Analyse et géométrie

M. Alain CONNES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. Introduction. — J'ai montré dans mon cours que les classes d'homotopie stables de déformations de C* algèbres définissent une théorie bivariante E(A,B) qui simplifie et améliore la K-théorie bivariante de Kasparov. La théorie obtenue est semi exacte en ses deux variables et se prolonge aux algèbres de Banach.

2. Déformations de C* algèbres et morphismes asymptotiques. — Soient A et B deux C* algèbres ; nous appellerons déformation de A en B la donnée d'un champ continu $(A(t), \Gamma)$ de C* algèbres sur $[0,1]$ dont la fibre en 0 est $A(0) = A$ et dont la restriction à $]0,1]$ est le champ de fibre $A(t) = B$. $t \neq 0$. Il existe par hypothèse pour tout $a \in A$ une section continue $\alpha \in \Gamma$ telle que $\alpha(0) = a$. Choisissons un tel $\alpha = \alpha(a)$ pour tout $a \in A$ et posons : $\varphi_t(a) = \alpha_{1/t}(a) \in B$, $t \in [1, \infty[$, $a \in A$. On vérifie alors en utilisant la continuité, pour toute section continue $\beta \in \Gamma$ de la fonction $t \to \| \beta_t \| \in \mathbb{R}_+$, que la famille φ_t d'applications de A dans B vérifie les conditions suivantes :

(1) Les applications $t \to \varphi_t(a) \in B$ sont continues (en norme) pour tout $a \in A$.

(2) Pour tous $a, a' \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, on a (en norme) :

$$\lim_{t\to\infty} (\varphi_t(a) + \lambda\varphi_t(a') - \varphi_t(a + \lambda a') = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} (\varphi_t(aa') - \varphi_t(a)\, \varphi_t(a')) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} (\varphi_t(a)^* - \varphi_t(a^*)) = 0$$

On adopte alors la définition générale suivante :

Définition 1. — Soient A, B deux C* algèbres ; on appelle morphisme asymptotique de A dans B la donnée d'une famille φ_t d'applications de A dans B vérifiant les conditions (1) et (2).

Nous dirons que deux morphismes asymptotiques (φ_t) et (φ'_t) sont équivalents quand $\lim\limits_{t\to\infty} (\varphi'_t(a) - \varphi_t(a)) = 0$, $\forall\, a \in A$. Pour toute C^* algèbre B, notons B_∞ le quotient de la C^* algèbre $C_b([1, \infty[, B)$ des fonctions continues bornées à valeurs dans B par l'idéal $C_0([1, \infty[, B)$ des fonctions nulles à l'infini. Les classes d'équivalence de morphismes asymptotiques de A dans B correspondent exactement aux morphismes de A dans B_∞, en posant $(\tilde{\varphi}(a))_t = \varphi_t(a)$, $\forall\, a \in A$, $t \in [1, \infty[$. Pour tout morphisme asymptotique (φ_t), on a $\overline{\lim} \| \varphi_t(a) \| \leq \| a \|$ pour tout $a \in A$. Nous dirons que (φ_t) est *injectif* si $\underline{\lim} \| \varphi_t(a) \| \neq 0$, $\forall\, a \neq 0$, i.e. si $\tilde{\varphi}$ est injectif.

La donnée d'une déformation de A en B équivaut à celle de la classe d'équivalence du morphisme asymptotique (φ_t) que nous lui avons associée ci-dessus, et l'on obtient ainsi tous les morphismes asymptotiques injectifs de A dans B. Tout morphisme asymptotique φ de A dans B est équivalent à la composition $\psi \circ p$ d'une déformation de A/J en B avec l'application quotient $A \xrightarrow{p} A/J$, où J est un idéal bilatère fermé de A.

Définition 2. — Deux morphismes asymptotiques $(\varphi^i_t) : A \to B$, $i = 0,1$ sont homotopes s'il existe un morphisme asymptotique (φ_t) de A dans $B[0,1] = B \otimes C[0,1]$ dont l'évaluation en $i = 0,1$ redonne φ^i_t.

L'homotopie est une relation d'équivalence entre morphismes asymptotiques et on notera [[A, B]] l'ensemble des classes d'homotopie obtenu ainsi. Un changement de paramètre $r(t) \to \infty$, i.e. le remplacement de (φ_t) par $(\varphi_{r(t)}) = (\psi_t)$ ne change pas la classe d'homotopie correspondante.

3. Composition des morphismes asymptotiques. — Soient $(\varphi_t)_{t\in[1,\infty[}$, $\varphi_t : A \to B$ un morphisme asymptotique et $K \subset A$ un compact de A (pour la norme). Nous dirons que (φ_t) est *uniforme* sur K si l'application $(t,a) \to \varphi_t(a)$ de $[1, \infty[\times K$ dans B est continue et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T < \infty$ avec pour tout $t \geq T$:

(α) $\| \varphi_t(a) + \lambda\varphi_t(a') - \varphi_t(a + \lambda a') \| < \varepsilon$, $\forall\, a, a' \in K$, $\forall\, \lambda$, $\lambda \leq 1$.

(β) $\| \varphi_t(a)\, \varphi_t(a') - \varphi_t(aa') \| < \varepsilon$, $\forall\, a, a' \in K$.

(γ) $\| \varphi_t(a)^* - \varphi_t(a^*) \| < \varepsilon$, $\forall\, a \in K$.

(δ) $\| \varphi_t(a) \| < \| a \| + \varepsilon$, $\forall\, a \in K$.

Le théorème de sélection continue de Bartle-Graves montre en utilisant B_∞ que dans la classe d'équivalence de tout morphisme asymptotique (φ_t) il en existe un (φ'_t) qui est uniforme sur tout compact K de A.

Soit $\mathcal{A} \subset A$ une sous-algèbre involutive dense de A qui est une réunion dénombrable $\mathcal{A} = \cup K_n$ de compacts K_n de A, ou de manière équivalente qui est engendrée par un compact de A. On peut choisir les K_n de telle sorte que $K_n + K_n \subset K_{n+1}$, $K_nK_n \subset K_{n+1}$ et $\lambda K_n \subset K_n$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, $| \lambda | \leq 1$. On munit $\mathcal{A}$ de la topologie de limite inductive des K_n.

Tout morphisme asymptotique (φ_t) de $\mathscr{A}$ dans B uniforme sur tout compact de $\mathscr{A}$ se prolonge en un morphisme asymptotique $(\bar{\varphi}_t)$ de A dans B, unique à équivalence près.

Lemme 3. — Soient $(\varphi_t) : A \to B$, $(\psi_t) : B \to C$ des morphismes asymptotiques de C* algèbres. On suppose que (φ_t) est uniforme sur tout compact de $\mathscr{A}$, sous-algèbre involutive dense et σ-compacte de A, et que (ψ_t) est uniforme sur tout compact de B. Il existe alors une fonction continue croissante $r(t) : [1, \infty[\to [1, \infty[$ telle que pour toute fonction continue croissante $s(t) \geqslant r(t)$ la composition $\theta_t = \psi_{s(t)} \cdot \varphi_t$ soit un morphisme asymptotique de $\mathscr{A}$ dans C uniforme sur tout compact.

Proposition 4. — Soient $(\varphi_t) : A \to B$, $(\psi_t) : B \to C$ des morphismes asymptotiques de C* algèbres, uniformes sur tout compact.

(1) Pour toute sous-algèbre involutive dense σ-compacte $\mathscr{A} \subset A$ et toute fonction continue croissante $s(t) : [1, \infty[\to [1, \infty[$ suffisamment grande, le prolongement $\bar{\theta}_t$ à A de la composition $\psi_{s(t)} \cdot \varphi_t : \mathscr{A} \to C$ définit un morphisme asymptotique de A dans C.

(2) La classe d'homotopie $[\bar{\theta}] \in [[A, C]]$ ne dépend que des classes d'homotopie $[\varphi] \in [[A, B]]$ et $[\psi] \in [[B, C]]$.

(3) La composition $[\psi] \circ [\varphi]$ des classes d'homotopie est associative.

Lemme 5. — Soient A, B, C des C* algèbres et (φ_t), (ψ_t) des morphismes asymptotiques $\varphi : A \to C$, $\psi : B \to C$, tels que pour tout $a \in A$, $b \in B$ le commutateur $[\varphi_t(a), \psi_t(b)]$ converge vers 0 en norme. Il existe alors un morphisme asymptotique $(\theta_t) : A \otimes_{\max} B \to C$ unique à équivalence près, tel que $\theta_t(a \otimes b) - \varphi_t(a)\, \psi_t(b) \to 0$, $\forall\, a \in A$, $b \in B$.

4. La catégorie additive E. — Soit E la catégorie dont les objets sont les C* algèbres séparables et ayant pour morphismes de A vers B l'ensemble

$$E(A, B) = [[SA \otimes \mathscr{K}, SB \otimes \mathscr{K}]]$$

des classes d'homotopie de morphismes asymptotiques, où $SA = C_0(\mathbb{R}) \otimes A$, et $\mathscr{K}$ est la C* algèbre élémentaire des opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert séparable. La composition des morphismes est donnée par la composition des classes d'homotopie de morphismes asymptotiques.

L'isomorphisme naturel de $M_2(\mathscr{K}) = M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathscr{K}$ avec $\mathscr{K}$ permet de définir la somme directe de deux éléments $\varphi, \psi \in E(A, B)$ grâce au morphisme asymptotique

$$\theta_t(a) = \begin{bmatrix} \varphi_t(a) & 0 \\ 0 & \psi_t(a) \end{bmatrix}$$

avec des notations évidentes.

Proposition 6. — Dotée de l'opération de somme directe, la catégorie E est une catégorie additive. Notons j le foncteur de la catégorie C* Alg des C* algèbres (séparables) et * homomorphismes vers la catégorie E, qui à ρ : $A \to B$ associe la classe d'homotopie du morphisme asymptotique $\varphi_t = \rho \otimes \mathrm{id}$ de $SA \otimes \mathcal{K}$ dans $SB \otimes \mathcal{K}$.

Théorème 7. — (1) Le bifoncteur E(A, B) de la catégorie C* Alg vers celle des groupes abéliens est semi-exact en chacun de ses arguments.

(2) Tout foncteur F de la catégorie C* Alg vers celle des groupes abéliens, qui est stable (i.e. ne change pas quand on remplace A par $A \otimes \mathcal{K}$), invariant par homotopie et semi-exact se factorise à travers la catégorie E.

Comme le foncteur j : C* Alg $\to$ E vérifie les hypothèses du corollaire suivant, celui-ci caractérise E.

Corollaire 8. — Soit F : C* Alg $\to$ X un foncteur dans une catégorie additive X, qui est stable, invariant par homotopie, et semi-exact comme bifoncteur vers la catégorie des groupes abéliens. Alors F se factorise uniquement à travers E.

Comme la K-théorie bivariante a une caractérisation semblable en remplaçant la semi-exactitude par l'exactitude pour les suites exactes scindées, on obtient :

Corollaire 9. — Le foncteur j : C* Alg $\to$ E se factorise canoniquement à travers la catégorie KK de Kasparov.

5. Morphismes asymptotiques et suites exactes de C* algèbres. — Dans cette section nous donnons les étapes essentielles de la démonstration du théorème 7 (1) tout en explicitant la flèche naturelle de KK(A,B) vers E(A,B) grâce au lemme suivant :

Lemme 10. — (a) Soit $0 \to J \to A \xrightarrow{p} B \to 0$ une suite exacte de C* algèbres (séparables). Soit $(u_t)_{t \in [1,\infty[}$ une unité approchée quasi centrale continue en norme, $0 \leq u_t \leq 1$, $u_t \in J$. Alors l'égalité suivante définit un morphisme asymptotique (φ_t) : $SB \to J$:

$$\varphi_t(f \otimes b) = f(u_t)\, b', \qquad \forall\, f \in C_0\,(]0, 1[), \qquad b \in B$$

où $b \to b'$ est une section arbitraire de la projection p.

(b) La classe ε_A d'homotopie de φ ne dépend que de la suite exacte donnée.

Si (A(t), Γ) est une déformation de A en B (section 2), il lui correspond la suite exacte $0 \to SB \to C \to A \to 0$ où C est la C* algèbre du champ continu

A(t) restreint à [0,1[. On vérifie que le morphisme asymptotique $\psi : SA \to SB$ associé à cette suite exacte par le lemme 10 n'est autre (à homotopie près) que $1 \otimes \varphi$ où φ est associé à la déformation (section 2). La E-théorie est ainsi le quotient par homotopie de la théorie des extensions.

Comme la K-théorie bivariante de Kasparov KK(A,B) peut se définir à partir d'extensions particulières, on déduit du lemme 10 une flèche canonique de KK(A,B) vers E(A,B).

Lemme 11. — Avec les notations du lemme 10 soit C_p le cône de p et $i : J \to C_p$ l'application canonique. (a) La flèche i est un isomorphisme $J \simeq C_p$ dans la catégorie E, avec pour inverse l'élément de $E(C_p, J)$ associé par le lemme 10 à la suite exacte (*).

(b) L'application de suspension $\varphi \to 1 \otimes \varphi$ de E(A,B) vers E(SA, SB) est un isomorphisme.

On peut alors dans le problème de semi-exactitude des foncteurs E(A,.) et E(., B) remplacer l'idéal J par le cône C_p de l'application p, ce qui suffit pour le premier cas. En utilisant (b) on conclut de même pour le deuxième cas.

6. Exemples de morphismes asymptotiques. — (a) Soient M une variété Riemannienne compacte, T*M son espace cotangent. Considérons la déformation naturelle de l'algèbre des fonctions sur T*M associée à la quantification de Weyl, on obtient ainsi une déformation (au sens de la section 2) de la C* algèbre $C_0(T^*M)$ en la C* algèbre élémentaire $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts dans $L^2(M)$.

L'objet géométrique qui systématise cette déformation est le groupoïde tangent de M. L'élément correspondant de $E(C_0(T^*M), \mathbb{C})$ est l'indice analytique.

(b) Soit G un groupe de Lie semi-simple réel connexe et soit K un sous-groupe compact maximal de G, $\alpha : K \to \mathrm{Aut}\, V$ la représentation d'isotropie de K dans l'espace V tangent à G/K en K. A la déformation naturelle du groupe $V \times_\alpha K = G_0$ (produit semi-direct de V par K) en le groupe G correspond une déformation de $C^*(G_0) = A$ en $B = C^*(G)$. L'élément correspondant de E(A,B) est l'induction de Dirac.

(c) Soit A une C* algèbre asymptotiquement abélienne i.e. on suppose avoir un groupe à un paramètre $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'automorphismes de A tels que $\| [a, \sigma_t(b)] \| \to 0$, $\forall$ a, b $\in$ A. Le lemme 5 donne alors un morphisme asymptotique Δ de $A \otimes_{\max} A$ vers A tel que $\Delta_t(a \otimes b) = a\, \sigma_t(b)$, $\forall$ a, b $\in$ A.

On vérifie que l'on peut alors utiliser Δ comme le morphisme diagonal des algèbres commutatives, ce qui donne une structure d'anneau sur K(A).

(d) Soient A une C^* algèbre séparable et π une représentation de A dans l'espace de Hilbert séparable $\mathfrak{h}$ telle que $x \in A$, $\pi(x) \in \mathcal{K} \Rightarrow x = 0$, où $\mathcal{K}$ est l'algèbre des opérateurs compacts. Soit A' la C^* algèbre commutant de A dans $\mathcal{K}_\infty = C_b([1, \infty[, \mathcal{K}) / C_0([1, \infty[, \mathcal{K})$, i.e.

$$(x)(t))_{t \in [1,\infty[} \in A' \Leftrightarrow \| [x(t), a] \| \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0 , \qquad \forall a \in A.$$

Le théorème d'unicité de Voiculescu montre que la C^* algèbre A' ne dépend pas du choix de π. Le lemme 5 définit un morphisme asymptotique φ_A de $A \otimes_{\max} A'$ dans $\mathcal{K}$ tel que $\varphi_t(a \otimes (x(t))) = \pi(a)\, x(t)$ pour $a \in A$ et $x \in A'$. De plus, la proposition 11 montre que la flèche canonique $i : KK(A, \mathbb{C}) \to E(A, \mathbb{C})$ du corollaire 9 se factorise à travers $K_0(A')$, $i = i_1 \circ i_2$
où $i_1 : K_0(A') \to E(A, \mathbb{C})$ associe à $x \in K_0(A') = E(\mathbb{C}, A')$ l'élément $\sigma_{A\circ} (x \otimes id_A)$ de $E(A, \mathbb{C})$.

(e) Soit X un espace compact métrisable connexe, localement connexe par arcs et localement simplement connexe. Soient $\Gamma = \pi_1(X)$ son groupe fondamental et $\psi : X \to B\Gamma$ l'application classifiante du revêtement universel $\tilde{X} \underset{\pi}{\to} X$. En composant ψ avec l'application canonique $\mu : K_*(B\Gamma) \to K(C^*(\Gamma))$ de la K-homologie de $B\Gamma$ vers la K-théorie de $C^*(\Gamma)$ on obtient $\mu_\circ \psi_* : K_*(X) \to K(C^*(\Gamma))$. En fait cette flèche correspond au morphisme asymptotique suivant de la C^* algèbre $C(X)'$ [cf. exemple (d)] vers $C^*(\Gamma)$: Soient ν une mesure de probabilité sur X, diffuse et de support X et $\tilde{\nu}$ la relevée de ν sur le revêtement $\tilde{X}$. Comme la C^* algèbre du groupoïde fondamental G de X (muni de la mesure $\tilde{\nu}$ sur chacun des G^x, $x \in X$) est Morita équivalente à $C^*(\Gamma)$ il suffit de construire un morphisme asymptotique θ de $C(X)'$ vers $C^*(G, \tilde{\nu})$. Soit alors $s : \mathcal{U} \subset G \to \mathcal{U} \subset X \times X$ un isomorphisme local du groupoïde G avec le groupoïde $X \times X$. On obtient θ en posant :

$$\theta_t((k_t)) = \sum_{i=1}^{m} (\varphi_i\, k_i\, \varphi_i) \circ s$$

où $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i^2 = 1$ est une partition de l'unité convenable sur X, et où tout élément $k \in C(X)'$ est représenté par un noyau asymptotique $k_t(x, y)$; $x, y \in X$ en utilisant la représentation canonique π de $C(X)$ dans $L^2(X, \mu)$.

PUBLICATIONS

Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups (avec H. Moscovici), *Topology,* vol. 29, n° 3 (1990), pp. 345-388.

Caractère des représentations θ-sommables des groupes discrets, *C.R.A.S.*, Paris, t. 312, Série I (1991), pp. 661-666.

Particle models and non commutative geometry (avec J. Lott), *Nuclear Physics B. 18 B* (1990), pp. 29-47.

Conférences

Décembre 1990, Palerme, Riemannian Geometry and the Dirac operator.

Février 1991, Wolfgang Pauli Lectures, Zurich, 3 conférences : 1) Sur la nature de la réalité mathématique ; 2) Modèle standard et structure fine de l'espace temps ; 3) Groupes discrets et cohomologie cyclique entière.

Mars 1991, Conférence Relativité Générale, Ecosse : The standard model and non commutative Geometry.

Avril 1991, Marker Lectures (State College Pennsylvania), 3 conférences (titres anglais analogues).

Avril 1991, Wiener Lectures (M.I.T. Boston), Euler products and type III factors.

Juin 1991, Conférence de Physique théorique à New York : Non commutative geometry and the standard model.

Juin 1991, Barcelone. Prospects in Mathematics. Non Commutative Geometry.

Juin 1991, Strasbourg, Conférence en l'honneur de Godbillon et Martinet The Godbillon Vey invariant and type III factors.

Juin 1991, Oberwolfach. Index theory for non compact manifolds.