Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

J'ai abordé dans mon cours l'aspect *métrique* de la géométrie non commutative. Le cours comprenait deux parties. La première est la démonstration du théorème I.2. ci-dessous, qui permet grâce à la trace de Dixmier de reconstruire les ingrédients essentiels de la géométrie Riemannienne à partir de l'opérateur de Dirac. La seconde partie est la détermination de la structure fine de l'espace temps à partir des résultats expérimentaux de la physique des particules élémentaires rassemblés dans le modèle standard de Glashow-Weinberg-Salam. Cette structure métrique d'un univers double est obtenue en faisant l'hypothèse suivante : la géométrie de l'espace temps est spécifiée par l'opérateur de Dirac qui apparaît dans le modèle standard.

I. *Trace de Dixmier et géométrie Riemannienne*

I.1. *Distance géodésique et opérateur de Dirac*

Définition : *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre involutive. Un K-cycle sur $\mathcal{A}$ est donné par une représentation unitaire de $\mathcal{A}$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un opérateur non borné autoadjoint D dans $\mathcal{H}$ tel que :*

1) $[D,a]$ *est borné pour tout* $a \in \mathcal{A}$.

2) $(1 + D^2)^{-2}$ *est compact.*

Si l'espace $\mathcal{H}$ est $\mathbb{Z}/2$ gradué par un opérateur $\gamma = \gamma^*$, $\gamma^2 = 1$ tel que $\gamma a = a\gamma$ $\forall a \in \mathcal{A}$ et $\gamma D = - D\gamma$ nous dirons que $(\mathcal{H}, D, \gamma)$ est un K-cycle pair. L'opérateur de Dirac sur une variété spinorielle compacte M définit un K-cycle sur l'algèbre $\mathcal{A}$ des fonctions C^∞ sur cette variété. On a $\mathcal{H} = L^2(M,S)$ espace des sections de carré intégrable du fibré des spineurs S sur la variété M. L'opérateur D est l'opérateur de Dirac autoadjoint et non borné de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ et l'action de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ se fait par opérateurs de multiplication : $(f\xi)(x) = f(x)\,\xi(x)$ $\forall f \in \mathcal{A}$, $\xi \in \mathcal{H}$, $x \in M$. Alors que la théorie de Gel'fand montre que la donnée de l'algèbre $\mathcal{A}$ caractérise l'espace topologique M, il n'est pas difficile de vérifier que celle du K-cycle $(\mathcal{H}, D)$ caractérise la métrique Riemannienne sur M. En fait, si $p,q \in M$ sont deux points de M (i.e. deux caractères de l'algèbre $\mathcal{A}$), la distance géodésique $d(p,q)$ de p à q pour la structure Riemannienne s'obtient par la formule :

$$d(p,q) = \operatorname{Sup} \{ \mid f(p) - f(q) \mid \; ; \; f \in \mathcal{A}, \; \|[D,f]\| \leq 1\}.$$

En général, la donnée d'un K-cycle sur une algèbre involutive $\mathcal{A}$ définit une distance sur l'espace des états sur $\mathcal{A}$, et sur le spectre $\mathcal{A}$ quand $\mathcal{A}$ est commutative.

La difficulté principale, résolue grâce au théorème I.2. ci-dessous est de reconstruire les aspects non métriques de la géométrie Riemannienne, tels que forme volume, action de Yang Mills...

I.2. *Calcul de la classe de Hochschild du caractère d'un K-cycle*

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre involutive, $(\mathcal{H}, D, \gamma)$ un K-cycle pair sur $\mathcal{A}$. Notons $F = D \mid D \mid^{-1}$ le signe de D. Pour tout entier pair $n = 2q$ tel que $[F,a] \in \mathcal{L}^{2q+1}$ (*) $\forall a \in \mathcal{A}$ le caractère de dimension n de la classe de K-homologie $(\mathcal{H}, F, \gamma)$ est le n-cocycle cyclique suivant sur $\mathcal{A}$:

$$\tau(a^0,\ldots,a^n) = c_n \mathrm{Tr}_s(a^0[F,a^1] \ldots [F,a^n]) \qquad \forall\, a^j \in \mathcal{A}$$

où $c_n = (2\pi i)^{n/2}\,(n/2)\,!$ et $\mathrm{Tr}_s(X) = \frac{1}{2}\mathrm{Trace}\,(\gamma F[F,X])$. On a $\tau \in HC^n(\mathcal{A})$, groupe de cohomologie cyclique de $\mathcal{A}$ et pour que la dimension de τ soit $< n$ il faut et il suffit que sa classe de cohomologie de Hochschild : $I(\tau) \in H^n(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)$ soit nulle. Il existe alors $\tau' \in HC^{n-2}(\mathcal{A})$ tel que $\tau = S\tau'$ dans $HC^n(\mathcal{A})$, où S est l'opérateur de périodicité en cohomologie cyclique. Le théorème suivant permet de calculer la classe de Hochschild $I(\tau)$ à partir de la *trace de Dixmier* (cf. mon cours 87-88) d'un produit convenable de commutateurs, i.e. (Loc. Cit) de la valeur du résidu en $s = 1$ d'une fonction zeta convenable. Il montre en particulier que la condition $I(\tau) \neq 0$, i.e. l'impossibilité d'abaisser la dimension cohomologique de τ, impose la présence de *divergences logarithmiques* (dont la trace de Dixmier est le coefficient).

Pour $p > 1$ on note $\mathcal{L}^{p+}$ l'idéal bilatère formé des opérateurs compacts T tels que $\mu_n(T) = O(n^{-1/p})$ où $\mu_n(T)$ est la $n^{\text{ième}}$ valeur caractéristique de T.

Théorème 1. — *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre involutive, $(\mathcal{H}, D, \gamma)$ un K-cycle pair sur $\mathcal{A}$ et $n = 2q$ un entier pair tel que $\mid D \mid^{-1} \in \mathcal{L}^{n+}$.*

1) Pour tout procédé de sommation ω la formule suivante définit un cocycle de Hochschild sur $\mathcal{A}$:

$$\psi_\omega(a^0,\ldots,a^n) = c_n \mathrm{Tr}_\omega(\gamma a^0[D,a^1]\ldots[D,a^n] \mid D \mid^{-n})$$

où Tr_ω est la trace de Dixmier associée à ω.

(*) $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ désigne la classe de Schatten des opérateurs de puissance $p^{\text{ième}}$ traçable.

2) Si la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{A}$ est le dual de son homologie de Hochschild, chaque ψ_ω est égal à $I(\tau)$, *la classe de Hochschild du caractère de* $(\mathcal{H}, F, \gamma)$.

La *positivité* de la trace de Dixmier : $\mathrm{Tr}_\omega(A^*A) \geqslant 0 \ \forall \ A$, permet alors de construire un représentant positif φ_ω de la classe de Hochschild $I(\tau)$. Un cocycle de Hochschild φ de dimension paire $n = 2q$ sur une algèbre involutive est dit *positif* quand l'égalité suivante définit une forme hermitienne sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{A}^{\otimes(q+1)}$:

$$< a^0 \otimes a^1 \otimes \ldots \otimes a^q, b^0 \otimes b^1 \otimes \ldots \otimes b^q > = \varphi(b^{0*} a^0, a^1, \ldots, a^q, b^{q*}, \ldots, b^{1*})$$

pour tous $a^i \in \mathcal{A}$, $b^j \in \mathcal{A}$.

C'est cette positivité qui est essentielle dans la construction des espaces Hilbertiens de formes différentielles et de la fonctionnelle d'action de Yang Mills nécessaires pour la deuxième partie du cours.

II. *Structure fine de l'espace temps et modèle standard*

II.1. *Traduction*

La donnée de départ en géométrie non commutative est celle d'une algèbre involutive $\mathcal{A}$ munie d'un K-cycle $(\mathcal{H}, D, \gamma)$ dont la dimension est spécifiée par l'ordre de croissance des valeurs propres de $|D|$, i.e. par la condition :

$$|D|^{-1} \in \mathcal{L}^{n+}, I(\tau_n) \neq 0.$$

Le théorème I.2 montre alors que n est bien déterminé. Dans le cas particulier où $n = 4$ la trace de Dixmier permet de définir une fonctionnelle d'action qui généralise celle de Yang Mills et s'écrit sous la forme :

$$(*) \qquad Y(A,\psi) = \mathrm{Tr}_\omega(\theta^2 D_A^{-4}) + < \psi, D_A\psi >$$

où $A \in \Omega^1(\mathcal{A})$, $A = A^*$, est un élément autoadjoint de l'algèbre différentielle graduée universelle de $\mathcal{A}$. Avec $A = \Sigma\, a_j\, db_j$; a_j, $b_j \in \mathcal{A}$ on a alors :

$$D_A = D + \Sigma\, a_j\, [D,b_j], \ \theta = dA + A^2.$$

On obtient alors un dictionnaire complet avec le langage des théories de jauge. En particulier le groupe de jauge de deuxième espèce est le groupe unitaire de l'algèbre $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{A} \ ; \ uu^* = u^*u = 1\}.$$

II.2. *Modification électrofaible du lagrangien de l'électrodynamique*

Les résultats expérimentaux de la physique des particules ont montré que le lagrangien de l'électrodynamique $\mathcal{L}_{QED}$ devait être modifié pour incorporer les interactions faibles, découvertes et codifiées sous forme de termes supplémentaires $\mathcal{L}_W$ grâce aux étapes fondamentales suivantes :

— Découverte de la radioactivité (Becquerel 1896).

— Détection du spectre continu de rayon β (1914).

— Introduction théorique du neutrino (Pauli 1930).

— Théorie de Fermi (1934).

— Nature vectorielle et axiale des courants faibles et hypothèse du boson intermédiaire (1957).

— Mécanisme de brisure spontanée de symétrie et modèle de Glashow-Weinberg-Salam (1968).

II.3. *Structure fine de l'espace temps*

Le lagrangien de l'électrodynamique : $\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$ n'est autre que la fonctionnelle (*) appliquée au cas particulier où $\mathcal{A}$ est l'algèbre des fonctions sur une variété (l'espace temps Euclidien, i.e. à temps imaginaire) Riemannienne munie du K-cycle donnée par l'opérateur de Dirac. J'ai résolu dans mon cours (article en collaboration avec J. Lott) la question suivante : comment choisir l'algèbre $\mathcal{A}$ et le K-cycle $(\mathcal{H}, D, \gamma)$ de telle sorte que (*) donne le lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{QED}} + \mathcal{L}_{\mathrm{W}}$ de Glashow-Weinberg-Salam. L'espace *métrique* correspondant est le produit de l'espace temps Euclidien par un espace formé de 2 points p_+ et p_- avec $d(p_+,p_-) = 1/M_W$, l'inverse de la masse du boson intermédiaire. L'algèbre $\mathcal{A}$ invoque de façon essentielle les quaternions $\mathbb{H}$ qui apparaissent également dans la construction de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. J'ai discuté les conséquences physiques éventuelles de cette modification de l'espace temps.

PUBLICATIONS

Conjecture de Novikov et fibrés presque plats (avec M. Gromov et H. Moscovici), C.R. Acad. Sci., t. 310, Série I, pp. 273-277 (1990).

Essay on physics and non commutative geometry, *The Interface of Mathematics and Particle Physics,* ed. D.G. Quillen, G.B. Segal and Tsou S.T., Oxford University Press (1990).

Géométrie non commutative, Interéditions (1990) Paris (Ouvrage de 240 pages).

Matière à Pensée (avec J.P. Changeux), Ed. O. Jacob (1989) Paris.

CONFÉRENCES

Novembre 1989, Université Harvard, Particle physics and non commutative geometry.

Mars 1990, C.E.R.N., Particle physics and non commutative geometry.

Mai 1990, Oxford, Particle physics and non commutative geometry.