Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

CONJECTURE DES HAUTES SIGNATURES DE NOVIKOV ; LE CAS HYPERBOLIQUE

Le sujet de mon cours cette année était la conjecture des hautes signatures de Novikov et la démonstration que H. Moscovici et moi-même avons donné de cette conjecture dans le cas hyperbolique.

I. *Formulation du problème*

Un groupe discret Γ vérifie la conjecture de Novikov si pour toute classe de cohomologie $\omega \in H^*(B\Gamma,\mathbb{C})$, la quantité suivante, appelée haute signature, est un invariant homotopique du couple (M,φ), où M est une variété compacte orientée et $\varphi : M \rightarrow B\Gamma$ une application continue :

$$\mathrm{Sign}_\omega(M,\varphi) = < L(M)\ \varphi^*(\omega),\ [M] >$$

Ici $B\Gamma$ désigne l'espace classifiant de Γ, L(M) le genre L de la variété M i.e. la suite multiplicative de polynômes associée à la série $\sqrt{t}/\mathrm{th}(\sqrt{t})$. On a $L_1 = 1/3p_1$, $L_2 = 1/45\ (7p_2 - p_1^2)$... où les p_i sont les classes de Pontrjagin.

Le problème général de la conjecture de Novikov se ramène aux groupes de présentation finie, i.e. donnés par un nombre fini n de générateurs $g_1, \ldots, g_n$ et un nombre fini m de relations $\omega_1, \ldots, \omega_m$. Nous démontrons en utilisant comme outil principal la cohomologie cyclique de l'algèbre $\mathbb{C}\Gamma$ du groupe Γ que tout groupe *hyperbolique* (au sens de Rips et Gromov) vérifie la conjecture de Novikov. Les groupes hyperboliques sont définis par une inégalité portant sur la métrique $d(g_1,g_2) = \ell(g_1^{-1}g_2)$ où ℓ désigne la longueur des mots pour un système de générateurs donné. Cette inégalité ne dépend pas du choix du système (fini) de générateurs et suppose l'existence de δ tel que $(\alpha,\beta) \geqslant \inf((\alpha,\gamma), (\beta,\gamma)) - \delta\ \forall \alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ où $(\alpha,\beta) = \ell(\alpha) + \ell(\beta) - \ell(\alpha^{-1}\beta)$.

M. Gromov a démontré un très grand nombre de propriétés importantes de la classe des groupes hyperboliques, par exemple il suffit d'avoir des conditions combinatoires très simples sur un polyhèdre pour savoir que son groupe fondamental est hyperbolique. De plus si l'on fixe le nombre n de générateurs et m de relations et que l'on compte la proportion des groupes hyperboliques en imposant une borne supérieure ℓ à la longueur des relations $\omega_1, \ldots, \omega_m$; cette proportion tend vers 1 quand $\ell \to \infty$.

Enfin toute variété orientée compacte M est cobordante à une variété orientée compacte N dont le groupe fondamental est hyperbolique. On peut de plus choisir ce cobordisme compatible avec une application $\psi : M \to B\Gamma$ de sorte que $\mathrm{Sign}_\omega(M) = \mathrm{Sign}_\omega(N)$. Ceci montre que la cohomologie des groupes hyperboliques est suffisamment riche pour donner toutes les valeurs des hautes signatures. Techniquement nous utilisons deux conséquences de l'hyperbolicité. D'une part toute classe de cohomologie $\omega \in H^*(B\Gamma,\mathbb{C})$ est représentée par un cocycle borné (résultat de M. Gromov). D'autre part on peut construire une algèbre $\mathcal{S}$ intermédiaire entre l'algèbre du groupe $\mathbb{C}\Gamma$ et la C^* algèbre du groupe $C^*(\Gamma)$, qui adapte à cette situation la construction de l'espace de Schwartz d'Harisch Chandra pour les groupes de Lie semi-simples. Cela utilise les inégalités de Haagerup qui se prolongent grâce aux travaux de P. Jolissaint et P. de la Harpe aux groupes hyperboliques.

II. *Indice local d'un opérateur elliptique et cochaînes d'Alexander-Spanier*

Soient M une variété compacte et $D : C^\infty(M,E^+) \to C^\infty(M,E^-)$ un opérateur différentiel elliptique sur M, où $E^\pm$ sont des fibrés vectoriels complexes de classe C^∞. L'existence d'une parametrix Q pour D, (i.e. d'un opérateur pseudodifférentiel $Q : C^\infty(M,E^-) \to C^\infty(M,E^+)$ tel que $QD - 1$ et $DQ - 1$ soient régularisants) montre que D définit canoniquement un élément inversible dans l'algèbre $M(J)/J$ où J est l'algèbre des opérateurs régularisants, et $M(J)$ l'algèbre des multiplicateurs de J. A l'aide de supplémentaires $E'_\pm$ de $E_\pm$, tels que $E_\pm \oplus E'_\pm$ soient triviaux, on définit ainsi un élément de $K_1(M(J)/J)$ où J est l'algèbre $C^\infty(M \times M)$ des opérateurs régularisants $k : C^{-\infty}(M) \to C^\infty(M)$. L'élément correspondant de $K_0(J)$, obtenu grâce à la suite exacte :

$$O \to J \to M(J) \to M(J)/J \to O$$

est donné par la classe réduite de l'idempotent suivant :

$$P = \begin{bmatrix} S_0^2 & S_0(1 + S_0)\,Q \\ S_1 D & 1 - S_1^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

où on pose :

$$S_0 = 1 - QD, \; S_1 = 1 - DQ$$

Ici l'algèbre J est indépendante (à isomorphisme près) de la variété M et sa K théorie est donnée par $K_0(J) = \mathbb{Z}$, la trace $\mathrm{Trace}(k) = \int k(x,x)\,dx$ donnant l'isomorphisme : $K_0(J) \simeq \mathbb{Z}$. De plus la classe $[P] \in K_0(J) = \mathbb{Z}$ est l'indice analytique de D donnée par le théorème de l'indice d'Atiyah Singer.

En fait, on peut pour tout entourage $\mathcal{U}$ i.e. tout voisinage $\mathcal{U}$ de la diagonale Δ de $M \times M$, trouver une parametrix Q de D à support dans $\mathcal{U}$ $(Q(x,y) = 0\ \forall\ (x,y) \notin \mathcal{U})$. On obtient ainsi grâce à cette localisation, une information plus précise, classe de K théorie dans une algèbre d'opérateurs régularisants asymptotiques, $R_t \in J$, $\mathrm{Supp}\, R_t \to \Delta$. Sans chercher à définir trop précisément cette algèbre, montrons comment accoupler la classe de K théorie de D avec une classe de cohomologie d'Alexander Spanier $[\omega] \in H^*(M,\mathbb{C})$.

Une n-cochaîne d'Alexander Spanier est une fonction de $n + 1$ variables, $\varphi\,(x^0,.,x^n)$ où $x^i \in M$, dont le cobord est $(\delta\varphi)\,(x^0,.,x^{n+1}) = \Sigma\,(-1)^j\varphi(x^0,.,\check{x}^j,.,x^{n+1})$.

La cohomologie d'Alexander Spanier (isomorphe à la cohomologie usuelle), s'obtient en quotientant le complexe des cochaînes arbitraires (resp. boréliennes bornées ; resp. de classe C^∞) par la relation $\varphi_1 \sim \varphi_2$ ssi $\varphi_1 - \varphi_2$ s'annule dans un voisinage de la diagonale $(x,.,x) \subset M^{n+1}$. Pour obtenir l'accouplement cherché on remarque que pour toute cochaîne d'Alexander Spanier φ, borélienne bornée, l'égalité suivante définit une forme $n + 1$ linéaire τ_φ sur J :

$$\tau_\varphi(k^0,.,k^n) = \int_{M^{n+1}} k^0(x^0,x^1)\,k^1(x^1,x^2)\ldots\,k^n(x^n,x^0)\,\varphi(x^0,.,x^n) \tag{2}$$

où les k^i sont des 1/2 densités dans leurs 2 variables. De plus, si φ est normalisée (i.e. nulle si $x^i = x^j$ pour un $i \neq j$) et si $\delta\varphi = 0$ dans le voisinage $\{(x^i)_{i=0,.,n+1}\ (x^i,x^{i+1}) \in \mathcal{U}\ \forall\ i\}$ on a les propriétés suivantes des cocycles cycliques :

a) $\tau_\varphi(k^1,.,k^n,k^0) = (-1)^n\,\tau_\varphi(k^0,.,k^n)\ \forall\ k^i \in J,\ \mathrm{Supp}\,k^i \subset \mathcal{U}$

b) $\Sigma(-1)^j\,\tau_\varphi(k^0,.,k^jk^{j+1},.,k^{n+1}) + (-1)^{n+1}\,\tau_\varphi(k^{n+1}k^0,.,k^n) = 0$
$\forall\ k^i \in J,\ \mathrm{Supp}\,k^i \subset \mathcal{U}$

On peut alors utiliser les résultats standards pour vérifier que la valeur $\tau_\varphi(P_\mathcal{U},.,P_\mathcal{U})$, où $P_\mathcal{U}$ est donné par la formule (1) appliquée à une parametrix Q à support dans $\mathcal{U}$, ne dépend que de l'opérateur D et de la classe de cohomologie $[\varphi] \in H^n(M,\mathbb{C})$, n pair. Nous noterons $\mathrm{Ind}_\varphi(D) = \tau_\varphi(P_\mathcal{U},.,P_\mathcal{U})$; (avec la convention usuelle d'extension de τ_φ aux matrices sur l'algèbre $\tilde{J}$ obtenue en adjoignant une unité à J : $\tilde{\tau}_\varphi(m^0 \otimes k^0,.,m^n \otimes k^n) = \mathrm{Trace}\,(m_0 \ldots m_n)\ \tilde{\tau}_\varphi(k^0,\ldots,k^n)$ pour $m^j \in M_q(\mathbb{C}), k^j \in \tilde{J}$ et $\tilde{\tau}_\varphi(k^j + \lambda^j 1) = \tilde{\tau}_\varphi(k^j)$ pour $k^j \in J, \lambda_j \in \mathbb{C}$.)

Cet indice local $\mathrm{Ind}_\varphi(D)$ ne dépend que de la classe d'homotopie stable du symbole de D et se calcule par le raffinement suivant du théorème de l'indice d'Atiyah Singer :

Théorème 3. — Soient M une variété compacte, $D : C^\infty(M,E^+) \to C^\infty(M,E^-)$ un opérateur différentiel elliptique sur M, et $\varphi \in H^{2q}(M,\mathbb{C})$ une classe de cohomologie (d'Alexander Spanier). On a alors :

$$\mathrm{Ind}_\varphi(D) = \frac{1}{(2\pi i)^q} \frac{q!}{(2q)!} < \mathrm{ch}_*(D),\varphi >$$

Ici $\mathrm{Ch}_* D \in H_*(M,\mathbb{C})$ désigne le caractère de Chern de D en K homologie, qu'il suffit de préciser lorsque $D = \partial_E$ est un opérateur de Dirac à coefficient dans un fibré vectoriel complexe E. On a alors $\mathrm{ch}_*(\partial_E) = \hat{A}(M)\,\mathrm{ch}\,E.[M]$ où $\hat{A}(M)$ est le genre $\hat{A}$ de M.

Remarque 4.

1) Notre démonstration prouve en fait un résultat au niveau des formes différentielles, plus précis que le résultat cohomologique ci-dessus.

2) Nous montrons le lien entre le théorème 3, et en particulier les constantes $q!/(2q)!$ qui y interviennent et la cohomologie cyclique entière.

III. *Théorème de l'indice pour les revêtements*

Soient M une variété compacte, $\tilde{M}$ l'espace total d'un fibré Γ principal de base M, où Γ désigne un groupe discret. Notons $\pi : \tilde{M} \to M$ la projection de $\tilde{M}$ sur M et $(g,x) \to gx$ l'action de Γ sur $\tilde{M}$. Dans cette section nous montrons un analogue, pour des cocycles arbitraires $c \in H^*(\Gamma,\mathbb{C})$, du théorème de l'indice L^2 d'Atiyah et Singer, cas particulier où $c \in H^0(\Gamma,\mathbb{C})$. Rappelons d'abord que tout cocycle de groupe $c \in Z^n(\Gamma,\mathbb{C})$; $c(g^1,..,g^n) \in \mathbb{C}$, $\forall g^i \in \Gamma$, normalisé (i.e. $c(g^1,..,g^n) = 0$ si l'un des g^i vaut 1 ou si $\prod_1^n g^i = 1$) définit un cocyle τ_c sur l'algèbre du groupe $\mathbb{C}\Gamma$, par l'égalité suivante :

$$(5) \qquad \tau_\varphi(a^0,..,a^n) = \sum_{g^0 g^1 . g^n = 1} a^0(g^0)a^1(g^1) \ldots a^n(g^n)\, c(g^1, \ldots, g^n)$$

Soit alors $\tilde{D}$ un opérateur différentiel elliptique Γ invariant sur $\tilde{M}$, $\tilde{D} : C^\infty(\tilde{M},\tilde{E}^+) \to C^\infty(\tilde{M},\tilde{E}^-)$ où $\tilde{E}^\pm$ sont les fibrés $\pi^*(E^\pm)$ sur $\tilde{M}$ associés aux fibrés vectoriels complexes $E^\pm$ sur M. On ne peut définir directement l'indice Γ-équivariant de $\tilde{D}$ comme un élément de $K_0(\mathbb{C}\Gamma)$ car ce groupe est en général trop réduit. On peut par contre définir cet indice comme élément de $K_0(\ell\Gamma)$, où $\ell\Gamma$ est le produit tensoriel *algébrique* de $\mathbb{C}\Gamma$ par l'algèbre ℓ des opérateurs traçables dans l'espace de Hilbert à base dénombrable.

Commençons par utiliser l'existence d'une parametrix Q,Γ invariante, pour $\tilde{D}$ telle que les noyaux régularisants S_0 et S_1 définis par $S_0 = 1 - Q\tilde{D}$, $S_1 = 1 - \tilde{D}Q$ soient à support compact dans $\tilde{M} \times_\Gamma \tilde{M}$, quotient de $\tilde{M} \times \tilde{M}$ par l'action de Γ. L'algèbre $\mathcal{A}$ de ces noyaux régularisant s'identifie à l'algèbre de convolution $C_c^\infty(G)$ du groupoide différentiable $G = \tilde{M} \times_\Gamma \tilde{M}$ où $G^{(0)} = M$ et les applications source et but sont donnés par :

α) $s(\tilde{x},\tilde{y}) = \pi(\tilde{y})$, β) $r(\tilde{x},\tilde{y}) = \pi(\tilde{x})$ et la composition par

γ) $(\tilde{x},\tilde{y}) \,.\, (\tilde{y},\tilde{z}) = (\tilde{x},\tilde{y})$. Il résulte donc de l'existence de Q et de la formule (1), que l'on peut associer canoniquement à $\tilde{D}$ une classe de K théorie $[\tilde{D}] \in K_0(C_c^\infty(G))$. Pour obtenir l'indice Γ-équivariant $\mathrm{Ind}_\Gamma(\tilde{D}) \in K_0(\ell\Gamma)$ on utilise le résultat suivant :

Lemme 6. — Soient $U \subset \tilde{M}$ un domaine fondamental relativement compact pour l'action de Γ dans $\tilde{M}$ et $\beta : M \to \tilde{M}$ la section borélienne correspondante de $\pi : \tilde{M} \to M$.

a) L'application $(\tilde{x},\tilde{y}) \to g^{-1}g'$ où $\tilde{x} = g(\beta\pi\tilde{x})$, $\tilde{y} = g'(\beta\pi\tilde{y})$ définit un homomorphisme ρ de G dans Γ.

b) L'application $(\tilde{x},\tilde{y}) \to ((\pi\tilde{x},\pi\tilde{y}), \rho(\tilde{x},\tilde{y}))$ définit un isomorphisme borélien du groupoide G avec le groupoide $(M \times M) \times \Gamma$.

c) L'isomorphisme b) définit un homomorphisme θ de $C_c^\infty(G)$ dans le produit tensoriel algébrique $\ell \otimes \mathbb{C}\Gamma$ de l'algèbre des opérateurs traçables dans $L^2(M)$ par l'algèbre $\mathbb{C}\Gamma$ du groupe $\mathbb{C}\Gamma$.

d) La flèche $\theta_* : K_0(C_c^\infty(G)) \to K_0(\ell\Gamma)$ est indépendante du choix du domaine fondamental U.

On définit alors l'indice Γ-équivariant $\mathrm{Ind}_\Gamma(D)$ comme la valeur commune des $\theta_*([D]) \in K_0(\ell\Gamma)$.

Remarque 7. — Soit $\mathcal{S}$ l'algèbre des matrices $(a_{ij}),a_{ij} \in \mathbb{C}$ qui sont à décroissance rapide, i.e. $|\,i\,|^k\,|\,j\,|^l\,|\,a_{ij}\,|$ borné $\forall k,\ell$. On peut montrer que $\theta_*([D]) \in K_0(\mathcal{S}\Gamma)$, où $\mathcal{S}\Gamma \subset \ell\Gamma$ est la sous algèbre de $\ell\Gamma$ correspondant à l'inclusion $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1(\ell^2(\mathbb{N})) = \ell$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de l'indice Γ-équivariant :

Théorème 8. — Soit $\tilde{D}$ un opérateur elliptique Γ invariant sur $\tilde{M}$ et soit $c \in H^{2q}(\Gamma,\mathbb{C})$ un cocycle de groupe. On a :

$$< \tau_c \# \mathrm{Trace}, \mathrm{Ind}_\Gamma(\tilde{D}) > = \frac{1}{(2\pi i)^q}\frac{q!}{(2q)!} < \mathrm{Ch}_*(D), \psi^*(c) >$$

où τ_c # Trace désigne le cocycle cyclique sur $\ell\Gamma$ produit tensoriel de τ_c par la trace sur ℓ, où $\mathrm{Ch}_*(D)$ désigne le caractère en homologie de l'opérateur elliptique sur M associé à $\tilde{D}$, et où $\psi : M \to B\Gamma$ désigne l'application classifiante de $\tilde{M}$.

La démonstration du théorème est une conséquence immédiate du théorème 3 et de l'isomorphisme local naturel entre les groupoides différentiables G et $M \times M$.

IV. *Le théorème des hautes signatures pour les groupes hyperboliques*

Soient M une variété compacte orientée de dimension paire, $\tilde{M}$ l'espace total d'un Γ fibré principal de base M. Soient D l'opérateur de signature sur M et $\tilde{D}$ l'opérateur Γ-invariant correspondant sur $\tilde{M}$. Le théorème 8 appliqué à un cocycle de groupe $c \in H^{2q}(\Gamma,\mathbb{C})$ montre que :

$$< \tau_c \# \mathrm{Trace}, \mathrm{Ind}_\Gamma(\tilde{D}) > = \frac{1}{(2\pi i)^q} \frac{q!}{(2q)!} < \mathrm{Ch}_*(D), \psi^*(c) >$$

où le terme de droite est proportionnel à $\mathrm{Sign}_c(M,\varphi)$ (cf(0)), $\varphi : M \to B\Gamma$ étant l'application classifiante.

Il suffirait de savoir que $\mathrm{Ind}_\Gamma(\tilde{D}) \in K_0(\ell\Gamma)$ est invariant par homotopie pour avoir une réponse suffisante générale à la conjecture de Novikov. Par les résultats de Wall et Miscenko, la signature Γ-équivariante définit un invariant d'homotopie, élément du groupe de Witt de $\mathbb{C}\Gamma$. Il en résulte alors que l'élément $j_*\mathrm{Ind}_\Gamma(\tilde{D}) \in K_0(k \otimes C_r^*(\Gamma))$ est un invariant d'homotopie, où j est l'injection naturelle de $\ell \otimes \mathbb{C}\Gamma$ dans le produit tensoriel $k \otimes C_r^*(\Gamma)$ de la C* algèbre des opérateurs compacts par la C* algèbre réduite du groupe Γ. Tout le problème consiste alors à montrer que l'accouplement de $K_0(\ell\Gamma)$ avec $\tau_c \# \mathrm{Trace}$ se prolonge à $K_0(k \otimes C_r^*(\Gamma))$. Nous démontrons cela pour les groupes hyperboliques, en utilisant :

1) L'existence d'un cocycle *borné* : $|c(g^1,..,g^{2q})| \leq C \ \ \forall g^i \in \Gamma$ dans toute classe de cohomologie $\omega \in H^{2q}(\Gamma,\mathbb{C})$, résultat de M. Gromov.

2) L'existence d'une sous algèbre $B \subset k \otimes C_r^*(\Gamma)$, stable par calcul fonctionnel holomorphe, contenant $\mathscr{S}\Gamma$ (cf. remarque 7), et à laquelle le cocycle cyclique $\tau_c \# \mathrm{Trace}$ se prolonge par continuité.

La démonstration de 2) utilise de manière essentielle l'hyperbolicité de Γ et les estimés de Haagerup, Jollissaint et P. de la Harpe.

Lemme 9. — Soient Γ un groupe discret, $F \subset \Gamma$ un système fini de générateurs, $g \to |g|$ la longueur des mots correspondante.

1) Soit $\mathscr{A} \subset k \otimes C_r^*(\Gamma)$ la plus petite sous algèbre stable par calcul fonctionnel holomorphe contenant $\mathscr{S} \otimes \mathbb{C}\Gamma = \mathscr{S}\Gamma$. Pour tout élément de $\mathscr{A}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a, avec $T = (T_{ij}), T_{ij} \in C_r^*(\Gamma)$

$$\sum_{i,j} (p_k(T_{ij}))^2 < \infty \tag{10}$$

où $p_k(a) = (\Sigma |g|^k |a_g|^2)^{1/2}$ pour $a = (a_g)_{g\in\Gamma}$, $a \in C_r^*(\Gamma)$

2) Si Γ est *hyperbolique*, et si le cocycle c est *borné*, $c \in H^{2q}(\Gamma,\mathbb{C})$ $q \geq 1$, le cocycle cyclique Trace # τ_c sur $\mathcal{S}\Gamma$ est continu pour les normes (10) et se prolonge à $\mathcal{A}$.

Nous pouvons alors énoncer le théorème des hautes signatures pour les groupes hyperboliques. Etant donnés un groupe discret Γ et une application continue $\varphi : M \rightarrow B\Gamma$ où M est une variété compacte orientée de dimension paire, nous noterons $L(M,\varphi)$ la classe dans le groupe de Witt $\omega(\mathbb{C}\Gamma)$ de l'algèbre involutive $\mathbb{C}\Gamma$, associé à (M,φ) par la chirurgie Γ-équivariante. Cette classe est représentée par des éléments autoadjoints inversibles $H = H^* \in M_r(\mathbb{C}\Gamma)$ pour r assez grand.

Théorème 11. — Soient Γ un groupe hyperbolique, $c \in Z^{2q}(\Gamma,\mathbb{C})$ un cocycle borné, $\varphi : M \rightarrow B\Gamma$ une application continue où M est une variété compacte orientée de dimension paire. Soit $H = H^* \in M_r(\mathbb{C}\Gamma)$ un représentant de $L(M,\varphi) \in \omega(\mathbb{C}\Gamma)$ et K le compact de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ spectre de H dans la représentation régulière de Γ dans $\ell^2(\Gamma)$. La fonction analytique de plusieurs variables complexes $F(\lambda^0,..,\lambda^{2q}) = \tau_c((H - \lambda^0)^{-1}, \ldots, (H - \lambda^{2q})^{-1})$ définie pour $|\lambda^i|$ petit se prolonge à $(\mathbb{C}\backslash K)^{2q+1}$ et la valeur de $\tau_c(E^+, \ldots, E^+) - \tau_c(E^-, \ldots, E^-)$, où $E^{\pm} = 1/2\pi i \int_{C^{\pm}} (H - \lambda)^{-1} d\lambda$, définie par prolongement analytique, est un invariant d'homotopie du couple (M,φ). De plus on a :

$$\tau_c(E^+, \ldots, E^+) - \tau_c(E^-, \ldots, E^-) = \frac{1}{(2\pi i)^q} \frac{q!}{(2q)!} \operatorname{Sign}_c(M,\varphi)$$

Corollaire 12. — Tout groupe hyperbolique vérifie la conjecture de Novikov.

A. C.

Articles publiés

A. Connes, Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of θ-summable Fredholm modules, K-theory 1 (1988), 519-548.

A. Connes et M. Karoubi, Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm, K-theory 2, Vol. 3 (1988), 431-463.

A. Connes et H. Moscovici, Conjecture de Novikov et groupes hyperboliques, C. R. Acad. Sci., Paris, t. 307, Série I (1988), 475-480.

A. Connes et D. Evans, Embeddings of U(1). Current algebras in Non-Commutative algebras of statistical Mechanics, Comm. Math. Physics, Vol. 121 (1989), 507-525.

CONFÉRENCES ET INVITATIONS

Septembre 1988, Université Oxford, Deux outils mathématiques dans la théorie de la renormalisation.

Septembre 1988, Université Harvard, Sur la conjecture de Novikov.

Octobre 1988, Colloque en l'honneur de R. Thom, Analogues de l'isomorphisme de Thom.

Avril 1989, Colloque en l'honneur de M.F. Atiyah, Théorie de l'indice pour les variétés non simplement connexes.

Mai 1989, Rencontre du Max Planck Institut à Schloss Ryndberg (Allemagne), Cohomologie cyclique entière et analyse en dimension infinie.

Mai 1989, Bonn (même titre).

Juin 1989, Conférence de Physique théorique, Paris, Divergences de la théorie des champs et géométrie non commutative.