Analyse et géométrie

M. Alain Connes, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Renormalisation en théorie des champs et problème de Riemann-Hilbert

1. Introduction

Mon cours cette année est basé sur ma collaboration avec Dirk Kreimer et concerne la renormalisation en théorie des champs. Nous montrons que la renormalisation est un cas particulier d'un procédé général d'extraction de partie finie donné par le problème de Riemann-Hilbert à valeurs dans un groupe pronilpotent associé à la théorie des champs.

Nous montrons d'abord que toute théorie des champs donne naissance, grâce à la combinatoire de ses graphes de Feynman, à une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ qui est commutative en tant qu'algèbre. Le théorème de Milnor-Moore montre qu'elle est duale de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie graduée G dont une base est donnée par les graphes 1-particule irreductibles. Le crochet de Lie de deux graphes est obtenu par insertion d'un graphe dans l'autre. Le groupe de Lie correspondant G est le groupe des caractères de $\mathcal{H}$.

Nous montrons ensuite que grâce à la régularisation dimensionnelle, la théorie nonrenormalisée définit une application méromorphe,

$$\gamma(z) \in G, \qquad z \in V$$

d'un voisinage V dans le plan complexe de la dimension D de l'espace temps, à valeurs dans le groupe G.

Notre résultat principal est que la théorie renormalisée est simplement l'évaluation en $z = D$ de la partie holomorphe en D de la décomposition de Riemann-Hilbert de γ.

Nous analysons ensuite le groupe G et montrons qu'il est produit semi-direct d'un groupe abélien par un groupe très relié au groupe des difféomorphismes des constantes de couplage sans dimension de la théorie des champs. Nous montrons également comment le groupe de renormalisation apparaît très simplement de notre point de vue. En fait la régularisation dimensionnelle implique le choix arbitraire d'une unité de masse μ et nous montrons d'abord que la partie singulière de la décomposition de Riemann-Hilbert de γ est en fait indépendante de ce choix. Il en résulte une contrainte très forte sur cette partie singulière et le groupe de renormalisation s'en déduit immédiatement. Nous en déduisons également une formule de scattering pour l'action nue.

2. L'algèbre de Hopf des graphes de Feynman

Une théorie des champs en d dimensions est donnée par une fonctionnelle d'action classique

(1) $$S(A) = \int \mathscr{L}(A) d^d x$$

où A désigne un champ classique et le Lagrangien est de la forme,

(2) $$\mathscr{L}(A) = (\partial A)^2/2 - \frac{m^2}{2} A^2 + \mathscr{L}_{\mathrm{int}}(A)$$

où $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(A)$ est un polynome en A.

On peut décrire la théorie par les fonctions de Green,

(3) $$G_N(x_1,\ldots,x_N) = \langle 0 | T\phi(x_1)\ldots\phi(x_N) | 0 \rangle$$

où le symbole T signifie que les $\phi(x_j)$'s sont écrit à temps croissant de droite à gauche.

L'amplitude de probabilité d'une configuration classique A est donnée par

(4) $$e^{i \frac{S(A)}{h}}$$

et si l'on pouvait ignorer les problèmes de renormalisation, on pourrait calculer les fonctions de Green grâce à la formule

(5) $$G_N(x_1,\ldots,x_N) = \mathscr{N} \int e^{i \frac{S(A)}{h}} A(x_1)\ldots A(x_N)[dA]$$

où $\mathscr{N}$ est un facteur de normalisation requis par,

(6) $$\langle 0 | 0 \rangle = 1.$$

Si l'on pouvait ignorer les problèmes de renormalisation, on pourrait calculer l'intégrale fonctionnelle (5) en théorie des perturbations, en traitant le terme $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ de (2) comme une perturbation de

(7) $$\mathscr{L}_0(\phi) = (\partial\phi)^2/2 - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

On a ainsi,

(8) $$S(\phi) = S_0(\phi) + S_{\mathrm{int}}(\phi)$$

où l'action libre S_0 définit une mesure Gaussienne exp $(iS_0(\phi))$ $[d\phi] = d\mu$.

On obtient alors le développement perturbatif des fonctions de Green sous la forme,

$$G_N(x_1,\ldots,x_N) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} i^n/n! \int \phi(x_1)\ldots\phi(x_N)(S_{\mathrm{int}}(\phi))^n\, d\mu\right)$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} i^n/n! \int S_{\mathrm{int}}(\phi)^n\, d\mu\right)^{-1}. \tag{9}$$

Les termes de ce développement s'obtiennent en intégrant par partie sous la Gaussienne. Cela engendre un grand nombre de termes $U(\Gamma)$, dont les valeurs sont en règle générale données par des intégrales divergentes.

Les graphes de Feynman Γ sont des données combinatoires qui servent à paramétrer les termes $U(\Gamma)$ du développement perturbatif des fonctions de Green en théorie des champs quantiques. Ce sont des graphes dont les sommets correspondent aux termes du Lagrangien de la théorie.

Pour simplifier les notations nous traiterons la théorie φ^3 en $D = 6$ dimensions, les résultats se prolongent sans difficulté à toute théorie renormalisable.

La valeur numérique non renormalisée $U(G)$ d'un graphe G dépend de la structure externe qu'il est d'usage de spécifier en donnant les moments p_i des faces externes du graphe (c'est-à-dire les faces qui ne sont connectées qu'à un seul sommet). La règle de conservation du moment signifie que pour un graphe connexe Γ, on a

$$\sum p_i = 0 \tag{10}$$

Un graphe de Feynman Γ est « une particule irréductible » (1PI) si il est connexe et le reste après avoir enlevé n'importe laquelle de ses faces.

Définissons maintenant l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$. En tant qu'algèbre $\mathcal{H}$ est l'algèbre commutative libre engendrée par les graphes 1PI. Elle admet ainsi une base indexée par les graphes Γ unions disjointes de graphes 1PI.

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j\,. \tag{11}$$

Le produit dans $\mathcal{H}$ est alors donné par l'union disjointe,

$$\Gamma \cdot \Gamma' = \Gamma \cup \Gamma'. \tag{12}$$

Pour définir le coproduit,

$$\Delta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \tag{13}$$

il suffit de le donner sur les graphes 1PI, on a

$$\Delta\Gamma \;=\; \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \subsetneq \Gamma} \gamma_{(i)} \otimes \Gamma/\gamma_{(i)} \tag{14}$$

Ici γ est un sous-ensemble (non vide et de complémentaire non-vide) $\gamma \subset \Gamma^{(1)}$ de l'ensemble $\Gamma^{(1)}$ des faces internes de Γ dont les composantes connexes γ' vérifient des conditions d'admissibilité détaillées dans la référence 1.

Le coproduit Δ défini par (14) sur les graphes 1PI se prolonge de manière unique en un homomorphisme de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$. Le premier résultat est

Théorème 1. *Le couple* $(\mathscr{H}, \Delta)$ *est une algèbre de Hopf.*

L'algèbre de Hopf $\mathscr{H}$ admet plusieurs graduations naturelles. Il suffit de donner le degré des graphes 1PI puis de poser en général,

$$\deg(\Gamma_1 \ldots \Gamma_e) = \sum \deg(\Gamma_j), \qquad \deg(1) = 0 \tag{15}$$

On doit vérifier que,

$$\deg(\gamma) + \deg(\Gamma/\gamma) = \deg(\Gamma) \tag{16}$$

pour tout sous-graphe admissible γ.

Les deux graduations les plus naturelles sont

$$I(\Gamma) = \text{nombre de faces internes } \Gamma \tag{17}$$

et

$$v(\Gamma) = V(\Gamma) - 1 = \text{nombre de sommets } \Gamma - 1. \tag{18}$$

On a aussi la combinaison importante

$$L = I - v = I - V + 1 \tag{19}$$

qui est le nombre de boucles du graphe.

Soit G un graphe 1PI avec n faces externes indexées par $i \in \{1, \ldots, n\}$ on spécifie sa structure externe en donnant une distribution σ définie sur un espace convenable de fonction test $\mathscr{S}$ sur

$$\{(p_i)_{i = 1, \ldots, n} \, ; \, \Sigma p_i = 0\} = E_G. \tag{20}$$

Ainsi σ est une forme linéaire continue,

$$\sigma : \mathscr{S}(E) \to \mathbb{C}. \tag{21}$$

A un graphe t de structure externe σ correspond un élément de $\mathscr{H}$ et on a

$$\delta_{(\Gamma, \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2)} = \lambda_1 \delta_{(\Gamma, \sigma_1)} + \lambda_2 \, \delta_{(\Gamma, \sigma_2)}. \tag{22}$$

Nous appliquons alors le théorème de Milnor-Moore à l'algèbre de Hopf bigraduée $\mathscr{H}$.

Ce théorème donne une structure d'algèbre de lie sur,

$$\bigoplus_{\Gamma} \mathscr{S}(E_\Gamma) = L \tag{23}$$

où pour chaque graphe 1PI Γ, on définit $S(E_\Gamma)$ comme dans (20). Soit $X \in L$ et soit Z_X la forme linéaire sur $\mathscr{H}$ donnée, sur les monomes Γ, par

(24) $$\langle \Gamma, Z_X \rangle = 0$$

sauf si Γ est connexe et 1PI, et dans ce cas par,

(25) $$\langle \Gamma, Z_X \rangle = \langle \sigma_\Gamma, X_\Gamma \rangle$$

où σ_Γ est la distribution qui donne la structure externe de Γ et X_Γ la composante correspondante de X. Par construction Z_X est un caractère infinitésimal de $\mathscr{H}$ ainsi que les commutateurs,

(26) $$[Z_{X_1}, Z_{X_2}] = Z_{X_1} Z_{X_2} - Z_{X_2} Z_{X_1}.$$

Le produit étant obtenu par transposition du coproduit de $\mathscr{H}$, i.e. par

(27) $$\langle Z_1 Z_2, \Gamma \rangle = \langle Z_1 \otimes Z_2, \Delta \Gamma \rangle.$$

Soient Γ_j, $j = 1, 2$ des graphes 1PI et $\varphi_j \in \mathscr{S}(E_{\Gamma_j})$ les fonctions test correspondantes.

Pour $i \in \{0\ 1\}$, soit $n_i(\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma)$ le nombre de sous-graphes de Γ isomorphes à Γ_1 et tels que

(28) $$\Gamma/\Gamma_1(i) \simeq \Gamma_2.$$

Soit (Γ, φ) l'élément de $\mathscr{L}$ associé à $\varphi \in \mathscr{S}(E_\Gamma)$, le crochet de Lie de (Γ_1, φ_1) et (Γ_2, φ_2) est donné par,

(29) $$\sum_{\Gamma, i} \sigma_i(\varphi_1)\, n_i(\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma)\, (\Gamma, \varphi_2) - \sigma_i(\varphi_2)\, n_i(\Gamma_2, \Gamma_1; \Gamma)\, (\Gamma, \varphi_1).$$

Théorème 2. *L'algèbre de Lie L est produit semi-direct d'une algèbre de Lie Abelienne L_0 par L_c où L_c admet une base canonique indexée par les graphes $\Gamma^{(i)}$ avec*

$$[\Gamma, \Gamma'] = \sum_v \Gamma \circ_v \Gamma' - \sum_{v'} \Gamma' \circ_{v'} \Gamma$$

où $\Gamma \circ_v \Gamma'$ est obtenu en greffant Γ' sur Γ en v.

3. Renormalisation et décomposition de Birkhoff

Étant donnée une théorie renormalisable en dimension D la théorie nonrenormalisée donne en utilisant la régularisation dimensionnelle un lacet γ d'éléments du groupe G associé à la théorie dans la section 2. Le paramètre z du lacet $\gamma(z)$ est une variable complexe et $\gamma(z)$ est méromorphe dans un voisinage de D. Notre résultat principal est que la théorie renormalisée est donnée par l'évaluation à $z = D$ de la partie nonsingulère γ_+ de la décomposition de Birkhoff,

(30) $$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1}\, \gamma_+(z)$$

de γ.

Les règles de Feynman et la régularisation dimensionnelle associent un nombre,

$$(31) \qquad U_\Gamma \ (p_1, ..., p_N) = \int d^d k_1 \dots d^d k_L \ I_\Gamma \ (p_1, ..., p_N, k_1, ..., k_L)$$

à chaque graphe Γ. Nous les utilisons en métrique Euclidienne pour éviter les facteurs imaginaires.

Pour écrire ces règles en dimension d, il faut introduire une unité de masse μ et remplacer partout la constante de couplage par $\mu^{3-d/2} g$. On normalise les calculs par,

$$(32) \qquad U(\Gamma) = g^{(2-N)} \mu^{-B} \langle \sigma, U_\Gamma \rangle$$

où $B = B(d)$ est la dimension de $\langle \sigma, U_\Gamma \rangle$.

On étend la définition (32) aux réunions disjointes de graphes 1PI Γ_j, par,

$$(33) \qquad U(\Gamma = \cup \Gamma_j) = \Pi \, U(\Gamma_j).$$

Le résultat principal est alors le suivant :

Théorème 3. *a) Il existe une unique application méromorphe $\gamma(z) \in G$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq D$ dont les Γ-coordonnées sont données par $U(\Gamma)_{d=z}$.*

b) La valeur renormalisée d'une observable physique $\mathcal{O}$ est obtenue en remplaçant $\gamma(D)$ dans le développement perturbatif de $\mathcal{O}$ par $\gamma_+(D)$ où

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1} \gamma_+(z)$$

est la décomposition de Birkhoff du lacet $\gamma(z)$.

4. Le groupe de renormalisation

On montre d'abord, en se limitant à la théorie φ_6^3 pour simplifier les notations, que bien que le lacet $\gamma(d)$ dépende du choix de l'unité de masse μ,

$$(34) \qquad \mu \to \gamma_\mu(d),$$

la partie singulière γ_{μ^-} de la décomposition de Birkhoff,

$$(35) \qquad \gamma_\mu(d) = \gamma_{\mu^-}(d)^{-1} \gamma_{\mu^+}(d)$$

est en fait indépendante de μ,

$$(36) \qquad \frac{\partial}{\partial_\mu} \gamma_{\mu^-}(d) = 0.$$

Cet énoncé découle immédiatement de l'analyse dimensionnelle.

De plus, par construction le groupe de Lie G est gradué, avec le groupe à un paramètre d'automorphismes,

$$(37) \qquad \theta_t \in \operatorname{Aut} G, \quad t \in \mathbb{R},$$

associé à la graduation de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ donnée par le nombre de boucles,

$$(38) \qquad L(\Gamma) = \text{nombre de boucles } \Gamma$$

pour tout graphe 1PI Γ.

On a l'égalité

(39) $$\gamma_{e^t\mu}(d) = \theta_{t\varepsilon}(\gamma_\mu(d)) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varepsilon = D - d$$

Il en résulte que les lacets γ_μ associés à la théorie nonrenormalisée satisfont la propriété suivante : la partie singulière de leur décomposition de Birkhoff est inchangée par l'opération,

(40) $$\gamma(\varepsilon) \to \theta_{t\varepsilon}(\gamma(\varepsilon)).$$

En d'autres termes, si l'on remplace $\gamma(\varepsilon)$ par $\theta_{t\varepsilon}(\gamma(\varepsilon))$ on ne change pas la partie singulière de la décomposition de Birkhoff. On a posé

(41) $$\varepsilon = D - d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Nous donnons une caractérisation complète des lacets $\gamma(\varepsilon) \in G$ vérifiant cette propriété. Cette caractérisation n'implique que la partie singulière $\gamma_-(\varepsilon)$ qui vérifie par hypothèse,

(42) $$\gamma_-(\varepsilon)\, \theta_{t\varepsilon}(\gamma_-(\varepsilon)^{-1}) \text{ est convergent pour } \varepsilon \to 0.$$

Il est facile de voir que la limite de (42) pour $\varepsilon \to 0$ définit un sous-groupe à un paramètre,

(43) $$F_t \in G, \; t \in \mathbb{R}$$

et que le générateur $\beta = (\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Ft})_{t=0}$ de ce sous-groupe est relié au *résidue* de

(44) $$\operatorname*{Res}_{\varepsilon=0} \gamma = -\left(\frac{\partial}{\partial u}\gamma_-\left(\frac{1}{u}\right)\right)_{u=0}$$

par l'équation,

(45) $$\beta = Y \operatorname{Res} \gamma,$$

où $Y = \left(\frac{\partial}{\partial t}\theta_t\right)_{t=0}$ est la graduation.

Ceci est immédiat mais notre résultat donne la formule suivante (47) qui exprime $\gamma_-(\varepsilon)$ en fonction de β. Introduisons le produit semi-direct de l'algèbre de Lie G (des éléments primitifs de $\mathcal{H}^*$) par la graduation. On a donc un élément Z_0 tel que

(46) $$[Z_0, X] = Y(X) \qquad \forall\, X \in \text{Lie } G.$$

La formule pour $\gamma_-(\varepsilon)$ est alors

(47) $$\gamma_-(\varepsilon) = \lim_{t\to\infty} e^{-t\left(\frac{\beta}{\varepsilon}+Z_0\right)}\, e^{tZ_0}.$$

Les deux facteurs du terme de droite appartiennent au produit semi-direct

$$\tilde{G} = G \rtimes_\theta \mathbb{R}$$

du groupe G par sa graduation, mais leur rapport (47) appartient au groupe G.

Cette formule montre que toute la structure des divergences est uniquement déterminée par le résidu et donne une forme forte des relations de t'Hooft. Nous montrons ensuite, dans le cas de masse nulle, que la formule qui donne la constante de couplage effective,

$$g_0 = g\, Z_1\, Z_3^{-3/2} \tag{48}$$

où $g\, Z_1 = g + \delta g$ et la constante de renormalisation du champ Z_3 sont considérées comme des séries formelles (en g) d'éléments de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$, définit en fait un homomorphisme d'algèbres de Hopf de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathrm{CM}}$ des coordonnées sur le groupe des difféomorphismes formels de $\mathbb{C}$ tels que,

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = \mathrm{id} \tag{49}$$

vers l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ de la théorie de masse nulle.

Il en résulte en transposant, une action formelle du groupe G sur la constante de couplage. Nous montrons en particulier que l'image par ρ de $\beta = Y\,\mathrm{Res}\,\gamma$ est la fonction β de la constante de couplage g.

Nous obtenons ainsi un corollaire du théorème principal qui se formule sans faire intervenir ni le groupe G ni l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$.

La théorie nonrenormalisée donne un lacet

$$\delta(\varepsilon) \in \mathrm{Diff}\,(X), \qquad \varepsilon \neq 0 \tag{50}$$

dont la valeur en ε est simplement la constante de couplage nonrenormalisée. La décomposition de Birkhoff,

$$\delta(\varepsilon) = \delta_+(\varepsilon)\ \delta_-(\varepsilon)^{-1} \tag{51}$$

de ce lacet donne directement,

$$\delta_-(\varepsilon) = \text{constante de couplage nue} \tag{52}$$

et,

$$\delta_+(D) = \text{constante de couplage renormalisée.} \tag{53}$$

A.C.

Conférences

Août 1999, cours de 1 heure à la conférence « Visions in Mathematics » de Tel-Aviv.

Septembre 1999, 1 cours à la rencontre entre physiciens et mathématiciens de Turin.

Septembre 1999, 1 séminaire de mathématiques à l'IHP.

Février 2000, 1 cours de 1 heure, pour les élèves de HEC.

Mars 2000, 3 cours de 1 heure à Nice (Renormalisation et problème de Riemann-Hilbert).

Mars 2000, 1 cours de 1 heure à Oberwolfach (Renormalisation et problème de Riemann-Hilbert).

Juin 2000, 1 conférence au Fields Institute à Toronto.

Juin 2000, 1 cours à la conférence de géométrie Noncommutative de l'AMS, Mount Holyoke.

PUBLICATIONS

A. Connes, D. Kreimer, Renormalization in Quantum Field Theory and the Riemann-Hilbert problem J. High Energy Phys. 09, 024 (1999).

A. Connes, D. Kreimer, Renormalization in Quantum Field Theory and the Riemann-Hilbert problem I Comm. Math. Phys. 210 (2000).

A. Connes, H. Moscovici, Cyclic Cohomology and Hopf Algebras, Letters Math. Phys. 48 (1999) 97-108.

A. Connes, Noncommutative Geometry and the Riemann zeta function Mathematics : Frontiers and Perspectives 2000. IMU, AMS, V. Arnold et all Editors (2000) 35-55.