Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann

J'ai montré cette année dans mon cours comment ramener l'hypothèse de Riemann à une formule de trace sur un espace non commutatif. Ceci donne une interprétation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann ainsi qu'une interprétation géométrique des formules explicites de la théorie des nombres.

Introduction

Soit k un corps global. Ainsi k est un sous-corps discret et cocompact de l'anneau localement compact A des adèles de k. Le groupe multiplicatif J_k des idèles de k agit sur A par multiplications,

$$(j, a) \in J_k \times A \to j\, a \in A. \tag{1}$$

Nous analysons l'action du groupe $C_k = J_k/k^*$ des classes d'idèles sur l'espace quotient

$$X = A/k^*. \tag{2}$$

Dans la Section 1 nous calculons la distribution D sur C_k caractère de la représentation naturelle de C_k dans l'espace de Hilbert $L^2_\delta(X)$ des fonctions de carré intégrale sur X (le réel δ, $\delta > 1$, précise le choix de la mesure sur X). On pose $(U(j)\eta)\,(a) = \eta\,(j^{-1}\,a)$ pour $j \in C_k$, $a \in X$. Le résultat (théorème 1) s'écrit,

$$D(h) = \hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \sum_{\chi\in\Gamma,\, s\in\mathbb{R},\, L(\chi, \frac{1}{2} + is)=0} \hat{h}(\chi, 1/2 + is) \tag{3}$$

où $\hat{h}$ désigne la transformée de Fourier de la fonction h sur C_k, et où l'on identifie le groupe des quasi-caractères de C_k au produit d'un groupe abélien discret Γ par le groupe des quasi-caractères principaux $a \to |a|^z$, $z \in \mathbb{C}$. Il est crucial que le troisième terme du membre de droite de (3) soit précédé du signe – et que la somme ne porte que sur les quasi-caractères de *partie réelle* égale à $\frac{1}{2}$.

Le résultat principal de la section 1 est le théorème 1 qui donne de manière très simple un espace de Hilbert et une action de C_k qui admet pour spectre exactement les zéros des fonctions $L(\chi, z)$ situés sur la droite critique. Cet espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est le troisième terme d'une suite exacte de C_k-modules,

$$0 \to L^2_\delta(X)_0 \to L^2_\delta(C_k) \to \mathcal{H} \to 0 \tag{4}$$

où $L^2_\delta(X)_0$ est un sous-espace de codimension 2 de $L^2_\delta(X)$ et où $L^2_\delta(C_k)$ est une variante de la représentation régulière de C_k. C'est cette suite exacte qui rend compte du signe – dans (3).

Dans la section 2 nous calculons les points fixes de l'action de C_k sur X. Nous montrons que la contribution de la place υ à la trace de l'action de C_k, donnée par les formules de Atiyah-Bott et de Guillemin-Sternberg, est

$$D_\upsilon(h) = \int_{k_\upsilon^*} \frac{h(u^{-1})}{|1 - u|} \, d^* u \tag{5}$$

où k_υ désigne le corps local associé à υ et où k_υ^* est identifié naturellement à un sous-groupe de C_k, les mesures de Haar de C_k et k_υ^* étant normalisées comme dans (7). On notera que les distributions (3) et (5) ne sont bien définies que dans l'hyperplan des fonctions h, $h(1) = 0$ (Cela tient pour (3) à la nécessité de régulariser la trace, ce qui fait apparaître une divergence proportionnelle à $h(1)$, la même divergence apparaît dans (5).).

Les formules explicites de la théorie des nombres réduisent l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L de k à démontrer l'égalité

$$D = \Sigma \, D_\upsilon \tag{6}$$

(sur l'hyperplan $h(1) = 0$).

Notations. Soient $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 1$ et $k(t) = (1 + t^2)^{\delta/2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Étant donné un groupe localement compact modulé G, $G \xrightarrow{|\,|} \mathbb{R}_+^*$, on notera $d^* g$ l'unique mesure de Haar sur G normalisée par

$$\int_{1 \leq |g| \leq \Lambda} d^* g \sim \text{Log}\,\Lambda \qquad \text{quand } \Lambda \to \infty. \tag{7}$$

On note $L^2_\delta(G)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur G pour la mesure $k(\text{Log}\,|g|)\, d^* g$ et V la représentation régulière de G dans $L^2_\delta(G)$, de sorte que $(V(g)\,\eta)\,(u) = \eta(g^{-1}\,u)$ $\forall\, u, g \in G$.

I. Le C_k module $L^2_\delta(X)$, $X = A/k^*$

Soit $S(A)$ l'espace de Schwartz-Bruhat des fonctions tests sur A et posons

$$S(A)_0 = \{f \in S(A) \,;\, f(0) = \int f\,dx = 0\} \tag{8}$$

où dx est une mesure de Haar sur le groupe additif A. Pour toute $f \in S(A)_0$ on obtient une fonction à décroissance exponentielle sur C_k en posant,

$$E(f)\,(u) = |u|^{1/2} \sum_{k^*} f(qu). \tag{9}$$

Théorème 1. *Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert conoyau de l'application E : $S(A)_0 \to L^2_\delta(C_k)$ et soit W la représentation de C_k dans $\mathcal{H}$ obtenue par passage au quotient de la représentation régulière de C_k dans $L^2_\delta(C_k)$. Pour toute fonction $h \in S(C_k)$ l'opérateur*

$$W(h) = \int W(g)\, h(g)\, d^*g$$

est traçable (i.e. $\in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$) et l'on a,

$$\text{Trace } W(h) = \sum_{\chi\in\Gamma,\, s\in\mathbb{R},\, L(\chi, \frac{1}{2}+is)=0} \hat{h}(\chi, is)$$

où la somme est effectuée sur les zéros des fonctions L situés sur la droite critique $\frac{1}{2} + i\mathbb{R}$, comptés avec multiplicité $< \frac{1+\delta}{2}$.

L'application E vérifie l'équivariance,

$$EU(g) = |g|^{1/2}\, V(g)\, E \tag{10}$$

où V désigne la représentation régulière de C_k sur L^2_δ,

$$(V(g)\,\eta)\,(u) = \eta\,(g^{-1}u) \tag{11}$$

et où U désigne la représentation de C_k sur $S(A)$,

$$(U(g)\,f)\,(x) = f(g^{-1}x) \qquad \forall\, x \in A. \tag{12}$$

Il résulte de (10) que la fermeture de l'image de E est un sous-espace invariant de L^2_δ.

La représentation V n'est pas unitaire mais vérifie

$$\|V(g)\| = 0\,(|\text{Log}\,|g||)^\delta \qquad g \to \infty \tag{13}$$

ce qui reste vrai pour W et suffit à en déduire a priori que le spectre de W est unitaire. Bien entendu le théorème 1 détermine entièrement ce spectre.

En prenant $k = \mathbb{Q}$ et le sous-espace $\mathcal{H}_1$ de $\mathcal{H}$ associé au caractère $\chi = 1$, par

$$(14) \qquad \mathcal{H}_\chi = \{\eta \in \mathcal{H} \ ; \ W(g)\,\eta = \chi(g)\,\eta \qquad \forall\, g \in C_k,\ |g| = 1\}$$

on obtient,

Corollaire 2. *Soit S le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $W(g)$ où g parcourt la composante connexe de l'unité dans C_k, $k = \mathbb{Q}$.*

$$S\,\eta = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{W(1+\varepsilon) - 1}{\varepsilon}\,\eta \qquad \eta \in \mathcal{H}_1.$$

L'opérateur S est fermé, à spectre discret et imaginaire pur. On a $is \in$ Spectre S *ssi $\frac{1}{2} + is$ est un zéro de partie réelle $\frac{1}{2}$ de la fonction ζ de Riemann.*

Donnons une esquisse de la démonstration du théorème 1 en prenant pour fixer les idées $k = \mathbb{Q}$, $\delta = 2$ et en se restreignant au sous espace $\mathcal{H}_1$. On commence par identifier le dual de $\mathcal{H}_1$ au sous-espace de $L^2_{-\delta}(\mathbb{R}_+^*)$ (noter le $-\delta$)

$$(15) \qquad \mathcal{H}_1^* = \left\{\eta \in L^2_{-\delta}(\mathbb{R}_+^*)\ ;\ \int E(f)\,(x)\,\eta(|x|)\,d^*x = 0 \qquad \forall\, f \in S(A)_0\right\}.$$

Soit alors $\eta \in \mathcal{H}_1^*$ et $\varphi = \hat{\eta}$ la distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ transformée de Fourier de η pour la dualité $\langle \lambda, s \rangle = \lambda^{is}$ entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$. On obtient alors l'identité

$$(16) \qquad \left\langle \int \Delta\left(\frac{1}{2} + is\right)\varphi(s)\,ds,\ f\right\rangle = 0 \qquad \forall\, f \in S(A)_0$$

où $\Delta(z)$, $z \in \mathbb{C}$ est la distribution homogène

$$(17) \qquad \langle \Delta(z), f \rangle = \int_{J_k} f(x)\,|x|^z\,d^*x \qquad \text{si } \mathrm{Re}\, z > 1.$$

On spécialise alors (16) aux fonctions $f = 1_R \otimes g$ où R est le sous-anneau compact maximal des adèles finies et où $g \in S(\mathbb{R})_0$. On en déduit, en utilisant l'égalité,

$$(18) \qquad \left\langle \Delta\left(\frac{1}{2} + is\right),\ 1_R \otimes g\right\rangle = \zeta\left(\frac{1}{2} + is\right)\int g(u)\,|u|^{-1/2+is}du$$

que la transformée de Fourier (sur $\mathbb{R}_+^*$) de la distribution tempérée $\zeta\left(\frac{1}{2} + is\right)\varphi(s)$ est proportionnelle à $u^{1/2}$, $u \in \mathbb{R}_+^*$. Comme cette fonction est à croissance exponentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ (où la variable additive est $\log u$) on en conclu que $\zeta\left(\frac{1}{2}+is\right)\varphi(s)$ est nulle au sens des distributions. Il en résulte que φ est une somme de masses de Dirac δ_s, $\zeta\left(\frac{1}{2}+is\right)=0$. Réciproquement si $s\in\mathbb{R}$ vérifie $\zeta\left(\frac{1}{2}+is\right)=0$ on a $\Delta\left(\frac{1}{2}+is\right)=0$ et la fonction $\eta(|x|)=|x|^{is}$ appartient à $\mathcal{H}_1^*$. Pour montrer que $W(h)\in\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ pour $h\in S(C_k)$ on utilise (13) et le contrôle suivant du rang de $W(h)$ quand le support de $\hat{h}$ est contenu dans $\Lambda\le|s|\le\Lambda+1$,

$$\text{Rang } W(h)=0(\log\Lambda). \tag{19}$$

Passons à la définition du C_k-module $L^2_\delta(X)$. On définit d'abord le sous-module $L^2_\delta(X)_0$ comme le séparé complété de $S(A)_0$ pour la semi-norme pré-hilbertienne,

$$\|f\|_\delta^2=\int\left|\sum_{k^*}f(qx)\right|^2|x|\;k(\log|x|)\;d^*x. \tag{20}$$

On notera que toute différence $f-f_q$ d'une fonction f et de f_q, $f_q(x)=f(qx)$ pour $q\in k^*$, est dans le noyau de la semi-norme (20). On notera également que la mesure $|x|\;d^*x$ a la même homogénéité que la mesure de Haar additive sur A.

On a une suite exacte tautologique de C_k-modules,

$$0\to L^2_\delta(X)_0\to L^2_\delta(C_k)\to\mathcal{H}\to 0. \tag{21}$$

Enfin on définit $L^2_\delta(X)$ de telle sorte que les C_k-modules suivants soient isomorphes,

$$S(A)/S(A)_0\simeq L^2_\delta(X)/L^2_\delta(X)_0. \tag{22}$$

Bien entendu ce quotient est la somme du module $\mathbb{C}$ muni de l'action triviale et $\mathbb{C}'$ muni de l'action,

$$(j,\eta)\to|j|\eta. \tag{23}$$

II. Les orbites périodiques de l'action de C_k sur X

Soient M une variété compacte et ξ un champ de vecteurs sans zéro sur M, $F_t=\exp t\xi$ le flot correspondant. Rappelons la formule de Guillemin-Sternberg qui donne la distribution Trace $(U(t))$ où $U(t)$ désigne l'action

$$U(t)\,f=f\circ F_t\qquad f\in C^\infty(M). \tag{25}$$

Si toutes les trajectoires de ξ sont non-dégénérées on a

$$\text{Trace } U(t) = \sum \frac{T_\gamma^{\#}}{|1 - P_\gamma|}\, \delta(t - T_\gamma) \tag{26}$$

où la somme est effectuée sur toutes les orbites périodiques γ de période $T = T_\gamma$, où P_γ est la restriction de la différentielle $d(\exp T\xi)_x$ à l'espace transverse aux orbites (application de Poincaré) ; où $|1 - P_\gamma|$ est la valeur absolue du déterminant de $1 - P_\gamma$ et $T_\gamma^{\#}$ est la période de l'orbite primitive dont γ est l'itérée.

Cette formule s'étend au cas ou le flot admet des zéros. On peut réécrire la formule générale sous la forme

$$\text{Trace } U(h) = \sum_\pi \int_{H_\pi} h(t)\, \frac{1}{|1 - P_t|}\, d_\pi(t) \tag{27}$$

où la somme porte sur les orbites périodiques primitives π et où H_π est l'isotropie d'un point quelconque $x \in \pi$,

$$H_\pi = \{t \in \mathbb{R} \,;\, F_t\, x = x\}, \tag{28}$$

alors que la mesure de Haar $d_\pi(t)$ sur H_π est normalisée de telle sorte que

$$\text{Covolume } H_\pi = 1. \tag{29}$$

Sous la forme (27) cette égalité garde son sens quand on remplace $\mathbb{R}$ par un groupe localement compact commutatif modulé G.

Notons que si $H \subset G$ est cocompact la normalisation (7) des mesures de Haar de H et G assure (29).

De plus, si $H \overset{\rho}{\to} G$ est un morphisme injectif de groupes localement compacts, pour que $\rho(H)$ soit cocompact dans G il faut et il suffit que

$$H \text{ soit modulé par } u \to |\rho(u)|. \tag{30}$$

Considérons l'action de C_k sur $X = A/k^*$, on a

Proposition 2. *Soit $x \in X$, $x \neq 0$. Pour que l'isotropie de x dans C_k soit cocompacte il faut et il suffit qu'il existe une place et une seule υ de k telle que $x_\upsilon = 0$.*

En effet si x est la classe de $a \in A$ modulo k^*, l'isotropie de x est l'image dans C_k de l'isotropie H de a, $H \subset J_k$ et le morphisme $\rho : H \to C_k$ étant injectif on peut appliquer le critère (30). Cela montre que si $x_\upsilon = 0$ pour deux places distinctes $\rho(H)$ n'est pas fermé, car la restriction de $|\ |$ à $k_{\upsilon_1}^* \times k_{\upsilon_2}^*$ n'est pas propre. Ainsi les orbites périodiques de l'action de C_k sur X sont indexées par les places υ de k et le sous-groupe cocompact H_υ associé à υ est l'image de k_υ^* dans C_k par l'application qui à $u \in k_\upsilon^*$ associe la classe de l'idèle j, $j_l = 1\ \forall\, l \neq \upsilon$, $j_\upsilon = u$.

L'espace transverse s'identifie à k_υ et l'application de Poincaré associée à $u \in H_\upsilon$ n'est autre que la multiplication

$$P_u(y) = uy \qquad \forall\, u \in k_\upsilon^*,\ y \in k_\upsilon. \tag{31}$$

On a $|1 - P_u| = |1 - u|$ et le terme de droite de la formule (27) s'écrit $\sum_{\upsilon} \int_{k_\upsilon^*} h(u) \frac{1}{|1 - u|} d^*u$. En comparant les formules (12) et (25) on voit que l'expression formelle pour la trace de $U(h)$ est

$$\sum_{\upsilon} D_\upsilon \tag{32}$$

où D_υ est donné par la formule (5).

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction la comparaison des formules explicites de la théorie des nombres avec l'égalité $D = \sum D_\upsilon$ implique l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L de k, mais l'argument ci-dessus n'est pas une démonstration rigoureuse de cette égalité, car nous avons utilisé sans justification l'analogue de la formule (26) dans un cadre géométrique rendu beaucoup plus subtil par la nature de l'expace $X = A/k^*$.

Conférences

Rome, juillet 96, Gravity coupled with matter and the foundation of noncommutative Geometry.

AMS, juillet 96, Gravity coupled with matter and the foundation of noncommutative Geometry.

Cargese, Juillet 96, 5 conférences sur la géométrie non-commutative.

Seattle, août 96, 100e anniversaire du théorème des nombres premiers. Une conférence sur « Transitions de phase, Algèbres de Hecke et facteurs de type *III* ».

Luminy, novembre 96, formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann.

Barcelone, décembre 96, Gravity coupled with matter and the foundation of noncommutative Geometry.

Oxford, décembre 96, Gravity coupled with matter and the foundation of noncommutative Geometry.

Princeton, mars 97, (Université), noncommutative Geometry.

Princeton, mars 97, (IAS), formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann.

Columbia, mars 97, 2 conférences sur « Formule de trace en géométrie noncommutative et hypothèse de Riemann ».

Boulder, avril 97, Delong lectures, 3 conférences sur la géométrie non-commutative.

Gottingen, mai 97, Andrejewski lectures, 3 conférences sur la géométrie non-commutative.

Berlin, juin 97, Andrejewski lectures, 3 conférences sur la géométrie non-commutative.

Publications

Gravity coupled with matter and the foundation of noncommutative Geometry, Comm. Math. phys. 155 (1996) 109.

Universal formula for noncommutative geometry actions : Unification of gravity and the Standard model (avec A. Chamseddine), Physical review letters, vol. 77, 24 (1996).

Formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann, comptes rendus Acad. Sci. Paris, déc. 96.