Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

La notion de variété et les axiomes de la géométrie

Commençons par caractériser les triplets spectraux correspondants à la géométrie Riemannienne usuelle. Rappelons qu'un triplet spectral $(\mathscr{A}, \mathscr{H}, D)$ est donné par une algèbre involutive $\mathscr{A}$ d'opérateurs dans l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et par un opérateur autoadjoint non borné D dans $\mathscr{H}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ la dimension, le triplet $(\mathscr{A}, \mathscr{H}, D)$ est supposé $\mathbb{Z}/2$ gradué par γ, $\gamma = \gamma^*$, $\gamma^2 = 1$ quand n est pair.

Les axiomes *commutatifs* sont les suivants :

1) (Dimension) $ds = D^{-1}$ est infinitésimal d'ordre $\frac{1}{n}$.

2) (Ordre un) $[[D, f], g] = 0 \qquad \forall f, g \in \mathscr{A}$.

3) (Régularité) Pour tout $f \in \mathscr{A}$, f et $[D, f]$ appartiennent à $\bigcap_k$ Domaine δ^k, où δ est la dérivation $\delta(T) = [|D|, T]$.

4) (Orientabilité) Il existe un cycle de Hochschild $c \in Z_n(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ tel que $\pi(c) = 1$ (n impair) ou $\pi(c) = \gamma$ (n pair) où $\pi : \mathscr{A}^{\otimes(n+1)} \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est l'unique application linéaire telle que $\pi(a^0 \otimes a^1 \otimes \ldots \otimes a^n) = a^0[D, a^1] \ldots [D, a^n] \quad \forall a^j \in \mathscr{A}$.

5) (Finitude) Le $\mathscr{A}$-module $\mathcal{E} = \bigcap_k$ Domaine D^k est projectif de type fini et l'égalité suivante définit une structure hermitienne sur $\mathcal{E}$,

$$\langle a\xi, \eta \rangle = ⨍ a(\xi, \eta)\, ds^n \qquad \forall\, \xi, \eta \in \mathcal{E},\ a \in \mathscr{A}.$$

6) (Dualité de Poincaré) La forme d'intersection $K_*(\mathscr{A}) \times K_*(\mathscr{A}) \to \mathbb{Z}$ donnée par la composition de l'indice de Fredholm de D avec la diagonale, $m_* : K_*(\mathscr{A}) \times K_*(\mathscr{A}) \to K_*(\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}) \to K_*(\mathscr{A})$, *est inversible.*

7) (Réalité) Il existe une isométrie antilinéaire J sur $\mathscr{H}$ telle que $Ja^*J^{-1} = a \quad \forall a \in \mathscr{A}$ et $J^2 = \varepsilon$, $JD = \varepsilon' DJ$, $J\gamma = \varepsilon'' \gamma J$ où la table des valeurs de $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \in \{-1, 1\}$ est donnée en fonction de n modulo 8.

Les axiomes 2) et 4) donnent la présentation de l'algèbre abstraite notée $(\mathscr{A}, ds)$ engendrée par $\mathscr{A}$ et $ds = D^{-1}$.

Théorème. *Soit $\mathscr{A} = C^\infty(M)$ où M est une variété compacte de classe C^∞.*

a) Soit π une représentation unitaire de $(\mathscr{A}, ds)$ satisfaisant les conditions 1) à 7). Il existe alors une unique structure Riemannienne g sur M telle que la distance géodésique soit donnée par,

$$d(x,y) = \operatorname{Sup}\{\, |a(x) - a(y)| \; ; \; a \in \mathscr{A}, \; \|[D, a]\| \leq 1\}.$$

b) La métrique $g = g(\pi)$ ne dépend que de la classe d'équivalence unitaire de π et les fibres de l'application {classe d'équivalence unitaire} $\to g(\pi)$ forment un nombre fini d'espaces affines $\mathscr{A}_\sigma$ paramétrés par les structures spinorielles σ de M.

c) La fonctionnelle $⨍ ds^{n-2}$ est quadratique et positive sur chaque $\mathscr{A}_\sigma$ où elle admet un unique minimum π_σ.

d) π_σ est la représentation de $(\mathscr{A}, ds)$ dans $L^2(M, S_\sigma)$ donnée par les opérateurs de multiplication et l'opérateur de Dirac associé à la connection de Levi Civita de la métrique g.

e) La valeur de $⨍ ds^{n-2}$ en π_σ est l'action de Hilbert Einstein de la métrique g,

$$⨍ ds^{n-2} = -c_n \int r \sqrt{g}\, d^n x, \quad c_n = \frac{n-2}{12} (4\pi)^{-n/2} 2^{[n/2]} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{-1}.$$

L'exemple le plus simple pour comprendre la signification du théorème et de vérifier que la géométrie du cercle S^1 de longueur 2π est entièrement spécifiée par la présentation :

(1) $$U^{-1}[D,U] = 1, \text{ où } UU^* = U^*U = 1.$$

L'algèbre $\mathscr{A}$ étant celle des fonctions C^∞ de l'opérateur unitaire U. On a S^1 = Spectre $(\mathscr{A})$ et l'égalité (1) est le cas le plus simple de l'axiome 4.

Remarques. a) L'hypothèse $\mathscr{A} = C^\infty(M)$ devrait résulter des axiomes 1) – 7) (et de la commutativité de $\mathscr{A}$). Il résulte de 3) et 5) que si $\mathscr{A}''$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\mathscr{A}$ on a :

(2) $$\mathscr{A} = \{T \in \mathscr{A}'' \; ; \; T \in \bigcap_{k>0} \operatorname{Dom} \delta^k\}$$

ce qui montre que $\mathscr{A}$ est uniquement spécifiée dans $\mathscr{A}''$ par la donnée de D.

Cela montre que $\mathscr{A}$ est stable par calcul fonctionnel C^∞ dans sa fermeture normique $A = \overline{\mathscr{A}}$ et en particulier que :

(3) $$\text{Spectre } \mathscr{A} = \text{Spectre } A.$$

Soit X cet espace compact, on devrait déduire des axiomes que l'application de X dans $\mathbb{R}^N$ donnée par les $a_i^j \in \mathscr{A}$ qui interviennent dans le cycle de Hochschild c de (4) est un plongement de X comme sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^N$.

b) Rappelons qu'un cycle de Hochschild $c \in Z_n(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ est un élément de $\mathscr{A}^{\otimes(n+1)}$, $c = \sum a_i^0 \otimes a_i^1 \ldots \otimes a_i^n$ tel que $bc = 0$, où b est l'application linéaire $b : \mathscr{A}^{\otimes n+1} \to \mathscr{A}^{\otimes n}$ telle que :

$$b(a^0 \otimes \ldots \otimes a^n) =$$
$$\sum_0^{n-1} (-1)^i \, a^0 \otimes \ldots \otimes a^i a^{i+1} \otimes \ldots \otimes a^n + (-1)^n a^n a^0 \otimes a^1 \otimes \ldots \otimes a^{n-1}.$$

La classe de Hochschild du cycle c détermine la *forme volume*.

c) Nous utilisons la convention selon laquelle la courbure scalaire r est positive pour la sphère S^n, en particulier le signe de l'action $⨍ ds^{n-2}$ est le bon pour la formulation Euclidienne de la gravitation. Par exemple pour $n = 4$ l'action de Hilbert Einstein $-\frac{1}{16\pi G}\int r\sqrt{g}\, d^4x$ coïncide avec l'aire $\frac{1}{l_p^2} ⨍ ds^2$ en unité de Planck.

d) Quand M est une variété spinorielle l'application $\pi \to g(\pi)$ du théorème est surjective et si l'on fixe le cycle $c \in Z_n(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ son image est l'ensemble des métriques dont la forme volume est fixée – (b)).

e) Si l'on supprime l'axiome 7 on a un résultat analogue au théorème en remplaçant les structures spinorielles par les structures spin^c, mais l'on n'a plus unicité dans c) à cause de la liberté dans le choix de la connection spinorielle.

f) Il résulte de l'axiome 4 que les opérateurs $a \, ds^n$, $a \in \mathscr{A}$ sont automatiquement mesurables de sorte que le symbole $⨍$ qui apparaît dans 5 est bien défini.

Passons au cas général non commutatif. Étant donnée une algèbre involutive $\mathscr{A}$ d'opérateurs dans l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ la théorie de Tomita associe à tout vecteur $\xi \in \mathscr{H}$ cyclique pour $\mathscr{A}$ et pour son commutant $\mathscr{A}'$,

(4) $$\overline{\mathscr{A}\xi} = \mathscr{H}, \ \overline{\mathscr{A}'\xi} = \mathscr{H}$$

une involution antilinéaire isométrique $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ obtenue à partir de la décomposition polaire de l'opérateur :

(5) $$S\, a\xi = a^*\xi \qquad \forall\, a \in \mathcal{A}$$

et qui vérifie la propriété de commutativité suivante,

(6) $$J\, \mathcal{A}''\, J^{-1} = \mathcal{A}'.$$

On a donc en particulier $[a, b^0] = 0 \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}$ où :

(7) $$b^0 = Jb^*J^{-1} \qquad \forall\, b \in \mathcal{A}$$

de sorte que $\mathcal{H}$ devient un $\mathcal{A}$-bimodule en utilisant la représentation de l'algèbre opposée $\mathcal{A}^0$ donnée par (7). Dans le cas commutatif on a $a^0 = a \quad \forall\, a \in \mathcal{A}$ de sorte que l'on ne perçoit pas la nuance entre module et bimodule.

Le théorème de Tomita est l'outil nécessaire pour assurer la substance des axiomes dans le cas général. Les axiomes 1) 3) et 5) sont inchangés, dans l'axiome de réalité 7) on remplace l'égalité $J\, a^*\, J^{-1} = a \quad \forall\, a \in \mathcal{A}$ par :

(7') $$[a, b^0] = 0 \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{A} \text{ où } b^0 = Jb^*J^{-1}$$

et l'axiome 2) (ordre un) se formule ainsi :

(2') $$[[D, a], b^0] = 0 \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{A}$$

(On notera que comme a et b^0 commutent 2' équivaut à $[[D, a^0], b] = 0 \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}$.)

L'axiome (7') fait de $\mathcal{H}$ un $\mathcal{A}$-bimodule et donne une classe μ de KR^n-homologie pour l'algèbre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$ munie de l'automorphisme antilinéaire τ,

$$\tau(x \otimes y^0) = y^* \otimes x^{*0}.$$

Le produit intersection de Kasparov permet alors de formuler la dualité de Poincaré, comme l'invertibilité de μ,

(6') $$\exists\, \beta \in KR_n(\mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{A}),\ \beta \otimes_{\mathcal{A}} \mu = \mathrm{id}_{\mathcal{A}^0},\ \mu \otimes_{\mathcal{A}^0} \beta = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}.$$

Ceci implique l'isomorphisme $K_*(\mathcal{A}) \overset{\cap\mu}{\to} K^*(\mathcal{A})$. La forme d'intersection,

$$K_*(\mathcal{A}) \times K_*(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$$

est obtenue à partir de l'indice de Fredholm de D à coefficient dans $K_*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0)$ et n'utilise plus l'application diagonale $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ qui n'est un homomorphisme que dans le cas commutatif. Cette forme d'intersection est quadratique ou symplectique selon la valeur de n modulo 8.

L'homologie de Hochschild à coefficient dans un bimodule garde tout son sens dans le cas général et l'axiome 4) prend la forme suivante,

(4') Il existe un cycle de Hochschild $c \in Z_n(\mathcal{A}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0)$ tel que $\pi(c) = 1$ (n impair) ou $\pi(c) = \gamma$(n pair).

(Où $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$ est le $\mathcal{A}$ bimodule obtenu par restriction à la sous-algèbre $\mathcal{A} \otimes 1 \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$ de la structure de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^0$, i.e.

$$a(b \otimes c^0)d = abd \otimes c^0 \qquad \forall\ a, b, c, d \in \mathcal{A}.)$$

Les axiomes (1), (3) et (5) sont inchangés dans le cas non commutatif et la démonstration de la mesurabilité des opérateurs $a(ds)^n$, $a \in \mathcal{A}$ reste valable en général.

Nous adopterons les axiomes (1), (2'), (3), (4'), (5), (6') et (7') dans le cas général comme définition d'une *variété spectrale* de dimension n. L'algèbre $\mathcal{A}$ étant fixée nous parlerons de géométrie spectrale sur $\mathcal{A}$. On démontre que l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}''$ engendrée par $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ est automatiquement finie et hyperfinie et on a la liste complète de ces algèbres à isomorphisme près. L'algèbre $\mathcal{A}$ est stable par calcul fonctionnel C^∞ dans sa fermeture normique $A = \overline{\mathcal{A}}$ de sorte que $K_j(A) \simeq K_j(\mathcal{A})$, i.e. $K_j(\mathcal{A})$ ne dépend que de la topologie sous-jacente (définie par la C^* algèbre A). L'entier $\chi = \langle \mu, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ donne la caractéristique d'Euler sous la forme :

$$\chi = \text{Rang } K_0(\mathcal{A}) - \text{Rang } K_1(\mathcal{A})$$

et le Théorème de l'indice local (Cours 1994) en donne une formule locale.

Le groupe $\text{Aut}(\mathcal{A})$ des automorphismes de l'algèbre involutive $\mathcal{A}$ joue en général le rôle du groupe $\text{Diff}(M)$ des difféomorphismes d'une variété M. (On a un isomorphisme canonique $\text{Diff}(M) \overset{\alpha}{\to} \text{Aut}(C^\infty(M))$ donné par :

$$\alpha_\varphi(f) = f \circ \varphi^{-1} \qquad \forall\ f \in C^\infty(M),\ \varphi \in \text{Diff}(M).)$$

Dans le cas général non commutatif, parallèlement au sous-groupe normal $\text{Int}\ \mathcal{A} \subset \text{Aut}\ \mathcal{A}$ des automorphismes intérieurs de $\mathcal{A}$,

(8) $$\alpha(f) = ufu^* \qquad \forall\ f \in \mathcal{A}$$

où u est un élément unitaire de $\mathcal{A}$ (i.e. $uu^* = u^*u = 1$), il existe un feuilletage naturel de l'espace des géométries spectrales sur $\mathcal{A}$ en classes d'équivalences formées des *déformations intérieures* d'une géométrie donnée. Une telle déformation est obtenue sans modifier ni la représentation de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ ni l'isométrie antilinéaire J par la formule :

(9) $$D \to D + A + J\,AJ^{-1}$$

où $A = A^*$ est un opérateur autoadjoint arbitraire de la forme :

(10) $$A = \Sigma\, a_i[D, b_i],\ a_i,\ b_i \in \mathcal{A}.$$

Le nouveau triplet spectral obtenu, continue à vérifier les axiomes (1) – (7').

L'action du groupe $\text{Int}(\mathcal{A})$ sur les géométries spectrales se réduit à une transformation de jauge sur A, donnée par la formule :

(11) $$\gamma_u(A) = u[D, u^*] + uAu^*.$$

L'équivalence unitaire est implémentée par la représentation suivante du groupe unitaire de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{H}$,

$$u \to uJuJ^{-1} = u(u^*)^0. \tag{12}$$

La transformation (9) se réduit à l'identité dans le cas Riemannien usuel. Pour obtenir un exemple non trivial il suffit d'en faire le produit par l'unique géométrie spectrale sur l'algèbre de dimension finie $\mathscr{A}_F = M_N(\mathbb{C})$ des matrices $N \times N$ sur $\mathbb{C}$, $N \geq 2$. On a alors $\mathscr{A} = C^\infty(M) \otimes \mathscr{A}_F$, $\mathrm{Int}(\mathscr{A}) = C^\infty(M, PSU(N))$ et les déformations intérieures de la géométrie sont paramétrées par les potentiels de jauge pour une théorie de jauge de groupe $SU(N)$. L'espace $P(\mathscr{A})$ des états purs de l'algèbre $\mathscr{A}$ est le produit $P = M \times P_{N-1}(\mathbb{C})$ et la métrique sur $P(\mathscr{A})$ déterminée par la formule du a) du théorème dépend du potentiel de jauge A. Elle coïncide avec la métrique de Carnot sur P définie par la distribution horizontale de la connection associée à A. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathscr{A})$ des automorphismes de $\mathscr{A}$ est le produit semi-direct,

$$\mathrm{Aut}(\mathscr{A}) = \mathscr{U} \rtimes \mathrm{Diff}(M) \tag{13}$$

du groupe $\mathrm{Int}(\mathscr{A})$ des transformations de jauges locales par le groupe des difféomorphismes. En dimension $n = 4$, les fonctionnelles d'action de Hilbert Einstein pour la métrique Riemannienne et de Yang-Mills pour le potentiel vecteur A apparaissent simplement, et avec les bons signes, dans le développement asymptotique en $\frac{1}{\Lambda}$ du nombre $N(\Lambda)$ de valeurs propres de D qui sont $\leq \Lambda$. On régularise cette expression en la remplaçant par :

$$\mathrm{Trace}\ \varphi\left(\frac{D}{\Lambda}\right) \tag{14}$$

où $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction paire qui vaut 1 sur l'intervalle $[-1, 1]$. Les seuls autres termes non nuls du développement asymptotique sont un terme cosmologique, un terme de gravité de Weyl et un terme topologique.

Un exemple plus élaboré de variété spectrale est le tore non commutatif $\mathbb{T}^2_\theta$. Le paramètre $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définit la déformation suivante de l'algèbre des fonctions C^∞ sur le tore $\mathbb{T}^2$, de générateurs U, V. Les relations :

$$VU = \exp 2\pi i\theta\ UV \quad et \quad UU^* = U^*U = 1,\ VV^* = V^*V = 1 \tag{15}$$

définissent la structure d'algèbre involutive de $\mathscr{A}_\theta = \{\Sigma a_{n,m} U^n V^m\ ;\ a = (a_{n,m}) \in S(\mathbb{Z}^2)\}$ où $S(\mathbb{Z}^2)$ est l'espace de Schwartz des suites à décroissance rapide. Comme pour les courbes elliptiques on utilise comme paramètre pour définir la géométrie de $\mathbb{T}^2_\theta$ un nombre complexe τ de partie imaginaire positive et, à isométrie près, cette géométrie ne dépend que de l'orbite de τ pour $PSL(2,\mathbb{Z})$. Le phénomène nouveau qui apparaît est *l'équivalence de Morita* qui relie entre elles les algèbres $\mathscr{A}_{\theta_1}$, $\mathscr{A}_{\theta_2}$ lorsque θ_1 et θ_2 sont dans la même orbite de l'action de $PSL(2, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R}$.

Étant donné une variété spectrale $(\mathscr{A}, \mathscr{H}, \mathrm{D})$ et une équivalence de Morita entre $\mathscr{A}$ et une algèbre B donnée par :

$$B = \mathrm{End}_{\mathscr{A}}(\mathcal{E}) \tag{16}$$

où $\mathcal{E}$ est une $\mathscr{A}$-module à droite, projectif de type fini et hermitien, on obtient une géométrie spectrale sur B par le choix d'une *connection hermitienne* sur $\mathcal{E}$. Une telle connection ∇ est une application linéaire $\nabla : \mathcal{E} \otimes_{\mathscr{A}} \Omega^1_D$ vérifiant les règles ([Co]) :

$$\nabla(\xi a) = (\nabla\xi)a + \xi \otimes da \qquad \forall\ \xi \in \mathcal{E},\ a \in \mathscr{A} \tag{17}$$

$$(\xi, \nabla\eta) - (\nabla\xi,\eta) = d(\xi,\eta) \qquad \forall\ \xi,\eta \in \mathcal{E} \tag{18}$$

où $da = [D, a]$ et où $\Omega^1_D \subset \mathscr{L}(\mathscr{A})$ est le $\mathscr{A}$-bimodule formé par les opérateurs de la forme (10).

Toute algèbre $\mathscr{A}$ est Morita équivalente à elle-même (avec $\mathcal{E} = \mathscr{A}$) et quand on applique la construction ci-dessus on obtient les déformations intérieures de la géométrie spectrale.

Conférences

— École d'été des Houches, août-septembre 1995.
14 conférences : Géométrie non commutative.

— Physique des particule, École de Corfou, septembre 1995.
2 conférences : The standard model and the fine structure of space time.

— Banach center, Varsovie, novembre 1995.
1 conférence : Quantized calculus and applications.

— Tel Aviv, décembre 1995.
2 conférences : Opérateurs hypoelliptiques, difféomorphismes et la classe fondamentale transverse.

— Conference Geometric group theory, Schloss Rindberg, Munich, janvier 1996.
1 conférence : Opérateurs hypoelliptiques, difféomorphismes et la classe fondamentale transverse.

— CERN, Genève, février 1996.
1 conférence : The spectral action principle.

— Rutgers University, avril 1996.
3 conférences : Quantized calculus and applications.

— University of Chicago, avril 1996.
3 conférences :

- Mathématiques : Quantized calculus and applications.
- Physique : The spectral action principle.
- Philosophie : Sur la nature de la réalité mathématique.

— University of Toronto, avril 1996.
2 conférences : Poincaré Lectures.

— Amsterdam, département de physique, mai 1996.
1 conférence : The spectral action principle.

— Symposium en l'honneur de Roger Penrose, Oxford, juin 1996.
1 conférence : Quantized calculus and the spectral action principle.

— Conférence d'Ascona, Monte Verita, juin 1996.
1 conférence : The spectral action principle.

PUBLICATION

— J.-B. Bost and A. Connes : Hecke Algebras, Type III Factors and Phase Transitions with Spontaneous Symmetry Breaking in Number Theory, *Selecta Mathematica,* New Series, Vol. 1, No 3 (1995).