rangle$  respectivement.

Exemple dans le cas de deux qubits:

$$(1/\sqrt{2}) (|0\rangle_s |0\rangle_c + |1\rangle_s |1\rangle_c) = (1/2\sqrt{2}) [(|0\rangle_s + |1\rangle_s)(|0\rangle_c + |1\rangle_c) + (|0\rangle_s - |1\rangle_s)(|0\rangle_c - |1\rangle_c)]$$

**Mesure-t-on l'observable d'états propres  $|s_i\rangle$  ou celle d'états propres  $|u_i\rangle$  ?**

**Il n'y a en général pas d'ambiguïté physique. Dans le cas d'un curseur,  $c$  est la position  $X$  que l'on observe et pas des superpositions de positions (chats de Schrödinger): Il existe une base privilégiée d'états « stables » de l'appareil de mesure que l'on peut observer à l'exclusion de leurs superpositions.**

## *Postulat lié à la « réduction du paquet d 'onde »:*

$$\sum_i a_i |s_i \rangle |A_i \rangle \rightarrow \sum_i |a_i|^2 |s_i \rangle \langle s_i | \otimes |A_i \rangle \langle A_i |$$

*La superposition impliquant des états différents du curseur est remplacée par un « mélange » diagonal dans la base des états de mesure. Toutes les cohérences entre ces états disparaissent, supprimant ainsi les corrélations entre états superpositions non-physiques. Seule la corrélation « classique » entre les  $|s_i \rangle$  et les  $|A_i \rangle$  subsiste. L 'observation des états du curseur donne alors directement la valeur de l 'observable mesurée sur le système S. Tout se passe en fait comme si on faisait la mesure sur un ensemble statistique d 'états de S préparés initialement avec les probabilités  $p_i = |a_i|^2$  dans les états  $|s_i \rangle$ . Ce remplacement est souvent associé à la notion de réduction du paquet d 'onde (notons cependant qu 'elle ne peut résoudre le problème du « choix » final entre les différents résultats possibles car la théorie est fondamentalement probabiliste).*

*Problèmes: - Cette transformation, non unitaire, ne peut être décrite par une équation d 'évolution de type Schrödinger. Elle distingue, sans base physique, deux types d 'évolution des systèmes physiques. La théorie de la décohérence cherche à expliquer ce postulat à partir d 'une description microscopique et thermodynamique de l 'appareil de mesure. Dans ce cadre, on est amené à considérer l 'environnement du système et , à nouveau, l 'intrication avec cet environnement. Nous abordons ce problème plus loin, après une analyse de la notion de complémentarité.*