Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Renormalisation et théorie de Galois motivique

1. Le groupe de renormalisation

J'ai développé cette année dans mon cours les résultats récents obtenus en collaboration avec M. Marcolli qui établissent un lien précis entre renormalisation et théorie de Galois.

Nous montrons que les divergences de la théorie des champs codent, en fait, exactement l'action d'un *groupe de Galois motivique* explicite U^* sur l'ensemble des théories physiques. Le groupe de renormalisation apparaît comme un sous-groupe à un paramètre $\mathbb{G}_a \subset U^*$ du groupe de Galois U^*, lequel s'interprète comme le groupe de Galois cosmique conjecturé par Cartier. J'avais montré dans mon travail avec D. Kreimer que, en théorie des champs, la théorie renormalisée est obtenue en évaluant en $z = D$ la partie holomorphe γ_+ de la décomposition de Birkhoff du lacet $\gamma(z) \in G$ associé à la théorie non-renormalisée, vue comme fonction de la dimension complexe z à valeurs dans le groupe G des difféographismes, dual de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ des graphes de Feynman. La renormalisation apparaît ainsi comme un cas particulier d'un procédé général d'extraction de parties finies de nature multiplicative, basé sur la décomposition de Birkhoff. Nous avions montré, en nous limitant à la théorie φ_6^3 pour simplifier les notations, que, bien que le lacet $\gamma(z)$ dépende du choix de l'unité de masse μ,

$$\mu \to \gamma_\mu(z), \tag{1.1}$$

la partie singulière γ_μ^- de sa décomposition de Birkhoff

$$\gamma_\mu(z) = \gamma_{\mu^-}(z)^{-1}\ \gamma_{\mu^+}(z) \tag{1.2}$$

est, en fait, indépendante de μ,

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ \gamma_{\mu^-}(z) = 0. \tag{1.3}$$

Soit

$$\theta_t \in \operatorname{Aut} G_1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

le groupe à un paramètre d'automorphismes du groupe de Lie G qui est associé à la graduation de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ donnée par le nombre de boucles

$$L(\Gamma) = \text{nombre de boucles } \Gamma \tag{1.5}$$

pour tout graphe une particule irréductible (1PI) Γ.

On a, par construction, l'égalité

$$\gamma_{e^t\mu}(z) = \theta_{tz}(\gamma_\mu(z)) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Le point de départ de ma collaboration avec M. Marcolli est la classification des familles de lacets $\gamma_\mu(z)$ vérifiant les conditions (1.3), (1.6) à valeurs dans un groupe pro-unipotent positivement gradué arbitraire G :

Théorème 1.1.

Soit $\gamma_\mu(z)$ une famille de lacets à valeurs dans G vérifiant les conditions (1.3), (1.6). *Il existe alors un unique élément $\beta \in \mathfrak{g}$ de l'algèbre de Lie de G et un lacet $\gamma_{\mathrm{reg}}(z)$ régulier en $z = 0$ tels que*

$$\gamma_\mu(z) = \mathrm{Te}^{-\frac{1}{z}\int_{\infty}^{-z\log\mu}\theta_{-t}(\beta)\,dt}\,\theta_{z\log\mu}(\gamma_{\mathrm{reg}}(z)).$$

Pour tout $\beta \in \mathfrak{g}$ et tout lacet régulier $\gamma_{\mathrm{reg}}(z)$ la décomposition de Birkhoff du lacet $\gamma_\mu(z)$ est donnée par

$$\gamma_{\mu^+}(z) = \mathrm{Te}^{-\frac{1}{z}\int_{0}^{-z\log\mu}\theta_{-t}(\beta)\,dt}\,\theta_{z\log\mu}(\gamma_{\mathrm{reg}}(z)),$$

$$\gamma_{\mu^-}(z) = \mathrm{Te}^{-\frac{1}{z}\int_{0}^{\infty}\theta_{-t}(\beta)\,dt}.$$

La notation

$$\mathrm{Te}^{\int_a^b \alpha(t)\,dt} = 1 + \sum_1^\infty \int_{a \le s_1 \le \dots \le s_n \le b} \alpha(s_1)\cdots\alpha(s_n)\,\Pi\, ds_j,$$

désigne l'exponentielle ordonnée des physiciens qui est une notation commode pour la valeur en b de la solution A, $A(a) = 1$ de l'équation différentielle

$$dA(t) = A(t)\,\alpha(t)\,dt$$

à valeurs dans le groupe $G(\mathbb{C})$ et qui est, bien entendu, intimement reliée aux intégrales itérées.

Le pas suivant consiste à exhiber la correspondance de Riemann-Hilbert secrètement présente dans le théorème 1.1. Comme toute correspondance de Riemann-Hilbert elle relie des objets géométriques, qui dans notre cas sont les connexions plates équisingulières, aux représentations d'un groupe de « monodromie généralisée ». Notre modèle était le tore exponentiel de J.-P. Ramis dans la théorie locale des points singuliers irréguliers des équations différentielles.

Le procédé de régularisation dimensionnelle fournit, en fait, du fait de l'arbitraire dans la normalisation de l'intégrale en dimension complexe $d = D - z$, la donnée géométrique suivante :

— Un fibré principal B de groupe $\mathbb{G}_m = \mathbb{C}^*$, de base un disque infinitésimal Δ centré en D.

— Une connexion plate ω à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, obtenue en différentiant la théorie des champs vue comme section du fibré $B \times G$ de base B.

La fibre $\pi^{-1}(z)$ du fibré B au-dessus de $z \in \Delta$ est l'ensemble des normalisations possibles de l'intégration en dimension z. La fibre spéciale $V = \pi^{-1}(D)$ joue un rôle particulier à cause des divergences de sorte que la connexion ω est singulière sur $V \subset B$.

En général, définissons l'*équivalence* de deux connexions singulières ω_j par l'existence d'une conjugaison régulière h entre elles,

$$\omega_2 = h^{-1}\, dh + h^{-1}\omega_1\, h.$$

La notion géométrique qui abstrait les propriétés (1.3), (1.6) est la suivante :

Définition 1.2.

Une connexion plate ω à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ définie sur $B^* = B \backslash V$ est équisingulière *si elle est invariante par $\mathbb{G}_m$ et si la classe d'équivalence de sa restriction à une section $\sigma : \Delta \mapsto B$ ne dépend que de $\sigma(0)$.*

Notre résultat principal est la classification complète des connexions plates équisingulières à équivalence près. En fait, nous construisons une catégorie tannakienne ayant pour objets les *fibrés plats équisinguliers* lesquels sont des couples (E, ∇) où E est un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué et ∇ une (classe de) connexion équisingulière sur le fibré équivariant $B \times E$. Notre résultat s'énonce alors ainsi :

Théorème 1.3.

La catégorie des fibrés plats équisinguliers sur B^* est équivalente à la catégorie des représentations de dimension finie d'un (unique) groupe algébrique affine U^*. Ce groupe est le produit semi-direct par $\mathbb{G}_m$ (agissant par la graduation) du groupe pro-unipotent U dont l'algèbre de Lie

$$\mathrm{Lie}\,(U) = \mathcal{F}(1, 2, 3, ...).$$

est librement engendrée par un générateur e_{-n} de degré n pour tout entier $n \geq 1$.

Le groupe de renormalisation est un sous-groupe canonique rg : $\mathbb{G}_a \mapsto U$ et nous construisons un repère singulier universel sur un fibré principal de base B et de groupe U dans lequel les divergences de la théorie des champs disparaissent.

Le groupe U tout entier agit sur les constantes de couplage d'une théorie renormalisable en composant l'homomorphisme canonique $U \to G$ provenant de l'universalité de U avec l'action naturelle du groupe G des difféographismes sur les constantes de couplage. Le groupe U apparaît ainsi comme le groupe de Galois cosmique suggéré par P. Cartier :

« La parenté de plus en plus manifeste entre le groupe de Grothendieck-Teichmüller d'une part, et le groupe de renormalisation de la Théorie Quantique des Champs n'est sans doute que la première manifestation d'un groupe de symétrie des constantes fondamentales de la physique, une espèce de groupe de Galois cosmique ! »

Pierre Cartier

Nous développons de plus brièvement l'analogie entre la catégorie des fibrés plats équisinguliers et celle des motifs de Tate mixtes. On sait, en particulier, que le groupe de Galois motivique $G_{\mathcal{M}_T}(\mathcal{O})$ du schéma $S_4 = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O})$ associé aux racines quatrièmes de l'unité (de sorte que $\mathcal{O}$ est l'anneau $\mathbb{Z}[i][\frac{1}{2}]$) est (non-canoniquement) isomorphe au groupe U^*.

L'ensemble de ces résultats montre que les divergences de la théorie des champs indiquent, en fait, la présence de symétries de nature « galoisienne » et, bien loin d'être des pathologies à éliminer, elles révèlent sans doute la subtilité de la géométrie qui gouverne l'espace-temps, une fois prise en compte la régularisation dimensionnelle.

2. Facteurs locaux archimédiens

Dans une deuxième partie du cours j'ai développé l'analogie entre l'espace B utilisé ci-dessus en renormalisation et la partie archimédienne de l'espace des classes d'adèles. J'ai montré comment ce dernier espace permet d'obtenir les facteurs locaux archimédiens des fonctions L de variétés arithmétiques à partir d'une formule de trace de Lefschetz.

2.1. Notations

Soit X une variété projective lisse de dimension d sur $\mathbb{Q}$. Au motif $H^m(X)$ correspond une fonction zêta donnée sous forme d'un produit Eulérien. Pour les places finies p les facteurs correspondants sont obtenus (dans le cas de bonne réduction) à partir de la réduction de X en p qui est une variété $X(p)$ sur le corps $\mathbb{F}_p$. On désigne ainsi par $P_{m,p}(T)$ le polynôme associé à $X(p)$ et H^m par l'action de l'endomorphisme de Frobenius sur la cohomologie ℓ-adique $H^m(\bar{X}(p), \mathbb{Q}_\ell)$ $(\ell \neq p)$ de $\bar{X}(p) = X(p) \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$. Le théorème de Deligne montre que ce polynôme est indépendant de $\ell \neq p$ et à coefficients entiers. Ceci permet de définir un produit Eulérien incomplet

$$\zeta_S(s) = \prod_{p \notin S} \frac{1}{P_{m,p}(p^{-s})}$$

qui exclut les places de mauvaise réduction et les places archimédiennes. Ainsi $S \subset \Sigma_{\mathbb{Q}}$ contient les places archimédiennes, et l'on doit compléter le produit eulerien en particulier par la contribution de ces places :

$$\prod_{\Sigma_{\mathbb{K}}^{\infty}} L_{\mathbb{K}_v}(H^*(X \times_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_v), s)$$

Nous rappelons d'abord la définition, due à J.-P. Serre des facteurs locaux archimédiens $L_{\mathbb{K}_\upsilon}(H^*(X \times_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_\upsilon), s)$ associés à une variété X définie sur un corps de nombres K et une place archimédienne $\upsilon \in \sum_{\mathbb{K}}^{\infty}$ de K. On désigne par $X_\upsilon(\mathbb{C})$ la variété complexe obtenue par l'intermédiaire du plongement de K dans $K_\upsilon = \mathbb{C}$ pour une place complexe et $K_\upsilon = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ pour une place réelle. Elle admet une structure réelle dans le deuxième cas. On pose alors

$$H^m(X_\upsilon(\mathbb{C})) = \oplus_{p+q=m} H^{p,q}(X_\upsilon(\mathbb{C}))$$

$$L_{\mathbb{C}}(H^*, s) = \prod_{p,\,q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s - \min(p, q))^{h^{p,q}}$$

$$L_{\mathbb{R}}(H^*, s) = \prod_{p<q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}} \prod_{p} \Gamma_{\mathbb{R}}(s-p)^{h^{p,+}}\, \Gamma_{\mathbb{R}}(s-p+1)^{h^{p,-}}$$

où $h^{p,\pm}$ est la dimension du $\pm(-1)^{p-}$ sous-espace propre de l'involution de $H^{p,p}$ induite par la structure réelle et

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) := (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s), \quad \Gamma_{\mathbb{R}}(s) := 2^{-1/2}\,\pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)$$

2.2. Représentation $\pi(H^m, u)$

Dans le cas où la place υ est complexe on prend $W = \mathbb{C}^*$ et l'on définit la représentation $\pi(H^m, u)$ de W par

$$\pi(H^m, u)\,\xi = u^{-p}\,\bar{u}^{-q}\xi, \quad \forall \xi \in H^{p,q} \tag{2.1}$$

Dans le cas où la place υ est réelle, on considère le groupe

$$W = \mathbb{C}^* \rtimes_c \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

qui est le normalisateur de $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{H}^*$ où l'on désigne les quaternions par $\mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}j$, avec $j^2 = -1$ et $j\,w\,j^{-1} = \bar{w}$, $\forall w \in \mathbb{C}$. Pour $u \in W$ on a

$$u = w\,j^{\varepsilon}, \;\; w \in \mathbb{C}^*, \;\; \varepsilon \in \{0, 1\}.$$

Le groupe de Weil W est une extension de $\mathbb{C}^*$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec un cocycle c non-trivial. On prolonge la définition précédente par :

$$\pi(H^m, wj)\,\xi = i^{p+q}\,w^{-p}\,\bar{w}^{-q}\,\sigma(\xi), \quad \forall \xi \in H^{p,q} \tag{2.2}$$

où σ est l'involution associée à la structure réelle.

2.3. Formule de trace de Lefschetz pour une place complexe

Nous définissons la partie finie $\int'$ en utilisant la distribution sur $\mathbb{K}_\upsilon$ qui prolonge $\frac{du}{|1-u|}$ et dont la transformée de Fourier relative au caractère additif normalisé α_υ est nulle en 1.

Théorème 2.1.

Supposons que $\mathbb{K}_\upsilon = \mathbb{C}$. Pour $m \in \mathbb{N}$, soit $\pi(H^m, u)$ la représentation (2.1) *de $\mathbb{C}^*$ sur H^m. Alors pour $z = \frac{1+m}{2} + is$ avec $s \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int'_{\mathbb{C}^*} \frac{\mathrm{Trace}\,(\pi(H^m, u))|u|_{\mathbb{C}}^{z}}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\, d^*u = -2\,\frac{d}{ds}\,\Im \log L_{\mathbb{C}}(H^m, z). \tag{2.3}$$

Cela résulte des lemmes suivants :

Lemme 2.2.

Pour $\mathbb{K}_\upsilon = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}_\upsilon = \mathbb{C}$ et s réel, on a

$$\int'_{\mathbb{K}^*_\upsilon} \frac{|u|^{\frac{1}{2}+is}}{|1-u|}\, d^*u = -2\frac{d}{ds}\Im \log \Gamma_{\mathbb{K}\upsilon}\left(\frac{1}{2}+is\right).$$

Le terme min (p, q) apparaît de la manière suivante. Soit $\rho > 0$ et $f(\rho) = \inf(\rho, \rho^{-1})$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{|1-e^{i\theta}\rho|^2}\, d\theta = \frac{f(\rho)^{|n|}}{|1-\rho^2|}, \quad \rho \neq 1 \tag{2.4}$$

ce qui résulte du développement de Fourier pour $\rho \in [0, 1[$,

$$\frac{1-\rho^2}{|1-e^{i\theta}\rho|^2} = \frac{1}{1-\rho e^{i\theta}} + \frac{1}{1-\rho e^{-i\theta}} - 1 = \sum_{\mathbb{Z}} \rho^{|n|}\, e^{in\theta}$$

Lemme 2.3.

Pour $\mathbb{K}_\upsilon = \mathbb{C}$ et $p, q \in \mathbb{N}$ avec $m = p + q$, $z = \dfrac{1+m}{2} + is$, et $s \in \mathbb{R}$,

$$\int'_{\mathbb{C}^*} \frac{u^{-p}\,\bar{u}^{-q}\,|u|^z_{\mathbb{C}}}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\, d^*u = -2\frac{d}{ds}\Im \log \Gamma_{\mathbb{C}}\,(z - \min(p, q))$$

Soit $n = p - q$, on a $\min(p, q) = \dfrac{m}{2} - \dfrac{|n|}{2}$, $|u|_{\mathbb{C}} = u\,\bar{u}$, $u^{-p}\bar{u}^{-q} = e^{-in\theta}\,|u|_{\mathbb{C}}^{-\frac{m}{2}}$

avec θ = argument (u). On utilise alors (2.4) qui donne :

$$\int'_{\mathbb{C}^*} \frac{e^{-in\theta}\,|u|_{\mathbb{C}}^{\frac{1}{2}+is}}{|1-u|_{\mathbb{C}}}\, d^*u = -2\frac{d}{ds}\Im \log \Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{2} + is + \frac{|n|}{2}\right).$$

En utilisant les résultats d'un cours antérieur (98) on obtient alors une formule de trace de Lefschetz donnant le terme de gauche du théorème 2.1 à partir de l'action de $W = \mathbb{C}^*$ par multiplication sur $\underline{B} = \mathbb{C}$ et le fibré W équivariant associé à la représentation $\pi\,(H^m, u)$.

2.4. Formule de trace de Lefschetz pour une place réelle

Passons au cas d'une place archimédienne réelle,

Théorème 2.4.

Supposons que $\mathbb{K}_\upsilon = \mathbb{R}$. Pour $m \in \mathbb{N}$, soit $\pi\,(H^m, u)$ la représentation (2.2) *de W sur H^m. Alors pour $z = \dfrac{1+\mathrm{m}}{2} + is$ avec $s \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int'_W \frac{\mathrm{Trace}\,(\pi\,(H^m, u))|u|^z_{\mathbb{H}}}{|1-u|_{\mathbb{H}}}\, d^*u = -2\frac{d}{ds}\Im \log L_{\mathbb{R}}\,(H^m, z). \tag{2.5}$$

Dans le cas où m est impair, ou le cas $m = 2p$ et $h^{p+} = h^{p-}$, le calcul est semblable au cas complexe en utilisant la formule de duplication

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(z)\,\Gamma_{\mathbb{R}}(z+1) = \Gamma_{\mathbb{C}}(z)$$

Dans le cas $h^{p+} \neq h^{p-}$ on utilise les quaternions pour évaluer

$$|1-u|_{\mathbb{H}} = 1 + |w|^2, \quad u = wj,$$

ainsi que le lemme suivant :

Lemme 2.5.

Pour $z = \frac{1}{2} + is$ *et* $s \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{u^z}{1+u}\, d^*u = -2\frac{d}{ds}\Im \log\left(\Gamma_{\mathbb{R}}(z)/\Gamma_{\mathbb{R}}(z+1)\right)$$

2.5. Formule de trace d'Atiyah-Bott Lefschetz

Il est moins immédiat, dans le cas d'une place réelle, d'obtenir une formule de trace de Lefschetz donnant le terme de gauche du théorème 2.4. En effet le dénominateur dans la formule (2.5) n'est pas le déterminant mais la « norme réduite ». Pour obtenir le résultat il faut en fait tenir compte de la structure naturelle de variété sur $\mathbb{C}$ de l'espace $\underline{B} = \mathbb{H}$ des quaternions obtenue à partir de la structure d'espace vectoriel à droite sur $\mathbb{C}$.

On utilise alors le théorème d'Atiyah-Bott pour le $\bar{\partial}$-complexe sur $\underline{B} = \mathbb{H}$. Dans le calcul de la formule de Lefschetz on voit apparaître un numérateur $\chi(u)$ qui provient de l'action dans le fibré $\wedge^j T_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$ associé au fibré tangent $T_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$, on a

$$\chi(u) = \sum_j (-1)^j \chi_j(u) = \sum_j (-1)^j \operatorname{trace}(\wedge^j(u))$$

Cela donne le déterminant de $1 - u \in \mathbb{H}$

$$\chi(u) = |1-u|_{\mathbb{H}}$$

de sorte que la formule d'Atiyah-Bott donne la contribution cherchée :

$$\frac{\chi(u)}{|1-u|_{\mathbb{H}}^2} = \frac{1}{|1-u|_{\mathbb{H}}}$$

2.6. Cas des variétés, conjectural

Il reste à montrer dans le cas des variétés arithmétiques l'analogue des résultats de mon cours 98 et en particulier une formule de trace semi-locale pour l'ensemble de toutes les places archimédiennes. Elle serait de la forme (pour $\Lambda \to \infty$)

$$\operatorname{Trace}(Q_\Lambda U(h)) = 2h(1)B_m \log \Lambda + \sum_{v \in S} \int_{W_v}' \frac{h(|u|)\operatorname{Trace}(\pi_v(H^m, u))}{|1-u|_{\mathbb{H}_v}}\, d^*u + o(1)$$

où W est le groupe de Weil, $u \to |u| \in \mathbb{R}_+^*$ son module, $W_v \subset W$ les groupes locaux, $h \in S(\mathbb{R}_+^*) \subset S(W)$ et où B_m est le m-ième nombre de Betti de X.

Conférences

Septembre 2005, 3 conférences à Téhéran IPM.

Octobre 2005, 1 conférence à Bonn, MPI.

Novembre 2005, 2 conférences à KITP Santa-Barbara.

Janvier 2006, 1 conférence à Strasbourg.

Mars 2006, 3 conférences à Luminy.

Avril 2006, 1 conférence à Bonn, MPI.

Avril 2006, 1 conférence à Banff.

Mai 2006, 3 conférences à Vanderbilt (Fourth Spring Institute in Noncommutative Geometry and Operator Algebras).

Juin 2006, 2 conférences à Cargese.

Août 2006, 1 conférence à Cambridge.

Publications

Ali H. Chamseddine, Alain Connes, *Scale Invariance in the Spectral Action.* J. Math. Phys. 47 (2006).

Ali H. Chamseddine, Alain Connes, *Inner fluctuations of the spectral action,* hep-th/0605011.

Alain Connes, Matilde Marcolli, *A walk in the noncommutative garden*, math. QA/0601054.

Alain Connes, Caterina Consani, Matilde Marcolli, *Noncommutative geometry and motives : the thermodynamics of endomotives*, math. QA/0512138.

Alain Connes, Michel Dubois-Violette, *Noncommutative finite dimensional manifolds II. Moduli space and structure of noncommutative 3-spheres*, math. QA/0511337.

Alain Connes, Henri Moscovici, *Transgressions of the Godbillon-Vey class and Rademacher functions*, math. QA/0510683.