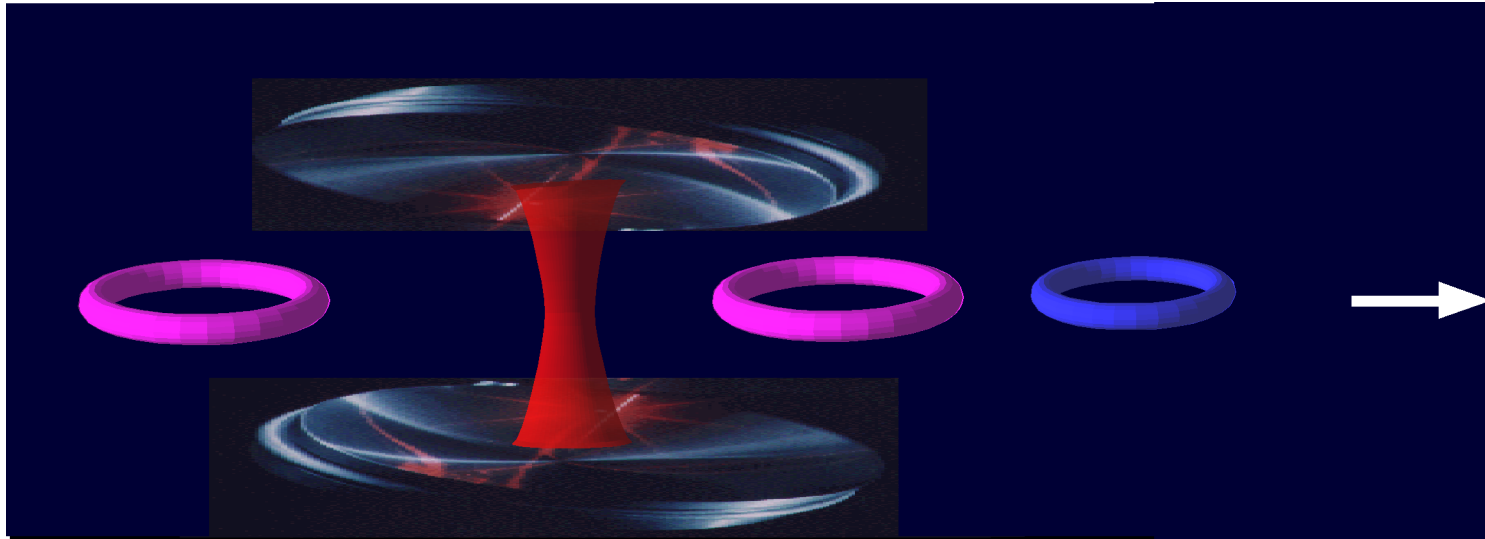


Intrication, portes quantiques et complémentarité avec des atomes et des photons dans une cavité

*Nous avons dans les leçons précédentes analysé théoriquement les aspects essentiels de l'intrication quantique et décrit comment on pourrait en principe l'utiliser pour réaliser des opérations de communication et de calcul quantiques. Ces opérations utilisent de systèmes physiques réalisant **les qubits 0 et 1**, éléments de la logique quantique. Au cours des séminaires, un certain nombre de « candidats qubits » ont été présentés: atomes et ions piégés (Grangier, Blatt, Meschede), photons dans des fibres optiques (Zoller, Gisin), circuits supraconducteurs (Estève). Ces séminaires ont montré les progrès récemment accomplis, mais aussi les difficultés que présentent encore la manipulation des qubits dans des situations où la décohérence est négligeable.*

*En fait, seuls certains systèmes en optique quantique, dans lesquels les qubits sont portés par des atomes ou des photons isolés, ont pu réaliser à ce jour de l'intrication de façon contrôlée. Les expériences **d'atomes de Rydberg et de photons micro-onde interagissant dans une cavité supraconductrice** de grande surtension font partie de ces systèmes qui ont permis de réaliser des opérations élémentaires d'information quantique. Le système **atome-cavité**, même s'il ne conduira pas à des applications pratiques, constitue un banc d'essai intéressant pour aborder expérimentalement l'étude de l'information quantique, pour appréhender ses difficultés de mise en œuvre, et pour mesurer toute la distance qu'il y a entre les rêves théoriques et les réalisations pratiques. Les deux dernières leçons de ce cours sont consacrées à une revue des expériences d'information quantique réalisées sur ce système à l'Ecole Normale Supérieure.*

Principe des expériences d'information quantique atome-cavité



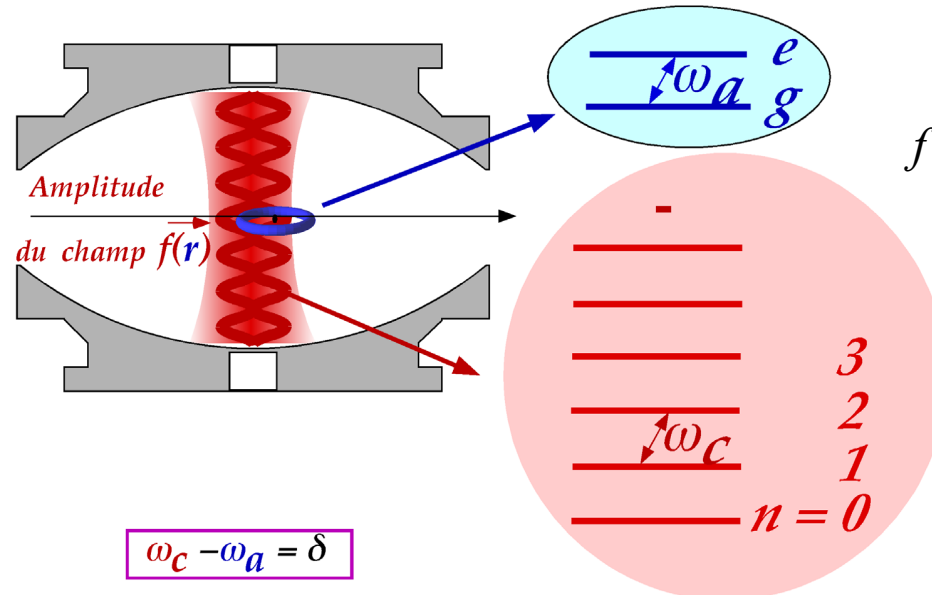
*Des **atomes de Rydberg** très excités traversent un à un une cavité de grand facteur de qualité Q , contenant **0, 1, 2... photons micro-onde**. L'interaction atome-champ crée de l'**intrication**. Les atomes sont détectés après traversée de la cavité par ionisation sélective.*

*Les qubits sont soit les atomes (portés dans un niveau g ou e ou dans une superposition de ces deux états), soit **le champ de la cavité** (dans l'état à **0 ou 1 photon** ou dans une superposition de ces états).*

Parmi les expériences réalisées: préparation d'états non classiques du champ (états à 0, 1, 2 photons...dits états de Fock), intrication programmée atome- champ et atome-atome impliquant deux ou trois qubits, chats de Schrödinger du champ et étude de leur décohérence, expériences de complémentarité....

Le système atome-cavité

**Spin 1/2
couplé à un
oscillateur
harmonique**



$$f(\vec{r}) \approx e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$$

$$\omega_c - \omega_a = \delta$$

Hamiltonien: $H = H_a + H_c + V_{a-c}$

$$H_a = \frac{\hbar \omega_a}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)$$

$$H_c = \frac{\hbar \omega_c}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) = \hbar \omega_c (a^\dagger a + 1/2)$$

$$V_{a-c} = -\vec{D}_a \cdot \vec{E}(r)$$

Dipôle électrique
1000 a.u.

$$\vec{D}_a = d_{eg} |e\rangle\langle g| + d_{eg}^* |g\rangle\langle e|$$

$$\vec{E}(r) = iE_0 (f(\vec{r}) a - f^*(\vec{r}) a^\dagger)$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{\hbar \omega_c}{2\epsilon_0 V_{cav}}} \quad \text{Champ du vide}$$

$$V_{cav} = \int_V |f(\vec{r})|^2 d^3r \quad \text{Volume du mode}$$

Le couplage *atome – champ*

$$V_{a-c} = - \vec{D}_a \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

$$= \frac{i\hbar \Omega(\vec{r})}{2} [\mathbf{a} | e \rangle \langle g | - \mathbf{a}^\dagger | g \rangle \langle e |]$$

(approximation du champ tournant (RWA))
 fréquence de Rabi du vide (supposée réelle):

$$\Omega(\vec{r}) = -2 \vec{d}_{eg} \cdot \vec{E}_0 \vec{f}(\vec{r}) = \Omega_0 \frac{\vec{d}_{eg} \cdot \vec{f}(\vec{r})}{\vec{d}_{eg} \cdot \vec{f}(0)}$$

dépend de la position r de l'atome (variant avec le temps dans la cavité). Ω_0 est la fréquence au centre de la cavité ($r=0$).

Un grand couplage Ω_0 requiert un grand *dipole* (atome de Rydberg) *et un petit volume* (mode d'ordre peu élevé dans la cavité)

Conditions de validité:

du modèle d'atome à 2 niveaux couplé à un seul mode :
 $|\delta| = |\omega_c - \omega_a| \ll \omega_c, \omega_a$

$\delta \ll$ interval spectral de la cavité

de l'approximation RWA:

$$\Omega_0 \ll \omega_c, \omega_a$$

Remarquer l'analogie avec le couplage de deux oscillateurs harmoniques (leçon 3):

$$b^\dagger \rightarrow |e \rangle \langle g |$$

Le système *atome – cavité*: hamiltonien découplé et interaction

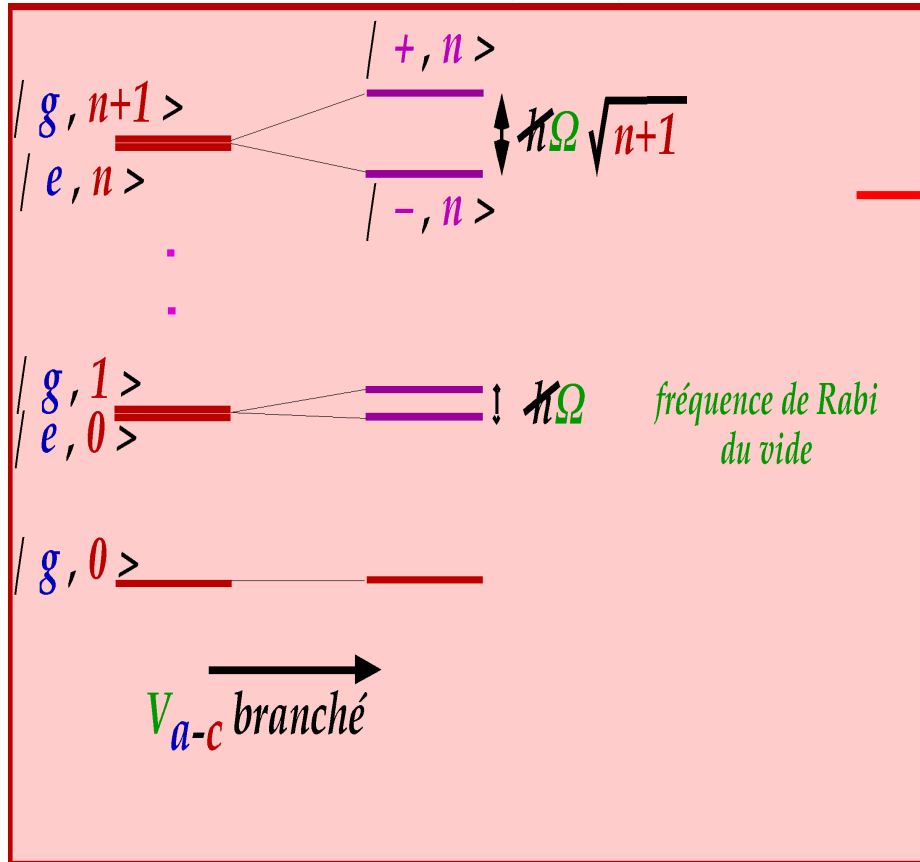
Niveaux d'énergie de $H_a + H_c$	Doublets de niveaux séparés par $\hbar\omega_c$
	<p><i>Couplage dans le n^{ème} doublet:</i></p> $V_{a-c} g, n+1\rangle = \frac{i\hbar\Omega}{2} \sqrt{n+1} e, n\rangle$ $V_{a-c} e, n\rangle = \frac{-i\hbar\Omega}{2} \sqrt{n+1} g, n+1\rangle$ $V_{a-c} g, 1\rangle = \frac{i\hbar\Omega}{2} e, 0\rangle$ $V_{a-c} e, 0\rangle = \frac{-i\hbar\Omega}{2} g, 1\rangle$ <p><i>Etat fondamental non couplé</i></p> $V_{a-c} g, 0\rangle = 0$

La diagonalisation de V_{a-c} est un problème à 2 niveaux dans le sous-espace $|g, n+1\rangle, |e, n\rangle$:
 ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$H = (n+1)\hbar\omega_c + \hbar/2 \begin{bmatrix} |g, n+1\rangle & |e, n\rangle \\ \delta & -i\Omega\sqrt{n+1} \\ i\Omega\sqrt{n+1} & -\delta \end{bmatrix} \begin{matrix} |g, n+1\rangle \\ |e, n\rangle \end{matrix} \rightarrow \delta \sigma_z + \Omega\sqrt{n+1} \sigma_y$$

Le système « habillé » atome-cavité

Diagramme d'énergie dans le cas résonnant ($\delta = 0$)



valeurs propres $E_{\pm, n} = \pm \frac{\hbar\Omega}{2}\sqrt{n+1}$

Etats Propres $|\pm, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |e, n\rangle \mp i |g, n+1\rangle \}$

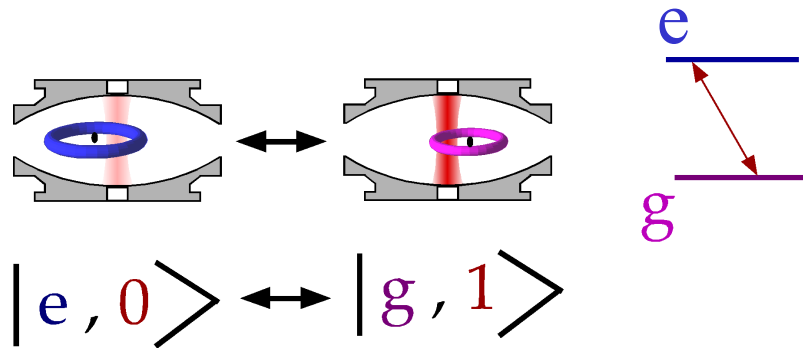
Diagonalisation exacte $\forall \delta$ des matrices 2x2 dans le cadre RWA

Si $\delta \gg \Omega$, les énergies et états propres peuvent aussi se développer de façon perturbative en puissance de Ω/δ .

Quand l'atome traverse la cavité, $\Omega(r)$ varie et les états et valeurs propres suivent de façon adiabatique (δ non strictement nul)

Forces Atome-cavité qui peuvent affecter le mouvement de l'atome, même dans le vide (couplage entre $|e, 0\rangle$ and $|g, 1\rangle$)

Oscillation de Rabi quantique



Emission et absorption réversible de photon

Plus généralement:

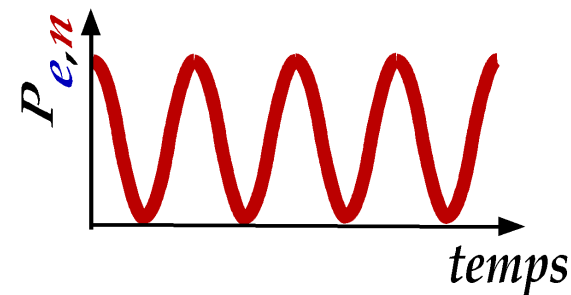
$$|e, n\rangle \leftrightarrow |g, n+1\rangle$$

Evolution du système initialement ($t = 0$) dans l'état $|e, n\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2}t\right) |e, n\rangle - \sin\left(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2}t\right) |g, n+1\rangle$$

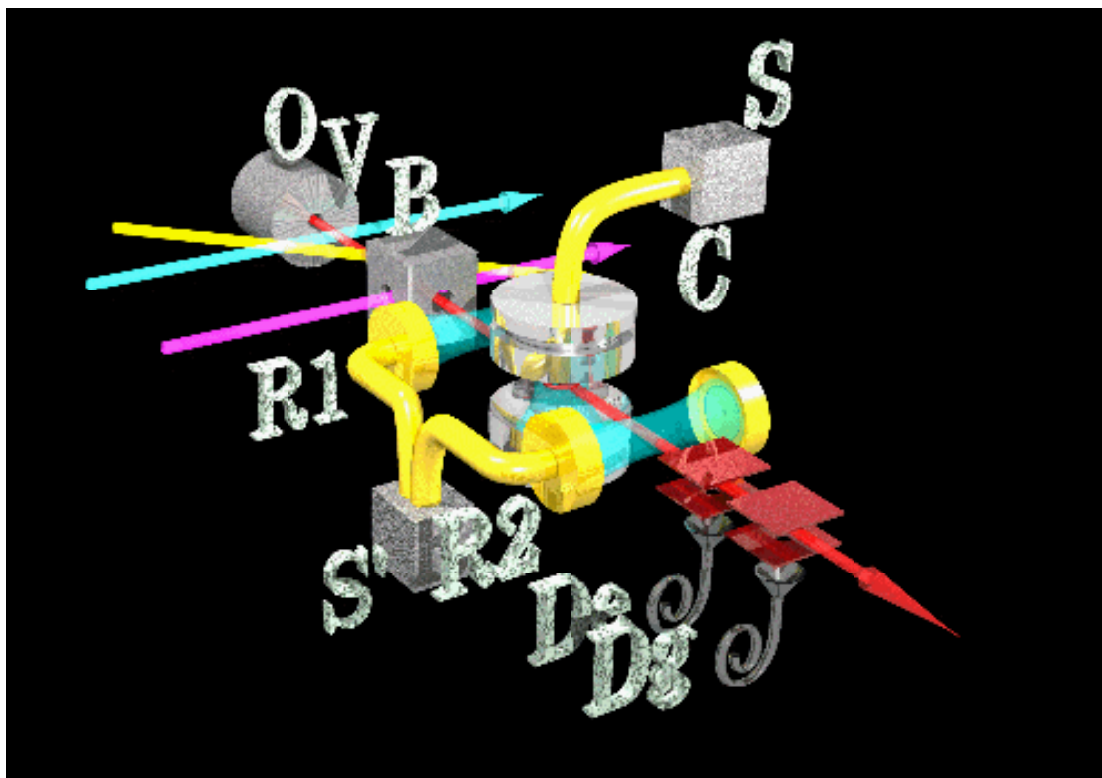
Atome et champ de la cavité en général intriqués

Probabilité de trouver l'atome à l'instant t dans l'état e , avec n photons dans la cavité



Oscillation liée directement à la séparation des niveaux dans chaque doublet: battements quantiques de l'atome « habillé ».

L 'appareil expérimental



Pour approcher expérimentalement les conditions idéales de l 'électrodynamique en cavité, il faut minimiser le taux de relaxation de l 'atome et du champ et optimiser le couplage atome-champ

$$1/T_{at} \quad 1/T_{cav} \ll \Omega \quad \text{condition de couplage fort}$$

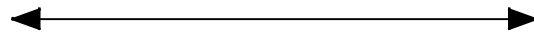
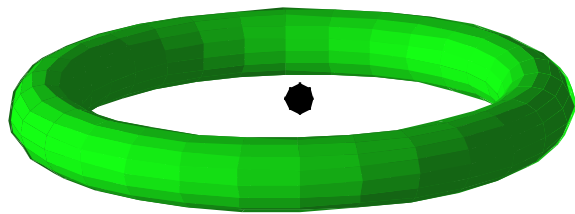
*Condition réalisée dans le domaine micro-onde en couplant des **atomes de Rydberg circulaires** à des **cavités en niobium supraconducteur***

$$1/T_{at} = 0,03 \text{ kHz}; \quad 1/T_{cav} = 1 \text{ kHz}; \quad \Omega / 2\pi = 50 \text{ kHz}$$

Atomes de Rydberg circulaires

Etats de grand nombre quantique principal n et de moment angulaire maximal égal à $n-1$ le long de l'axe de quantification.

$$n = 51$$



Grande orbite circulaire

Couplage très fort aux micro-ondes

Longue durée de vie radiative (30ms)

Niveaux accordables par effet Stark

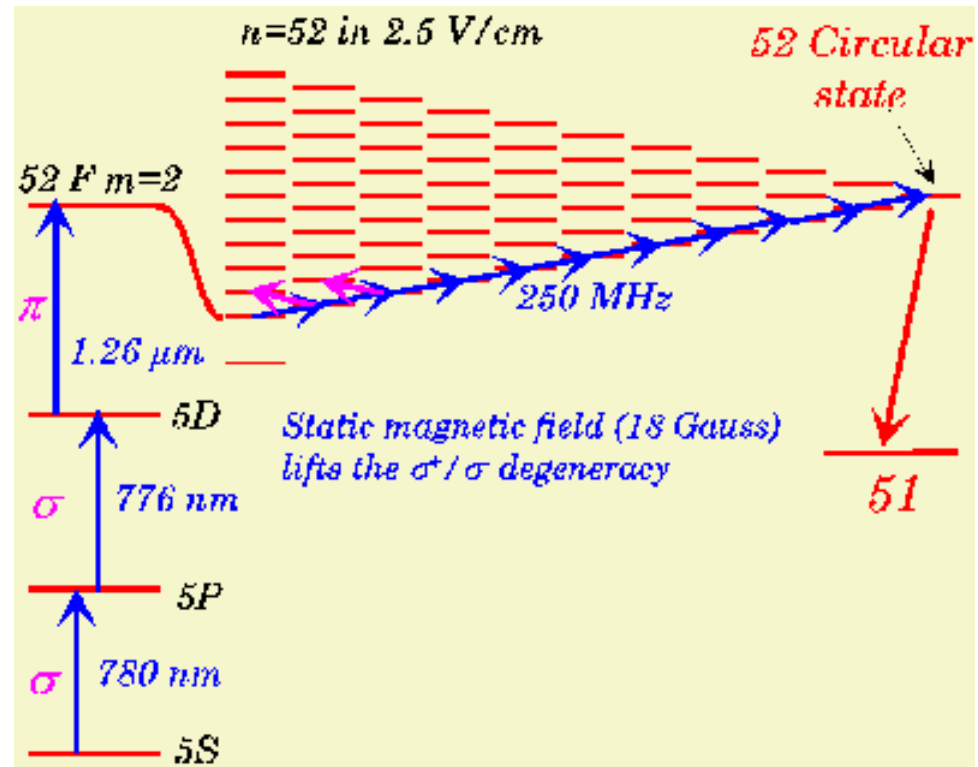
Détection sélective facile par ionisation

Etats préparés dans des champs électriques et magnétiques statiques par une séquence d'impulsions de champs laser et de radiofréquence faisant absorber un grand nombre de photons à l'atome suivant un processus adiabatique

En contrôlant l'intensité du premier pulse laser, on prépare en moyenne ~ 0.3 atome par pulse, avec une distribution de Poisson:

$$P(0) = 0.74; P(1) = 0.22; P(2) = 0.045 \dots$$

Événement utile



Contrôle du temps d'interaction atome-cavité: sélection de la vitesse atomique par pompage optique

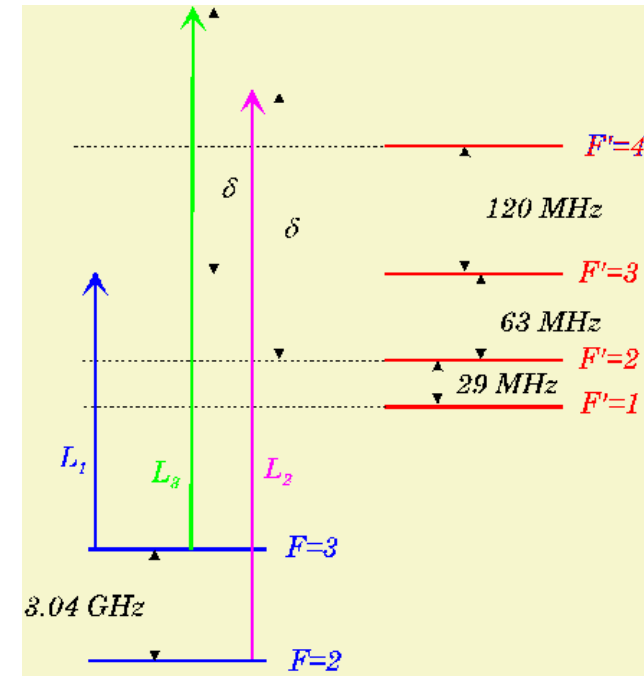
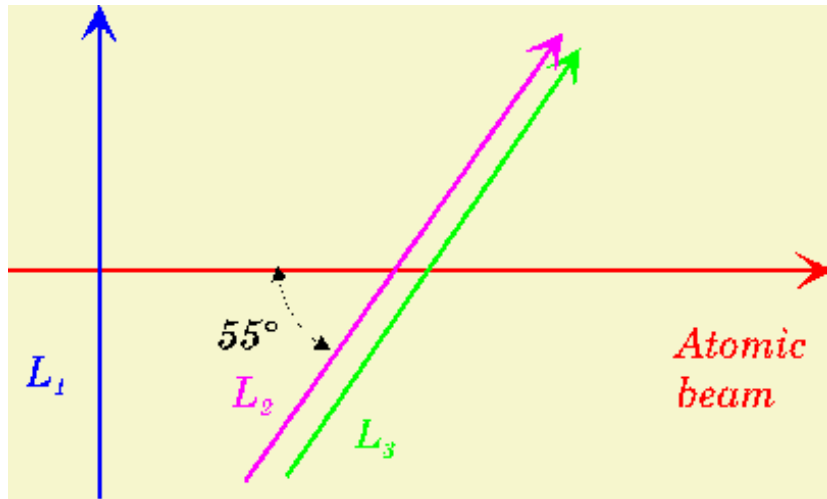
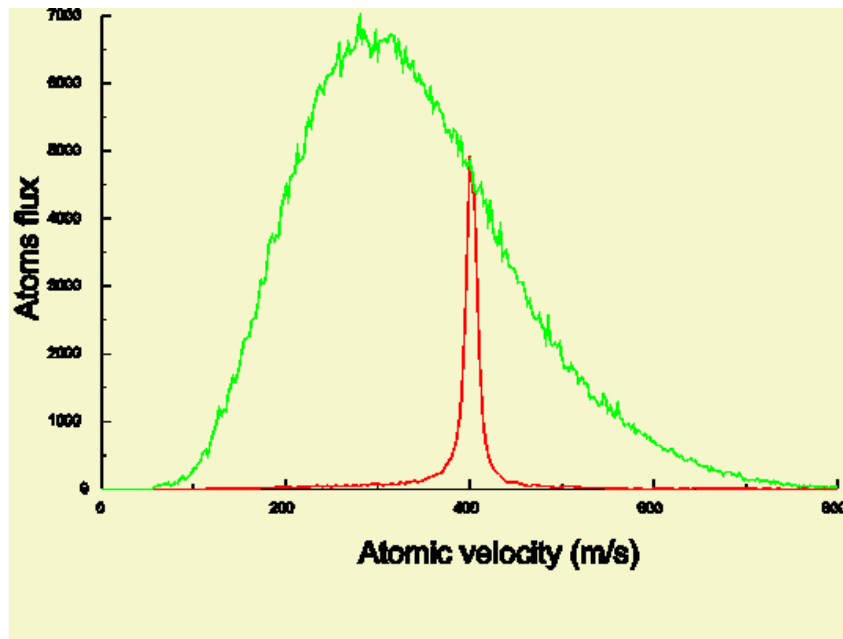
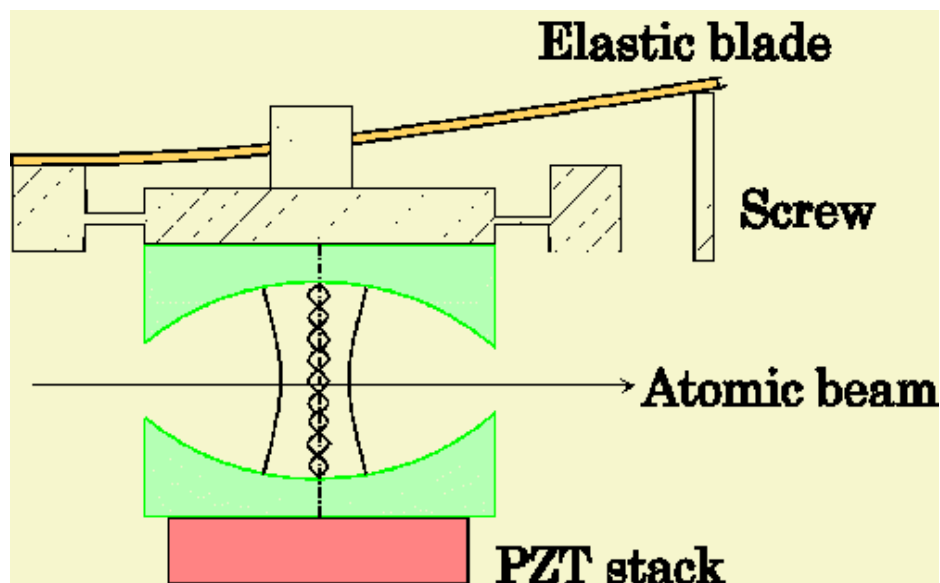


Diagramme des niveaux du Rubidium montrant les transitions impliquées dans la dépopulation et la repopulation sélective en vitesse de l'état hyperfin $F = 3$



En vert, distribution de vitesse avant pompage, en rouge distribution des atomes pompés dans le niveau $F=3$, avant leur excitation dans l'état de Rydberg circulaire

La Cavité Fabry-Perot supraconductrice



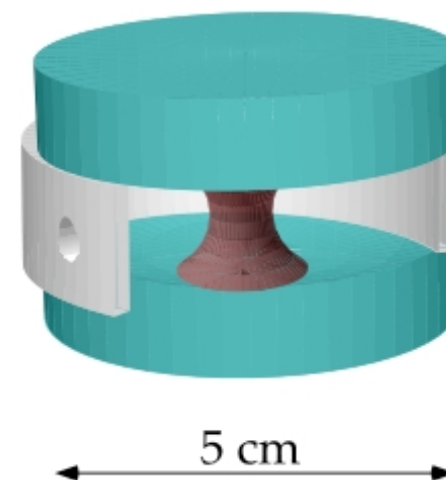
Mode gaussien avec un diamètre de 6mm

Grand champ par photon (1,5mV/m)

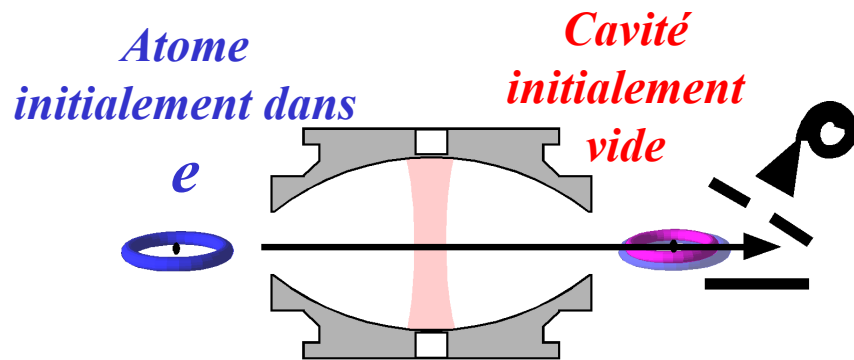
Grande durée de vie du champ (1ms) allongée par l'anneau autour des miroirs

Accord en fréquence facile

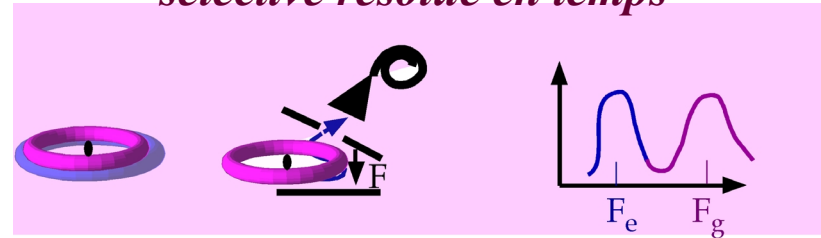
Faible champ thermique ($< 0,1$ photon)



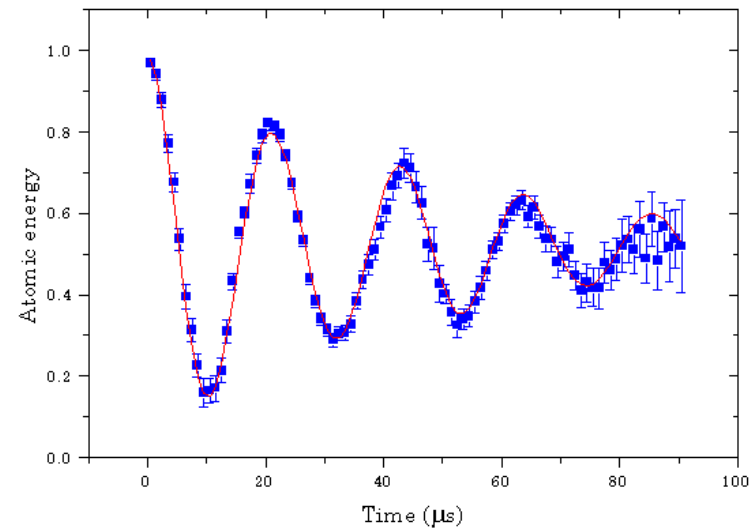
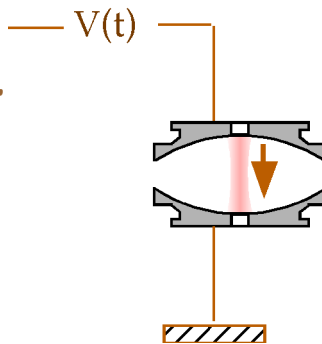
Oscillation de Rabi dans le champ du vide



Atomes détectés par D par ionisation sélective résolue en temps



Champ électrique $F(t)$ utilisé pour accorder par effet Stark la transition atomique avec le mode, ce qui permet de changer à volonté le temps effectif d'interaction atome-champ.

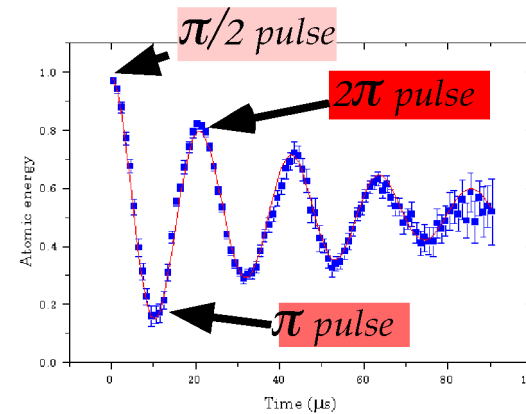


$P_e(t)$ obtenu en moyennant un grand nombre de réalisations de l'expérience.

Amortissement de l'oscillation due à la relaxation et à diverses imperfections du montage

Impulsions de Rabi utiles pour la manipulation des qubits

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) |e, 0\rangle - \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) |g, 1\rangle$$



$$\Omega t = \pi/2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |e, 0\rangle - |g, 1\rangle \right\}$$

*Intrication **atome-photon** et corrélations non locales entre l'atome et la cavité (EPR)*

$$\Omega t = \pi$$

$$|e, 0\rangle \longrightarrow -|g, 1\rangle$$

*Echange d'excitation entre l'**atome** et le **champ** et copie de qubits d'un système à l'autre*

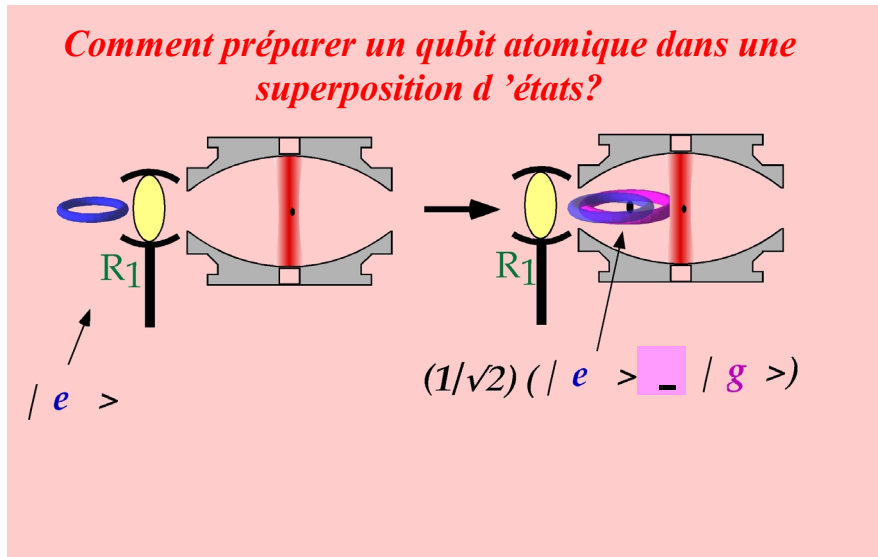
$$\Omega t = 2\pi$$

$$|e, 0\rangle \longrightarrow -|e, 0\rangle; |g, 1\rangle \longrightarrow -|g, 1\rangle$$

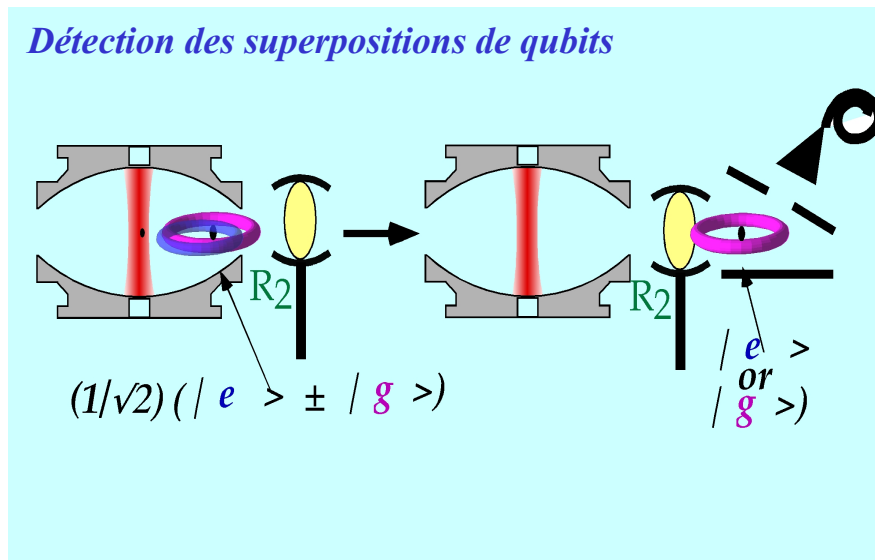
*Cycle complet d'oscillation de Rabi ramenant le système dans l'état initial **avec changement de phase de π** (analogie avec le problème des deux pendules couplés de la leçon 3)*

Préparation et analyse des superpositions d'états de qubits

La possibilité de préparer et d'analyser des superpositions de qubits est un ingrédient essentiel de la logique quantique



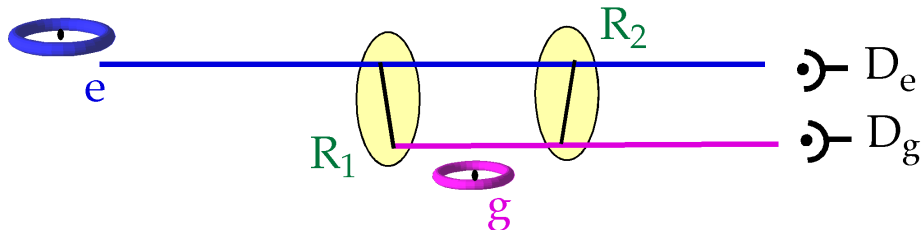
Une micro-onde classique appliquée en R_1 transforme, avant C , l'état e dans une superposition de e et g



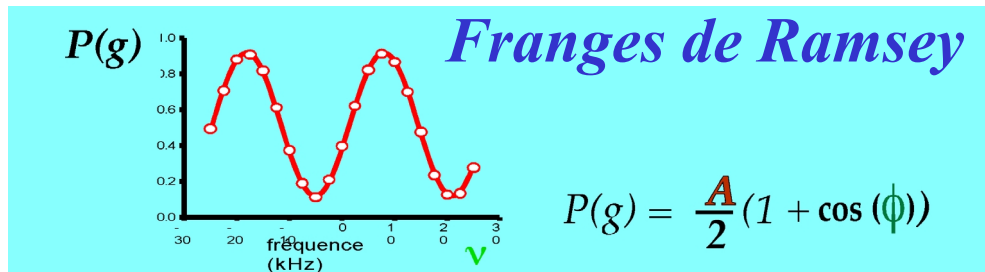
Un pulse classique R_2 retransforme, après C et avant la détection, la superposition avec les signes + ou - en e ou g : l'ionisation ultérieure revient à la détection des superpositions d'états

R_1 et R_2 jouent le rôle de transformations de Hadamard

Analyse des superpositions d'états de qubits atomiques par interférométrie de Ramsey



Les pulses micro-onde « séparent » les états atomiques (R_1) et les recombinent (R_2) à deux instants différents: l'atome suit deux « chemins » et la probabilité de le détecter en e ou g présente des variations sinusoïdales (franges) lorsque la phase relative entre les deux chemins est balayée (par exemple en variant la fréquence ν des micro-ondes)



Dans la dernière version du montage, R_1 et R_2 sont à l'intérieur de l'anneau de la cavité

Le champ de la cavité affecte de façons différentes l'atome dans les deux « voies » de l'interféromètre: la phase ϕ et le contraste A des franges est modifié: ceci fournit une information intéressante sur l'interaction atome-cavité

Différence entre les impulsions «classiques» dans R_1 , R_2 et l'oscillation de Rabi quantique dans C

Les impulsions dans R_1 et R_2 sont produites par des champs dans des modes de faible facteur de qualité, dont les photons sont « recyclés » très rapidement, en un temps très court devant le temps d'évolution atomique. Ces champs ne peuvent s'intriquer avec l'atome, contrairement au **champ de C dont le temps d'amortissement est très long**. C'est pour cela que l'on peut considérer que les champs de R_1 et R_2 sont **classiques**. Leur effet est simplement de **préparer l'atome dans une superposition d'états (opérations à un seul qubit)**, alors que l'**interaction avec le champ quantique de C crée de l'intrication et permet, comme nous le montrons plus loin, de réaliser des portes à deux qubits**.

Autre façon de réaliser un champ «classique» vis à vis de l'intrication atome-champ: utiliser un champ cohérent avec $\alpha \gg 1$, contenant un grand nombre de photons (en moyenne $\bar{n} = |\alpha|^2$, avec une dispersion en $\pm\sqrt{\bar{n}}$, voir leçon n°3). Même si ce champ ne s'amortit pas, son intrication avec l'atome est négligeable:

$$|e, \alpha\rangle \rightarrow \sum_n C_n [\cos(\Omega \sqrt{n+1} t/2) |e, n\rangle - \sin(\Omega \sqrt{n+1} t/2) |g, n+1\rangle = (1/\sqrt{2}) [|e\rangle | \alpha_e \rangle - |g\rangle | \alpha_g \rangle]$$

Avec: $| \alpha_e \rangle = (\sqrt{2}) \sum_n C_n \cos(\Omega \sqrt{n+1} t/2) |n\rangle$; $| \alpha_g \rangle = (\sqrt{2}) \sum_n C_{n-1} \sin(\Omega \sqrt{n} t/2) |n\rangle$

Pour un pulse tel que $\Omega \sqrt{\bar{n}} t = \pi/2$, on a $| \alpha_e \rangle \sim | \alpha_g \rangle \sim | \alpha \rangle = \sum_n C_n |n\rangle$ et:

$$|e, \alpha\rangle \rightarrow (1/\sqrt{2}) [|e\rangle - |g\rangle] \otimes | \alpha \rangle \rightarrow \text{pas d'intrication}$$

Lorsque l'atome interagit avec un champ cohérent de faible amplitude couplé fortement à un réservoir, ou bien avec un champ contenant un grand nombre de photons dans un état cohérent, la situation peut être considérée comme classique: l'oscillation de Rabi prépare des superpositions d'états atomiques pratiquement non intriquées avec ce champ. Voir dernière leçon.