Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Géométrie des Algèbres Quadratiques

1. Introduction

J'ai développé cette année dans mon cours les relations entre les aspects « Géométrie Différentielle » et « Géométrie Algébrique » de la géométrie non-commutative, en me basant sur ma collaboration avec M. Dubois-Violette dans laquelle nous avons classifié les sphères noncommutatives de dimension trois. Nous développons la notion de *forme quadratique centrale* pour les algèbres quadratiques ainsi que la notion de *positivité* pour les formes centrales. Nous donnons ensuite une construction générale, indépendante de la théorie des fonctions ϑ, d'un homomorphisme d'une algèbre quadratique dans la C^*-algèbre produit croisé de la variété caractéristique par la correspondance canonique. Nous appliquons ensuite ces résultats aux sphères noncommutatives et calculons le Jacobien du revêtement ramifié ainsi obtenu.

2. Formes quadratiques centrales et produits croisés

Soit $\mathcal{A} = A(V, R) = T(V)/(R)$ une algèbre quadratique où V est l'espace vectoriel engendré par les générateurs et $(R) \subset T(V)$ l'idéal engendré par les relations. L'invariant géométrique $\{E, \sigma, \mathcal{L}\}$ est donné par une variété algébrique E, une correspondance σ sur E et un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur E. Ces données sont définies de telle sorte que l'on ait un homomorphisme h de $\mathcal{A}$ vers un produit croisé construit à partir des sections des puissances du fibré $\mathcal{L}$ sur les graphes des itérées de la correspondance σ. Ce produit croisé n'implique que les puissances positives de σ et reste très éloigné du cadre « semi-simple » des C^*-algèbres.

La notion de forme quadratique centrale développée ci-dessous va nous permettre de raffiner considérablement le morphisme h.

Définition 2.1

Soit $Q \in S^2(V)$ une forme bilinéaire symétrique sur V^* et C une composante de $E \times E$. Nous dirons que Q est <u>*centrale*</u> *sur C si pour tous (Z, Z') dans C et $\omega \in R$ on a,*

$$\omega(Z, Z')\, Q(\sigma(Z'), \sigma^{-1}(Z)) + Q(Z, Z')\, \omega(\sigma(Z'), \sigma^{-1}(Z)) = 0 \tag{2.1}$$

Par construction les formes bilinéaires symétriques sur V^* qui sont centrales sur C forment un sous-espace vectoriel de $S^2(V)$. On suppose C globalement invariante par l'application,

$$\tilde{\sigma}(Z, Z') := (\sigma(Z), \sigma^{-1}(Z')) \tag{2.2}$$

et Q centrale et non identiquement nulle sur C. On définit comme suit une algèbre C_Q produit croisé de l'anneau $\mathcal{R}$ des fonctions méromorphes sur C par la transformation $\tilde{\sigma}$. Soient $L, L' \in V$ tels que le produit $L(Z)\, L'(Z')$ soit non identiquement nul sur C. L'on adjoint deux générateurs W_L et $W'_{L'}$ qui vérifient les règles de produit croisé,

$$W_L f = (f \circ \tilde{\sigma}) W_L, \quad W'_{L'} f = (f \circ \tilde{\sigma}^{-1}) W'_{L'}, \quad \forall f \in \mathcal{R} \tag{2.3}$$

ainsi que les relations,

$$W_L W'_{L'} := \pi(Z, Z'), \qquad W'_{L'} W_L := \pi(\sigma^{-1}(Z), \sigma(Z')) \tag{2.4}$$

où la fonction $\pi(Z, Z')$ est donnée par le rapport,

$$\pi(Z, Z') := \frac{L(Z)\, L'(Z')}{Q(Z, Z')} \tag{2.5}$$

La dépendance en L, L' est soumise aux relations,

$$W_{L2} := \frac{L_2(Z)}{L_1(Z)} W_{L1} \qquad\qquad W'_{L'2} := W'_{L'1} \frac{L'_2(Z')}{L'_1(Z')} \tag{2.6}$$

qui montre que l'algèbre C_Q ne dépend pas du choix de (L, L'). On a alors

Lemme 2.2

Soit Q centrale et non identiquement nulle sur C.

(i) L'égalité suivante définit un homomorphisme $\rho : \mathcal{A} \mapsto C_Q$

$$\sqrt{2}\, \rho(Y) := \frac{Y(Z)}{L(Z)} W_L + W'_{L'} \frac{Y(Z')}{L'(Z')}, \quad \forall Y \in V \tag{2.7}$$

(ii) Si $\sigma^4 \neq 1$, alors $\rho(Q) = 1$ où l'on considère Q comme élément de $T(V)/(R)$.

3. Géométrie algébrique et C^*-algèbres

Soit $\mathcal{A} = A(V, R)$ une algèbre quadratique *involutive i.e.* une algèbre quadratique sur $\mathbb{C}$ qui est une $*$-algèbre avec involution $x \mapsto x^*$ préservant le sous-espace V

des générateurs. De manière équivalente l'on peut spécifier le sous-espace de V formé des éléments hermitiens. L'espace vectoriel V admet une structure réelle donnée par l'involution antilinéaire $v \mapsto j(v)$ qui est la restriction de $x \mapsto x^*$. Comme $(xy)^* = y^*x^*$ pour $x, y \in \mathcal{A}$, l'espace R des relations vérifie

$$(j \otimes j)\,(R) = t(R) \tag{3.1}$$

dans $V \otimes V$ où $t: V \otimes V \to V \otimes V$ est la transposition $v \otimes w \mapsto t(v \otimes w) = w \otimes v$. Cela implique

Lemme 3.1

La variété caractéristique est stable par l'involution $Z \mapsto j(Z)$ et l'on a

$$\sigma(j(Z)) = j(\sigma^{-1}(Z))$$

Soit alors C une composante invariante de $E \times E$, nous dirons que C est *j-réelle* si elle est globalement invariante par l'involution

$$\tilde{j}(Z, Z') := (j(Z'), j(Z)) \tag{3.2}$$

Le lemme 3.1 montre que cette involution commute avec l'automorphisme $\tilde{\sigma}$ (2.2) et l'on a

Proposition 3.2

Soit C une composante invariante j-réelle *de $E \times E$ et Q centrale sur C telle que*

$$\overline{Q(\tilde{j}(Z, Z'))} = Q(Z, Z'), \qquad \forall (Z, Z') \in C, \tag{3.3}$$

1. L'égalité suivante définit une involution sur le produit croisé C_Q,

$$f^*(Z, Z') := \overline{f(\tilde{j}(Z, Z'))}, \qquad (W_L)^* = W'_{j(L)}, \qquad (W'_{L'})^* = W_{j(L')}$$

*2. L'homomorphisme ρ du lemme 2.2 est un *-homomorphisme.*

Nous avons jusqu'alors traité Z et Z' comme des variables indépendantes. Nous allons maintenant restreindre la construction au graphe de j *i.e.* à $\{(Z, Z') \in C \mid Z' = j(Z)\}$. En composant ρ avec la restriction au sous-ensemble $K = \{Z \mid (Z, j(Z)) \in C\}$ on obtient en fait un *-homomorphisme θ de $\mathcal{A} = A(V, R)$ vers une C^*-algèbre de la forme $C(K) \times_{\sigma, \mathcal{L}} \mathbb{Z}$ qui implique tout l'invariant géométrique $(E, \sigma, \mathcal{L})$ et utilise la forme quadratique centrale Q comme une métrique hermitienne sur le fibré $\mathcal{L}$ pourvu que Q soit *positive* au sens suivant :

Définition 3.3

Soit C une composante invariante j-réelle *de $E \times E$ et Q centrale sur C. Alors Q est positive sur C si elle vérifie* (3.3) *et*

$$Q(Z, j(Z)) > 0, \qquad \forall Z \in K.$$

L'on peut alors doter le fibré $\mathcal{L}$ dual du fibré tautologique de $P(V^*)$ de la métrique hermitienne définie par $(\forall f,\ g \in C(K))$

$$\langle fL,\ gL'\rangle_Q(Z) = f(Z)\ \overline{g(Z)}\ \frac{L(Z)\ \overline{L'(Z)}}{Q(Z,\ j(Z))} \qquad L,\ L' \in V, \quad Z \in K \tag{3.4}$$

La notion de produit croisé généralisé utilisée pour définir la C^*-algèbre $C(K) \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z}$ est due à M. Pimsner. Étant donnés un espace compact K, un homéomorphisme σ de K et un fibré en droites hermitien $\mathcal{L}$ sur K la C^*-algèbre $C(K) \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z}$ est le produit croisé généralisé de $C(K)$ par le C^*-bimodule hilbertien associé à $\mathcal{L}$ et σ. Pour $n \geq 0$, soit $\mathcal{L}^{\sigma n}$ l'image réciproque de $\mathcal{L}$ par σ^n et

$$\mathcal{L}_n : = \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{\sigma} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}^{\sigma n-1} \tag{3.5}$$

On considère l'algèbre involutive engendrée par les monômes

$$\xi W^n,\ W^{*n}\eta^*, \quad \xi,\ \eta \in C(K,\ \mathcal{L}_n) \tag{3.6}$$

tels que :

$$(\xi_1 W^{n1})\ (\xi_2 W^{n2}) : = (\xi_1 \otimes (\xi_2 \circ \sigma^{n1}))\ W^{n1+n2} \tag{3.7}$$

La structure hermitienne de $\mathcal{L}_n$ permet de définir les produits $\eta^*\xi$ et $\xi\eta^*$ pour $\xi,\ \eta \in C(K,\ \mathcal{L}_n)$. Ce produit se prolonge de manière unique en un produit de $*$-algèbre avec

$$(W^{*k}\eta^*)\ (\xi W^k) : = (\eta^*\xi) \circ \sigma^{-k}, \qquad (\xi W^k)\ (W^{*k}\eta^*) : = \xi\eta^* \tag{3.8}$$

La norme de C^*-algèbre de $C(K) \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z}$ s'obtient comme dans le cas des produits croisés ordinaires et la moyennabilité du groupe $\mathbb{Z}$ montre qu'il n'y a pas lieu de faire la distinction entre les normes réduites et maximales.

Théorème 3.4

Soit $K \subset E$ un compact σ-invariant et Q une forme quadratique centrale strictement positive sur $\{(Z,\ j(Z))\ ;\ Z \in K\}$. Soit $\mathcal{L}$ la restriction à K du dual du fibré tautologique de $P(V^*)$ muni de la métrique $\langle , \rangle_Q$.

(i) L'égalité $\sqrt{2}\ \theta\,(Y) : = YW + W^*\bar{Y}^*$ définit un $*$-homomorphisme

$$\theta : \mathcal{A} = A(V,\ R) \mapsto C(K) \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z}$$

(ii) Pour tout $Y \in V$ la C^*-norme de $\theta\,(Y)$ vérifie

$$\mathrm{Sup}_K \parallel Y \parallel \leq \sqrt{2} \parallel \theta\,(Y) \parallel \leq 2\ \mathrm{Sup}_K \parallel Y \parallel$$

(iii) Si $\sigma^4 \neq \mathbb{1}$, alors $\theta\,(Q) = 1$ où $Q \in T(V)/(R)$.

4. Applications aux sphères $S^3_\varphi \subset \mathbb{R}^4_\varphi$

Nous appliquons ces résultats aux algèbres $C_{\mathrm{alg}}\,(\mathbb{R}^4_\varphi)$ considérées dans mon cours 2000-2001. On rappelle la présentation de cette algèbre quadratique associée aux trois angles φ_k. Elle admet quatre générateurs x^μ et six relations :

$$\sin(\varphi_k)\,[x^0, x^k]_+ = i\cos(\varphi_l - \varphi_m)\,[x^l, x^m] \tag{4.1}$$

$$\cos(\varphi_k)\,[x^0, x^k] = i\sin(\varphi_l - \varphi_m)\,[x^l, x^m]_+, \tag{4.2}$$

où $[a, b]_+ = ab + ba$ est l'anticommutateur.

On prend la forme quadratique qui définit la sphère S^3_φ par l'équation $Q = 1$:

$$Q(x, x') := \sum x_\mu x'_\mu \tag{4.3}$$

L'on a dans le cas générique :

Proposition 4.1

1) La variété caractéristique est réunion de quatre points et d'une courbe elliptique F_φ.

2) La forme quadratique Q est centrale et positive sur $F_\varphi \times F_\varphi$.

Dans des coordonnées convenables les équations de la courbe elliptique F_φ sont de la forme

$$\frac{Z_0^2 - Z_1^2}{s_1} = \frac{Z_0^2 - Z_2^2}{s_2} = \frac{Z_0^2 - Z_3^2}{s_3} \tag{4.4}$$

où $s_k := 1 + t_l t_m$, $t_k := \tan \varphi_k$.

La positivité de Q est automatique car dans les coordonnées x l'involution j_φ de la *-algèbre $C_{\mathrm{alg}}(\mathbb{R}^4_\varphi)$ est simplement la conjugaison $j_\varphi(Z) = \bar{Z}$, de sorte que $Q(X, j_\varphi(X)) > 0$ pour $X \neq 0$.

Corollaire 4.2

*Le Théorème 3.4 définit un *-homomorphisme*

$$\theta : C_{\mathrm{alg}}(S^3_\varphi) \mapsto C^\infty(F_\varphi \times_{\varphi,\mathcal{L}} \mathbb{Z})$$

de $C_{\mathrm{alg}}(S^3_\varphi)$ *vers le produit croisé* $C^\infty(F_\varphi) \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z}$.

Il en résulte que l'on obtient une C^*-algèbre $C^*(S^3_\varphi)$ comme complétion de $C_{\mathrm{alg}}(S^3_\varphi)$ pour la semi-norme,

$$\| P \| := \operatorname{Sup} \| \pi(P) \| \tag{4.5}$$

où π varie parmi toutes les représentations unitaires de $C_{\mathrm{alg}}(S^3_\varphi)$. Il est clair que (4.5) définit une C^*-semi-norme finie sur $C_{\mathrm{alg}}(S^3_\varphi)$ car l'équation de la sphère $\sum x_\mu^2 = 1$ et l'auto-adjonction $x_\mu = x_\mu^*$ montrent que dans toute représentation unitaire on a

$$\| \pi(x_\mu) \| \leq 1, \qquad \forall \mu.$$

Le corollaire 4.2 et le Théorème 3.4 donnent une minoration de la C^*-norme sur le sous-espace V des générateurs.

La correspondance σ sur F_φ pour φ générique, est une translation de module η de la courbe elliptique et l'on distingue le cas *pair* où elle préserve les deux composantes de la courbe réelle $F_\varphi \cap P_3(\mathbb{R})$ du cas impair où elle les échange.

Proposition 4.3

Soit φ générique et pair.

(i) Le produit croisé $C(F_\varphi) \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z}$ est isomorphe au tore suspension de l'automorphisme β du tore noncommutatif $\mathbb{T}^2_\eta = C_\varphi \times_\sigma \mathbb{Z}$ donné sur les générateurs par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) Le produit croisé $F_\varphi \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z}$ est une variété noncommutative de dimension 3 dotée d'une action elliptique du groupe de Heisenberg $\mathfrak{h}_3$ et d'une trace invariante τ.

Il en résulte que l'on peut appliquer les résultats de ma note « C^*-algèbres et Géométrie Différentielle » de 1980 et décrire la structure différentiable. Ces variétés ont été analysées par Abadie-Exel en termes de produits croisés par un C^*-bimodule.

L'intégration par rapport à la forme volume invariante dv de F_φ donne une trace $\mathfrak{h}_3$-invariante τ,

$$\tau(f) = \int f dv, \ \forall f \in C^\infty(F_\varphi)$$
$$\tau(\xi W^k) = \tau(W^{*k}\,\eta^*) = 0, \quad \forall k \neq 0 \tag{4.6}$$

La classe fondamentale est donnée par le 3-cocycle cyclique,

$$\tau_3(a_0, a_1, a_2, a_3) = \sum \varepsilon_{ijk}\ \tau(a_0\ \delta_i(a_1)\ \delta_j(a_2)\ \delta_k(a_3)) \tag{4.7}$$

où les δ_j sont les opérateurs de l'action de $\mathfrak{h}_3$.

L'on a des résultats analogue dans le cas impair.

Soit φ générique et pair et $C \subset F_\varphi$ un compact minimal σ-invariant. Le corollaire 4.2 donne par restriction un homomorphisme,

$$\theta_v : C_{\mathrm{alg}}(S^3_\varphi) \mapsto C^\infty(\mathbb{T}^2_\eta) \tag{4.8}$$

Théorème 4.4

L'homomorphisme $\theta_v : C_{\mathrm{alg}}(S^3_\varphi) \mapsto C^\infty(\mathbb{T}^2_\eta)$ se factorise par un homomorphisme

$$\tilde{\theta}_v : C_{\mathrm{alg}}(S^3_\varphi) \mapsto K_q \times_\sigma \mathbb{Z}$$

vers le produit croisé généralisé du corps K_q des fonctions méromorphes sur la courbe elliptique F_φ par le sous-groupe du groupe de Galois $Aut_{\mathbb{C}}(K_q)$ engendré par σ.

Son image engendre le facteur hyperfini de type II_1 par fermeture faible pour la trace donnée par l'intégration sur le cycle $K(v)$.

Les éléments de K_q qui ont des pôles sur C sont non-bornés et donnent des éléments de l'anneau régulier de von-Neumann, mais tous les éléments de $\theta_v(C_{\mathrm{alg}}(S^3_\varphi))$ sont finis sur C. La généralisation des règles du produit croisé (2.4) et la formule $WW' = \gamma(Z)$ sont semblables au rôle des 2-cocycles dans la théorie de Brauer des algèbres simples centrales.

5. Le Jacobien du revêtement de S^3_φ

Dans cette section nous analysons le morphisme d'algèbres involutives

$$\theta : C_{\mathrm{alg}}(S^3_\varphi) \mapsto C^\infty(F_\varphi \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z}) \tag{5.1}$$

du Corollaire 4.2, en calculant son Jacobien au sens de la géométrie noncommutative.

Le Jacobien d'une application différentiable $\varphi : M \mapsto N$ de variétés est le rapport $\varphi^*(\omega_N)/\omega_M$ de l'image réciproque de la forme volume ω_N de N à la forme volume ω_M de M. En géométrie noncommutative, les formes différentielles ω de degré d sont les classes de Hochschild $\tilde{\omega} \in HH_d(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} = C^\infty(M)$. De plus, en termes d'algèbres, l'image réciproque $\varphi^*(\omega_N)$ devient $\varphi^t_*(\tilde{\omega}_N)$ où $\varphi^t(f) := f \circ \varphi$, $\forall f \in C^\infty(N)$.

La sphère noncommutative S^3_φ admet une « forme volume » canonique donnée par le 3-cycle de Hochschild $\mathrm{ch}_{\frac{3}{2}}(U)$ donné par

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_{\frac{3}{2}}(U) = &\sum \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \cos(\varphi_\alpha - \varphi_\beta + \varphi_\gamma - \varphi_\delta)\, x^\alpha\, dx^\beta\, dx^\gamma\, dx^\delta - \\ i &\sum \sin 2(\varphi_u - \varphi_v)\, x^u\, dx^v\, dx^u\, dx^v\end{aligned} \tag{5.2}$$

où $\varphi_0 := 0$.

Notre but est de calculer

$$\theta_*(\mathrm{ch}_{\frac{3}{2}}(U)) \in HH_3(C^\infty(F_\varphi \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z})) \tag{5.3}$$

Les calculs de l'homologie cyclique et de l'homologie de Hochschild pour les tores noncommutatifs que j'avais faits dans mon article IHES des années 80 montrent qu'il suffit pour comparer $\theta_*(\mathrm{ch}_{\frac{3}{2}}(U))$ avec la forme volume de $F_\varphi \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z}$ de calculer son accouplement avec le cocycle de Hochschild suivant :

$$\tau_h \in HH^3(C^\infty(F_\varphi \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z}))$$

donné, pour tout élément h du centre de $C^\infty(F_\varphi \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z})$, par

$$\tau_h(a_0, a_1, a_2, a_3) = \tau_3(h\, a_0, a_1, a_2, a_3) \tag{5.4}$$

où $\tau_3 \in HC^3(C^\infty(F_\varphi \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z}))$ est la classe fondamentale définie en (4.7).

Soit φ générique et pair, supposons pour simplifier que $\varphi_j \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sont en ordre cyclique $\varphi_k < \varphi_l < \varphi_m$ pour un $k \in \{1, 2, 3\}$. Soit $F_\varphi(0)$ l'une des composantes connexes de l'ensemble des points imaginaires de F_φ,

$$\{Z \in F_\varphi \mid I_0(Z) = \bar{Z}\}, \qquad I_0(Z_0) = -Z_0,\ I_0(Z_k) = Z_k \tag{5.5}$$

On identifie le centre de $C^\infty(F_\varphi \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z})$ avec $C^\infty(F_\varphi(0))$.

Théorème 5.1

Soit $h \in$ *Centre* $(C^\infty(F_\varphi \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z})) \sim C^\infty(F_\varphi(0))$. *Alors*

$$\langle ch_{\frac{3}{2}}(U),\ \tau_h\rangle = 6\,\pi\,\Omega \int_{F\varphi(0)} h(Z)\, dR(Z)$$

où Ω est la période donnée par l'intégrale elliptique de première espèce,

$$\Omega = \int_{C_\varphi} \frac{Z_k dZ_0 - Z_0 dZ_k}{Z_l Z_m}$$

et R la fraction rationnelle,

$$R(Z) = t_k\, \frac{Z_m^2}{Z_m^2 + c_k\, Z_l^2}$$

avec $c_k = \mathrm{tg}(\varphi_l)\cot(\varphi_k - \varphi_l)$.

Posons comme ci-dessus $s_k := 1 + t_l t_m$, $t_k := \tan \varphi_k$, on a

Lemme 5.2

(i) La forme différentielle

$$\chi := \frac{Z_k dZ_0 - Z_0 dK_k}{s_k\, Z_l Z_m} \tag{5.6}$$

est indépendante de k et est (à normalisation prés) l'unique forme holomorphe de type (1, 0) *sur* F_φ.

(ii) La différentielle de R est donnée sur F_φ *par* $dR = J(Z)\,\chi$ *où*

$$J(Z) = 2\,(s_l - s_m)\, c_k\, t_k\, \frac{Z_0\, Z_1\, Z_2\, Z_3}{(Z_m^2 + c_k\, Z_l^2)^2} \tag{5.7}$$

d'où l'on déduit le calcul du Jacobien.

Corollaire 5.3

Le Jacobien de θ est donné par

$$\theta_*(ch_{\frac{3}{2}}(U)) = 3\,\Omega\, JV$$

où J est l'élément du centre $C^\infty(F_\varphi(0))$ *de* $C^\infty(F_\varphi \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z})$ *donné par (5.7).*

On développe ensuite un calcul différentiel de manière purement algébrique pour comprendre la forme du résultat 5.1. Cela permet de montrer sans calculs que le dénominateur de la forme différentielle $R(Z)$ du Théorème 5.1 est la forme quadratique centrale $Q(Z, Z')$ évaluée sur les couples $(Z, \bar{Z})$. En fait l'espace de dimension deux des formes quadratiques centrales donne des fonctions naturelles de la forme

$$R(Z) = \frac{P(Z, \bar{Z})}{Q(Z, \bar{Z})} \tag{5.8}$$

et modulo les constantes l'espace obtenu est de dimension un.

Il est formé de fonctions σ-invariantes, en effet :

Lemme 5.4

Soit Q une forme quadratique centrale non nulle sur C et P une forme quadratique centrale, alors la fonction

$$R(Z, Z') = \frac{P(Z, Z')}{Q(Z, Z')}$$

est invariante par $\tilde{\sigma}$.

On compare alors la forme différentielle dR avec celle du Théorème 5.1 et l'on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.5

Soit φ générique et pair. Pour toute forme quadratique centrale P non proportionnelle à Q il existe un scalaire μ tel que

$$\langle ch_{\frac{3}{2}}(U),\ \tau_h\rangle = \mu \int h(Z)\ dR(Z), \qquad \forall h \in \text{Centre } C^\infty(F_\varphi \times_{\sigma,\mathcal{L}} \mathbb{Z}),$$

où

$$R(Z) = \frac{P(Z, \bar{Z})}{Q(Z, \bar{Z})}.$$

Conférences

Septembre 2004, 1 conférence à Oslo (Abel Symposium).

Septembre 2004, 1 conférence à Oberwolfach.

Septembre 2004, 1 conférence à Bonn.

Octobre 2004, 1 conférence au CERN.

Octobre 2004, 1 conférence à ICTP Trieste.

Avril 2005, 3 conférences à Shangai.

Avril 2005, 6 conférences à Vanderbilt.

Mai 2005, 3 conférences à Vanderbilt (Third Spring Institute in Noncommutative Geometry and Operator Algebras).

Juin 2005, 1 conférence à la BNF (sur Galois).

Juin 2005, 1 conférence à Zurich (Einstein Symposium).

Juillet 2005, 1 conférence à Paris (Einstein Symposium).

Publications

A. Connes et M. Marcolli, Renormalization and motivic Galois theory. (2004), Math NT/0409306.

A. Connes et M. Dubois-Violette, Yang-Mills and related Algebras. (2004), Math-ph/0411062.

A. Connes et M. Marcolli, Renormalization, the Riemann-Hilbert correspondence and motivic Galois theory. (2004), Hep-th/0411114.

A. Connes, La Pensée d'Evariste Galois et le Formalisme moderne. (2005), Conférence BNF.

A. Connes et M. Marcolli, Quantum Fields and Motives. (2005), Hep-th/0504085.

A. Connes, M. Marcolli, N. Ramachandran, KMS states and complex multiplication. (2005), math. OA/0501424.

A. Connes et H. Moscovici, Background independent geometry and Hopf cyclic cohomology. (2005), math.QA/0505475.